2018 | Volume 15 | Nº 3 | Pág. 876 a 884

DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.15.2018.876-884.955

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Uma Abordagem Epistemológica dos Invariantes Adiabáticos: como obtê-los

An Epistemological Approach to Adiabatic Invariants: how to obtain them

Romualdo Santos Silva Junior[1]; Milton Souza Ribeiro Miltão[2]; Osmar de Souza e Silva Júnior[1]

RESUMO

Os invariantes adiabáticos são importantes ferramentas no estudo dos problemas físicos. Sistemas físicos que envolvem pêndulos e molas são muito empregados em cursos de mecânica clássica como exemplos de aplicação dos formalismos estudados. Assim, este trabalho, utilizando um procedimento didático, tem por objetivo investigar os invariantes adiabáticos para o problema do pêndulo simples, quando o seu comprimento é diminuído lentamente. Com isso, estaremos mostrando de forma clara o procedimento de obtenção de um invariante adiabático, para revelar a sua importância no estudo dos problemas físicos, possibilitando sua exploração nos cursos de graduação em Física.

Palavras-chave: *Transformação Adiabática, Hipótese Adiabática, Invariante Adiabático.*

ABSTRACT

Adiabatic invariants are important tools in the study of physical problems. Physical systems involving pendulums and springs are widely used in courses of classical mechanics as examples of application of the formalisms studied. Thus, this work, using a didactic procedure, aims to investigate the adiabatic invariants for the simple pendulum problem, when its length is slowly decreased. With this, we will be clearly showing the procedure of obtaining an adiabatic invariant, to reveal its importance in the study of physical problems, enabling its exploration in undergraduate courses in Physics.

Keywords: *Adiabatic Transformation, Adiabatic Hypothesis, Adiabatic Invariant.*

1. INTRODUÇÃO

Os cursos de graduação em Física lidam com um grande número de conceitos e teorias destinados a explicar e descrever os fenômenos caros à Física, sendo que tais fenômenos, invariavelmente, lidam com equações diferencias parciais. Dessa forma, os estudantes de tais cursos, ao longo de suas formações, se defrontam com tais conhecimentos matemáticos, o que se torna necessário o uso de métodos matemáticos avançados que possibilitem solucionar estas equações (Monerat *et al.*, 2006). Vale frisar que uma grande vantagem dos métodos e técnicas matemáticas avançadas é a

[1] UFS - Universidade Federal de Sergipe - São Cristóvão/SE – Brasil.
[2] UEFS - Universidade Estadual de Feira de Santana - Feira de Santana/BA – Brasil.

possibilidade de resolver problemas complexos de maneira mais sistemática e com um grau de dificuldade algébrica bem menor.

Um ponto importante a realçar, se relaciona ao fato de que na teoria e lei geral da Mecânica Clássica, que é um dos conhecimentos basilares iniciais na formação dos estudantes de Física, a utilização de tais métodos já ocorre, o que possibilita uma introdução desses métodos nos momentos iniciais dessa formação. Os métodos matemáticos abordados nesta teoria e lei geral da Física, como se sabe, são riquíssimos, permitindo ao estudante um primeiro contato com conceitos e técnicas amplamente empregadas nos mais variados ramos da Física (Lemos, 2004).

Assim, no estudo e análise de sistemas físicos tais como, por exemplo, massa-mola, pêndulos acoplados, e sistemas que apresentam comportamento caótico, dentre outros, podemos utilizar formalismos avançados de maneira adequada, como o formalismo Hamiltoniano (Goldstein *et al.*, 2001; Landau e Lifchitz, 1988; Lemos, 2004).

Os pêndulos, em particular, são objeto de estudo desde os tempos mais remotos (Arnold *et al.*, 2011), e seus diferentes tipos e particularidades vêm sendo amplamente explorados na comunidade científica (Gauld, 2005). Para esses sistemas físicos, as soluções vibratórias são as características marcantes.

> Frequentemente, o movimento de um sistema vibrante pode ser descrito por uma combinação linear de vibrações ou modos vibracionais. Desde que estamos lidando com um sistema linear, a solução do problema em qualquer tempo será a soma (de um conjunto discreto) ou integral (que é uma espécie de 'soma' de um conjunto contínuo) das soluções individuais ou modos vibratórios individuais. Este é o celebrado 'princípio da superposição linear' (Silva Jr., Miltão, 2015).

De acordo com Fletcher e Rossing (Fletcher e Rossing, 1998), a condição de linearidade de um sistema vibracional ocorre quando a amplitude de vibração é muito pequena comparada com as dimensões características do sistema físico sob consideração.

> Isso significa que em um sistema linear podemos encontrar coordenadas coletivas (denominadas coordenadas normais) em relação às quais os modos vibracionais são os celebrados 'modos normais' que vibram com suas respectivas frequências normais ou naturais e que são independentes uns dos outros (Silva Jr., Miltão, 2015).

A discretização das soluções do problema vibratório decorre da existência de condições de fronteira no sistema físico sob consideração, onde:

> Constituem-se em um conjunto de restrições adicionais que existem no meio onde uma onda mecânica se propaga, relacionadas com as variáveis espaciais, de tal maneira que, a depender da simetria e da limitação de tais restrições, os movimentos vibratórios se restringirão àqueles possíveis a tal simetria e limitação (Silva Jr., Miltão, 2015).

Ou seja, quando no meio as condições de contorno o limitam completamente, confinando-o em uma parte finita do espaço, temos um conjunto infinito discreto de modos vibratórios, constituindo-se em uma onda estacionária, em consequência das reflexões que ocorrem nas superfícies do contorno existente no meio. Temos, assim, os modos normais harmônicos.

Como muito bem assevera Johnson (Johnson, 2011):

> Muitos problemas físicos e matemáticos envolvem o estudo dos *modos harmônicos*, soluções que oscilam sinusoidalmente no tempo. (...). Uma questão importante, com

> soluções muito gerais, é o que acontece com esses modos harmônicos se permitimos que eles se *acoplem fracamente* uns aos outros. (...). Podem acontecer coisas ainda mais interessantes se você mudar os modos vibracionais com o tempo. (...). Neste caso, há um *teorema adiabático* geral que diz a você o que acontece se você mudar o sistema *devagar* o suficiente.

Em trabalho anterior (Silva Jr, 2013), resolvemos explicitamente o problema de dois pêndulos acoplados por uma mola utilizando o formalismo Hamiltoniano, determinando frequências e modos normais de vibração, no caso de duas massas diferentes. Naquele trabalho, ao analisarmos alguns sistemas oscilatórios clássicos, notamos que sua energia (E) era proporcional à frequência de oscilação (f), ou seja, a razão E/f se mantinha constante quando alguns parâmetros que caracterizavam o sistema eram variados. Essa razão constante é o celebrado *invariante adiabático* do sistema (Landau e Lifchitz, 1988), que é um conceito importante que, juntamente com outros elementos do formalismo Hamiltoniano, contribuíram para o desenvolvimento da Mecânica Quântica (Piza, 2003).

Considerando a importância do conceito de *invariante adiabático* para a formação dos estudantes de graduação em Física e o fato de que o "*invariante adiabático é raramente mencionado em cursos de graduação, talvez porque a derivação usual da invariância adiabática de S é 'avançada', fazendo uso da teoria da mecânica de Hamilton-Jacobi clássica, incluindo transformação canônica em variáveis 'ação e ângulo*" (Crawford, 1990), neste trabalho analisamos, o mais pedagogicamente possível, os invariantes adiabáticos que podem ocorrer em um exemplo concreto constituído por um sistema de um pêndulo simples, quando o fio é recolhido lentamente, isto é, quando o comprimento do pêndulo é variado de forma lenta, ou seja, a variação do comprimento do pêndulo é lenta em relação à frequência angular livre do pêndulo. Acreditamos que exemplos concretos desta natureza se constituem em oportunidades singulares para apresentarmos questões sutís, como é o caso dos invariantes adiabáticos na Mecânica de Hamilton.

2. TRANSFORMAÇÕES ADIABÁTICAS, HIPÓTESE ADIABÁTICA E O INVARIANTE ADIABÁTICO

Em um sistema físico, em geral, ocorrem mudanças (processos, transformações). Quando essas mudanças ocorrem lentamente podem existir grandezas que se mantenham constantes; tais grandezas caracterizam uma importante propriedade desse sistema físico, denominada invariante adiabático. Ou seja, um invariante adiabático é uma propriedade que uma grandeza apresenta ao se manter constante quando no sistema físico ocorrem mudanças lentamente (Crawford, 1990).

Dessa forma, em um sistema físico podem existir processos denominados adiabáticos, nos quais teremos transformações adiabáticas, as quais revelarão a existência de invariantes adiabáticos. Por processos adiabáticos entendemos aqueles que propiciem mudanças graduais (lentas) a partir de condições externas ao sistema físico, de tal maneira que "*existem dois tempos característicos envolvidos: t_i, o tempo 'interno', representando o movimento do próprio sistema..., e t_e, o tempo 'externo', sob o qual os parâmetros do sistema mudam sensivelmente*" (Griffiths, 2005); assim, $t_e >> t_i$: daí mudanças *lentas* (aproximações adiabáticas) nos parâmetros (devido a agentes externos) resultam em alterações sensíveis no estado de movimento do próprio sistema, o que significa que uma variação temporal significativa de um parâmetro do sistema ocorrerá em uma escala de tempo muito maior que a escala de tempo natural do sistema (aquela escala temporal que existe na ausência da aproximação adiabática). Observemos, como alerta Griffiths (Griffiths, 2005), que em geral, não se está falando de uma *pequena* mudança nos parâmetros do sistema, mas de uma mudança que pode ser *enorme*. "*Tudo o que precisamos é que aconteça lentamente*".

Vale observar que, subjacente a essas condições, está colocada uma hipótese, denominada *Hipótese Adiabática*, formulada por Ehrenfest (Ehrenfest, 1917), estabelecida como segue: consideremos, em um sistema físico, o conjunto de parâmetros a_1, a_2 ... que variam lentamente. As variáveis dinâmicas que caracterizam tal sistema físico dependem, não só das coordenadas espaciais e temporais, mas dependem desses parâmetros. Caracterizemos os movimentos possíveis do sistema como $\beta(a)$.

> Permita os valores a_{10}, a_{20} ... dos parâmetros se o sistema for determinado de alguma forma. A teoria quântica não permitirá qualquer movimento $\beta(a_0)$, que pode existir com esses valores de parâmetros de acordo com as equações fundamentais da mecânica, mas apenas alguns deles. Portanto, falamos dos movimentos $\mathrm{B}\{a_0\}$ como 'admissíveis' para os valores dos parâmetros a_{10}, a_{20} ... Para outro conjunto de valores dos parâmetros a_1, a_2 ..., pertencem os movimentos 'admissíveis' $\mathrm{B}\{a\}$.
>
> Agora, a hipótese adiabática pode ser formulada como segue:
>
> *Para um conjunto geral de valores dos parâmetros a_1, a_2 ... somente são permitidos aqueles movimentos que sejam relacionados adiabaticamente com movimentos permitidos para os valores especiais a_{10}, a_{20}* ... (isto é, que possam passar por estes por uma mudança reversível) (Ehrenfest, 1917).

A demonstração da hipótese adiabática foi realizada por Born e Fock, em 1928 (Born e Fock, 1928), ao utilizarem o celebrado Teorema Adiabático.

Sob essas condições, portanto, se estabeleceu o Teorema Adiabático (Pinto *et al.*, 2000), o qual, em uma linguagem menos rigorosa, pode ser enunciado como: para uma grandeza física que varie lentamente (devido à variação lenta de algum parâmetro), os estados instantâneos associados a tal grandeza evoluem continuamente (de acordo com a respectiva equação dinâmica) para o estado correspondente em um tempo posterior.

Conforme Griffiths,

> Na mecânica quântica, o conteúdo essencial da *aproximação adiabática* pode ser expresso em forma de teorema. Suponha que o Hamiltoniano mude *gradualmente* de certa forma inicial H^i para certa forma final de H^f. O *teorema adiabático* afirma que se, inicialmente, a partícula está no *n*-ésimo autoestado de H^i, ela será levada (por meio da equação de Shrödinger) ao *n*-ésimo autoestado de H^f (Griffiths, 2005).

Considerando a metodologia a ser empregada na análise de um processo adiabático, temos que:

> A estratégia básica para analisar um processo adiabático é resolver, em primeiro lugar, o problema com os parâmetros... mantidos *constantes*, e, somente ao *final* do cálculo, permitir que variem (lentamente) com o tempo. Por exemplo, o período clássico de um pêndulo de comprimento (fixo) l é $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; se o comprimento está agora *mudando* gradualmente, o período provavelmente será $2\pi\sqrt{\frac{l(t)}{g}}$ (Griffiths, 2005).

Tais invariantes adiabáticos apresentam uma relevante propriedade como enunciada por Ehrenfest:

> Se um invariante adiabático Ω para os movimentos 'permitidos' $\mathrm{B}\{a_0\}$, pertencentes aos valores *especiais* a_{10}, a_{20} ..., possui os valores numéricos distintos Ω', Ω'' ..., *ele possui exatamente os mesmos valores* para os movimentos 'permitidos' pertencentes a valores *arbitrários* dos parâmetros a_1, a_2 ..., (Ehrenfest, 1917).

Assim, os invariantes adiabáticos são de grande importância em várias aplicações na Física, na medida em que "*essas quantidades... podem ter os mesmos valores antes e depois da tendência adiabática*" (Ehrenfest, 1917). Duas importantes aplicações, no âmbito da Mecânica Quântica, são as que seguem:

> Suponha que para alguma classe de movimentos nós, pela primeira vez, introduzimos os 'quanta'.
>
> Em alguns casos a hipótese [adiabática] fixa completamente quais movimentos especiais são considerados como permitidos: isso ocorre se a nova classe de movimentos pode ser derivada por meio de uma transformação adiabática a partir de uma classe para a qual os movimentos permitidos já são conhecidos (especialmente se os novos movimentos podem ser derivados de movimentos harmônicos de um grau de liberdade).
>
> Em outros casos, a hipótese [adiabática] dá restrições à arbitrariedade que existe de outra forma na introdução dos quanta (Ehrenfest, 1917).

Dessa forma, em vários domínios da Física podem existir invariantes adiabáticos que são propriedades importantes para a compreensão dos fenômenos sob estudo.

3. INVARIANTE ADIABÁTICO PARA O PÊNDULO SIMPLES

Para uma compreensão maior do que é um invariante adiabático, consideremos um sistema físico no domínio da Mecânica Clássica (Silva Jr., 2016). Seja um sistema mecânico que dependa de um parâmetro característico $a = \lambda$, e suponhamos que, sob a influência de agentes externos, λ varie muito lentamente. Por exemplo, uma massa *m* suspensa por um fio de comprimento *l* pode estar executando pequenas oscilações ao redor da vertical, com um período *τ*. Se *l* for gradualmente reduzido, puxando-se o fio através de um buraco no teto, de modo que variações significativas de *l* só ocorram numa escala de tempos muito maiores que o período, $T \gg \tau$, dizemos que o pêndulo está sofrendo uma transformação adiabática. Nessa situação, para cada valor da frequência ω (que varia lentamente com a variação lenta do comprimento *l*), o sistema oscilará muito rapidamente. Para esse sistema físico, pretendemos encontrar a grandeza física que permaneça constante (*invariante adiabático*) durante tal transformação adiabática.

A Hamiltoniana para este sistema físico é dada por:

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \equiv E, \tag{1}$$

de tal forma que a frequência angular *ω* pode variar lentamente, com *l* variando adiabaticamente, pois $\omega^2 = g/l$; logo, temos uma deformação lenta da função hamiltoniana.

Seguindo a metodologia proposta para analisarmos um processo adiabático, devido à variação adiabática acima, consideremos a variação temporal para o parâmetro *E* e ω, como segue:

$$E(t) = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(\omega(t))^2x^2, \tag{2}$$

o que nos fornece

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\omega^2 x\dot{x} + m\omega x^2\frac{d\omega}{dt}. \tag{3}$$

A energia mecânica de um oscilador, *E*, em geral, se conserva. Contudo, como estamos variando lentamente *l*, i.e., *l = l(t)*, então ω variará lentamente; o que nos leva a uma variação lenta de *E* (observando que nessa escala de tempo *T* da variação lenta, o pêndulo oscilará muitas vezes com frequência ω, de acordo seu movimento próprio). Consideremos, portanto, tal variação lenta em um ciclo de oscilação; daí, "*ao longo [desse] ciclo, podemos quase negligenciar a mudança em* ω*; portanto, E torna-se quase conservado, com exceção do efeito não-zero de* $\frac{d\omega}{dt}$" (Crawford, 1990).

Observemos, ademais, que,

> [a] equação (3) contém termos que variam mais rapidamente com o tempo, e termos de variação mais lenta. Durante um intervalo de tempo necessário para que os termos lentos *E* e ω variem significativamente, os termos rápidos executam um grande número de oscilações, de modo que podemos substituí-los por seus valores médios num período de oscilação (Silva Jr., 2016).

A escolha da média temporal em um período de oscilação (um ciclo) decorre do fato de que, nesse intervalo de tempo, as médias dos termos $m\dot{x}\ddot{x}$ e $m\omega^2 x\dot{x}$, na equação (3), vão à zero, pois nos instantes $t = 0$ e $t = \tau$ os valores de x e de suas derivadas são iguais devido ao movimento ser periódico (convém observar que, nesse intervalo de tempo do período, a frequência é considerada constante). Além disso, como temos uma variação lenta (adiabática), a variação temporal da energia, $\frac{dE}{dt}$, e da frequência, $\frac{d\omega}{dt}$, no intervalo de tempo do período (muito pequeno em relação ao tempo externo da variação) se comporta como uma constante.

Assim, calculando a média temporal da equação (3) ao longo do ciclo, temos que:

$$\langle\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + m\omega^2 x\dot{x} + m\omega x^2\frac{d\omega}{dt}\rangle \rightarrow \langle\frac{dE}{dt}\rangle = \langle m\dot{x}\ddot{x}\rangle + \langle m\omega^2 x\dot{x}\rangle + \langle m\omega x^2\frac{d\omega}{dt}\rangle, \tag{4}$$

o que fornece para cada termo:

$$\langle\frac{dE}{dt}\rangle = \frac{dE}{dt} \tag{5.1}$$

$$\langle m\dot{x}\ddot{x}\rangle = \langle\frac{m}{2}\frac{d(\dot{x})^2}{dt}\rangle = \frac{m}{2\tau}[\dot{x}^2(\tau) - \dot{x}^2(0)] = 0 \tag{5.2}$$

$$\langle m\omega^2 x\dot{x}\rangle = \langle \frac{m\omega^2}{2}\frac{d(x)^2}{dt}\rangle = \frac{m\omega^2}{2\tau}[x^2(\tau) - x^2(0)] = 0 \qquad (5.3)$$

$$\langle m\omega x^2 \frac{d\omega}{dt}\rangle = \frac{d\omega}{dt}\langle m\omega x^2\rangle = \frac{d\omega}{dt}\frac{A^2}{2}m\omega \qquad (5.4)$$

Substituindo as equações (5) na equação (4), temos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\frac{mA^2}{2}\omega \qquad (6)$$

Na dedução das equações (5) usamos a solução de um oscilador harmônico, $x(t) = Acos(\omega t)$, e a expressão da média temporal em um ciclo de uma função, $\langle f(t)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt$ (Nussenzveig, 1994).

Considerando, agora, a Energia Mecânica total de um oscilador, calculada em um ponto de retorno, quando o valor máximo de $x \equiv A$ e a velocidade $\dot{x} = 0$, temos que:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \qquad (7)$$

Substituindo a equação (7) na equação (6), vem que:

$$\frac{dE}{E} = \frac{d\omega}{\omega} \qquad (8)$$

que após integrada fornece

$$\frac{E}{\omega} = cte \qquad (9)$$

Considerando a relação $\omega = 2\pi f$, temos que o invariante adiabático de um pêndulo simples é dado por:

$$\frac{E}{f} = invariante\ adiabático \qquad (10)$$

Ou seja, o invariante adiabático de um pêndulo será dado pela chamada variável ação J (Landau e Lifchitz, 1988),

$$J = \int pdq \qquad (11)$$

cuja integral é calculada como sendo a área dentro da trajetória no espaço de fases do sistema.

Neste caso, temos outra opção mais simples e geométrica para a determinação desse invariante adiabático, pois a expressão da energia do pêndulo, equação (2), pode ser reescrita da seguinte forma, com $p = m\dot{x}$:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \tag{12}$$

ou, de forma ainda mais sugestiva,

$$\frac{p^2}{\left(\sqrt{2mE}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{2E/m\omega^2}\right)^2} = 1 \tag{13}$$

Esta equação revela que a trajetória no espaço de fases é uma elipse com semieixos *a*, *b*,

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad ; \quad b = \sqrt{2mE} \tag{14}$$

A área da elipse vale π *a b*, e assim,

$$J = \pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{f} \tag{15}$$

onde, nesta última passagem, usamos a relação entre a frequência e a frequência angular, $f = \omega/2\pi$

Assim, a variável de ação *J* é um invariante adiabático, e neste caso ele é dado pela razão entre a energia e a frequência de oscilação do pêndulo (Landau e Lifchitz, 1988).

4. CONCLUSÕES

Nesse trabalho desenvolvemos um estudo didático que permitiu analisar um exemplo da Mecânica Clássica, um sistema de um pêndulo simples, considerando o caso em que o comprimento do fio é diminuído de forma lenta.

Para tanto, estabelecemos a estratégia epistemológica que possibilita determinar um invariante adiabático, após conceituá-lo pedagogicamente.

Assim sendo, concluímos que é factível explorarmos o estudo dos invariantes adiabáticos nos cursos de graduação em Física, e, considerando que tal conceito existe em vários domínios da Física, teremos a possibilidade de compreendermos uma grande variedade de fenômenos interessantes.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARNOLD, F. J.; ARTHUR, R.; BRAVO-ROGER, L. L.; GONÇALVES, M. S.; OLIVEIRA, M. J. G. Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, n. 4, p. 4311–4311, 2011.

BORN, M.; FOCK, V. Beweis des Adiabatensatzes. **Zeitschrift für Physik**, v. 51, n. 3–4, p. 165–180, 1928.

CRAWFORD, F. S. Elementary examples of adiabatic invariance. **American Journal of Physics**, v. 58, n. 4, p. 337–344, 1990.

EHRENFEST, P. On adiabatic changes of a system in connection with the quantum theory. **KNAW, Proceedings**, v. 19, n. I, p. 576–597, 1917.

FLETCHER, N. H.; ROSSING, T. D. The Physics of Musical Instruments. *In*: Second Edition. New York: Springer, 1998.

MONERAT, G. A., SILVA, E. V., OLIVEIRA-NETO, G., ASSUMPÇÃO, A. R. P., & PAPA, A. R. R.. Explorando sistemas hamiltonianos : Estudo analítico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 2, p. 177–189, 2006.

GAULD, C. Pendulums in the physics education literature: A bibliography. **The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives**, p. 505–526, 2005.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3rd Edition, Pearson Education, New York, 2001.

GRIFFITHS, D. J. **Mecânica Quântica**. 2ª Edição, São Paulo: Pearson, 2005.

JOHNSON, S. G. When stationary modes aren ' t stationary : Coupling of modes and adiabatic processes in dynamic eigenproblems Two coupled pendula. **Class Notes for MIT 2007 SPUR Program**, p. 1–4, 2011.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Mécanique**. Moscou: Mir, 1988.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004.

NUSSENZVEIG, M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. 2ª edição, São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1994.

PIZA, A. F. R. T. **Mecânica Quântica.** Edusp, 2003.

SILVA JR., R. S., MILTÃO, M. S. R. O Fenômeno acústico e o ensino médio : utilização de instrumentos musicais como incentivo para o ensino de acústica ; o caso do cavaquinho. **Caderno de Física da UEFS**, v. 13, n. 02, p. 1–36, 2015.

PINTO, A. C. A.; NEMES, M. C.; FARIA, J. G. P.; THOMAZ, M. T. Comment on the adiabatic condition. **American Journal of Physics**, v. 68, n. 10, p. 955–958, 2000.

SILVA JR. R. S. **Modos de Vibração de dois Pêndulos Acoplados no Formalismo Hamiltoniano**. Monografia (Bacharel em Física), Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2016.

SILVA JR, R. S. Formalismo Hamiltoniano : Modos normais de vibração de dois pêndulos com massas diferentes acoplados por uma mola. **Lat. Am. J. Phys. Educ.**, v. 7, n. 1, p. 118–121, 2013.

Recebido: 07/05/2018

Aceito: 07/07/2018