DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.15.2018.860-875.948

REVISTA THEMA

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

A Fórmula de Binet e representações matriciais para os Quaternions Complexos de Fibonacci

The Binet's Formula and Matrix Representations for Complex Fibonacci Quaternions

Rannyelly Rodrigues de Oliveira[1]; Francisco Régis Vieira Alves[1]

RESUMO

Este trabalho investiga a complexificação do modelo de Fibonacci através do estudo sobre os Quaternions. Assim, são apresentadas as definições para os Quaternions de Fibonacci tanto na forma real como complexa. Nesse sentido, a Fórmula de Binet e matrizes quadradas de ordem $4x4$ e $8x8$ são exploradas para os Quaternions de Fibonacci. E, em seguida, essas representações são discutidas para índices inteiros recorrendo à identidade $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$. Por fim, pode-se observar que as matrizes geradas, nessa extensão, possuem $a_{ij} = -a_{ji}$, onde $i \neq j$ e $i, j > 0$, onde a_{ij} é a posição dos termos, além do mais, foram obtidos os seguintes traços das matrizes: $4.F_n$, $4.C_n$, $8.F_n$, $-4.F_n$, $4.(-F_n + iF_{n-1})$ e $-8.F_n$. Com isso, compreende-se a existência de um processo evolutivo dos números de Fibonacci direcionado a uma abordagem complexa e com índices inteiros.

Palavras-chave: *Fórmula de Binet; Matrizes; Quaternions Complexos de Fibonacci.*

ABSTRACT

This work investigates the complexity of the Fibonacci model through the study of Quaternions. Thus, the definitions for the Fibonacci Quaternions are presented in both real and complex form. In this sense, the Binet formula and square matrices of order $4x4$ *and* $8x8$ *are explored for the Fibonacci Quaternions. Then, these representations are discussed for integer indices using the identity* $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$. *Finally, it can be observed that the generated arrays, in this extension, possess* $a_{ij} = -a_{ji}$, onde $i \neq j$ e $i, j > 0$, *where* a_{ij} *is the position of the terms, in addition, the following traces of the matrices were obtained:* $4.F_n$, $4.C_n$, $8.F_n$, $-4.F_n$, $4.(-F_n + iF_{n-1})$ e $-8.F_n$. *With this, we understand the existence of an evolutionary process of Fibonacci numbers directed to a complex approach and with integer indices.*

Keywords: *Binet's Formula; Matrix; Complex Fibonacci Quaternions.*

[1] IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza/CE – Brasil.

1. INTRODUÇÃO

Alguns autores como Alves (2015), Alves & Catarino (2016), Oliveira, Alves & Paiva (2017) exploram o modelo de Fibonacci numa abordagem complexificada, na qual se considera a presença da unidade imaginária "i" em estruturas algébricas que permitem avaliar as relações matemáticas do modelo em representações complexas. Nesse sentido, será dada ênfase aos Quaternions definidos para o modelo de Fibonacci.

Os Quaternions representam uma extensão dos números complexos na forma $z = a + bi$, para $a, b \in \mathbb{R}$, onde essa estrutura possui uma parte real $Re(z) = a$, uma parte imaginária $Im(z) = b$ e a componente imaginária "i". De modo geral, conforme Halici (2012, 2013), um Quaternion é definido pela equação $q = q_0 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ onde se tem duas partes: uma escalar Real composta por (q_0, q_1, q_2, q_3) e uma vetorial com a base, no R^3, (e_1, e_2, e_3), além disso, vale que $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = e_1.e_2.e_3 = -1$.

De modo análogo, quando a parte escalar de um Quaternion é constituída pelos números reais de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, tem-se, então, um Quaternion de Fibonacci descrito pela seguinte equação $Q_n = F_n + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + F_{n+3}e_3$, onde a parte escalar Real é composta por $(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3})$ e a vetorial possui base (e_1, e_2, e_3). E, quando a parte escalar é formada pelos números complexos de Fibonacci $C_n = F_n + i.F_{n+1}$ com $i^2 = -1$, tem-se, então, um Quaternion Complexo de Fibonacci determinado por $R_n = Q_n + i.Q_{n+1}$, com $i^2 = -1$ (HALICI, 2013).

Além do mais, pode-se escrever um Quaternion Complexo de Fibonacci da seguinte forma: $R_n = Q_n + i.Q_{n+1} = (F_n + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + F_{n+3}e_3) + i.(F_{n+1} + F_{n+2}e_1 + F_{n+3}e_2 + F_{n+4}e_3) =$

$= (F_n + i.F_{n+1}) + (F_{n+1} + i.F_{n+2})e_1 + (F_{n+2} + i.F_{n+3})e_2 + (F_{n+3} + i.F_{n+4})e_3 = C_n + C_{n+1}\, e_1 +$

$+ C_{n+2}\, e_2 + C_{n+3}\, e_3$. Assim, vale ressaltar que se têm as seguintes definições:

Definição 1: O Quaternion de Fibonacci é definido por:

$$Q_n = F_n + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + F_{n+3}e_3.$$

Definição 2: O Quaternion Complexo de Fibonacci é definido por:

$$R_n = Q_n + i.Q_{n+1} = C_n + C_{n+1}\, e_1 + C_{n+2}\, e_2 + C_{n+3}\, e_3.$$

À vista disso, este trabalho investiga o modelo de Fibonacci, *a priori*, a partir de uma análise dos trabalhos de Horadam (1993), Halici (2012), Sangwine, Ell & Biham (2011). Assim, fundamentando-se nos artigos de Halici (2013) e Flaut & Shpakivskyi (2013), será apresentada uma representação da Fórmula de Binet e uma discussão matricial de ordens $4x4$ e $8x8$ para os Quaternions de Fibonacci. Doravante, é feita uma extensão dessas representações para índices inteiros.

2. A FÓRMULA DE BINET E SUA EXTENSÃO PARA ÍNDICES INTEIROS

Nesta seção, será apresentada a Fórmula de Binet $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, para $n \geq 0$, a partir daí será explicitada uma Fórmula Variante de Binet para os Quaternions Complexos de Fibonacci (HALICI, 2013). Em seguida, será discutida sua extensão para índices inteiros. Vale comentar que a Fórmula de Binet é utilizada para determinar o enésimo termo da Sequência de Fibonacci. Assim, têm-se os seguintes teoremas:

Teorema 1 (Fórmula variante de Binet para os Quaternions de Fibonacci):

$$R_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{(R_1. - R_0.\beta)\alpha^n - (R_1. - R_0.\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta}, \text{para } n \geq 0 \text{ e } R_n = R_1F_n + R_0F_{n-1}.$$

Prova: Tem-se que $R_0 = C_0 + C_1e_1 + C_2e_2 + C_3e_3$ e $R_1 = C_1 + C_2e_1 + C_3e_2 + C_4e_3$. Vale comentar que, para a relação de recorrência $R_{n+1} = Q_{n+1} + iQ_{n+2}$, $i^2 = -1$, será considerada a equação característica $t^2 - t - 1 = 0$ cujas raízes são $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, assim, pode-se verificar que $\alpha.\beta = -1$ e $\alpha + \beta = 1$. Assim, considerando a Fórmula de Binet $Fn = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, a partir de $R_n = R_1F_n + R_0F_{n-1}$, segue:

$$R_n = R_1.\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + R_0\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) =$$

$$= R_1.\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + R_0\left(\frac{\dfrac{\alpha^n}{\alpha} - \dfrac{\beta^n}{\beta}}{\alpha - \beta}\right) =$$

$$= R_1.\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + R_0\left(\frac{\dfrac{\alpha^n\beta - \beta^n\alpha}{\alpha\beta}}{\alpha - \beta}\right) =$$

$$= R_1.\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + R_0\left(\frac{\beta^n\alpha - \alpha^n\beta}{\alpha - \beta}\right) =$$

$$= \frac{R_1(\alpha^n - \beta^n) + R_0(\beta^n\alpha - \alpha^n\beta)}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{R_1.\alpha^n - R_1.\beta^n + R_0.\beta^n\alpha - R_0.\alpha^n\beta}{\alpha - \beta} =$$

$$=\frac{(R_1.-R_0.\beta)\alpha^n-(R_1.-R_0.\alpha)\beta^n}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{A\alpha^n-B\beta^n}{\alpha-\beta}.$$

Teorema 2 (Fórmula variante de Binet para os Quaternions de Fibonacci para índices inteiros):

$$R_{-n}=\frac{C\alpha^{-n}-D\beta^{-n}}{\alpha-\beta}=\frac{\left(R_1+R_0\beta\right)\alpha^{-n}-\left(R_1+R_0\alpha\right)\beta^{-n}}{\alpha-\beta}.$$

Prova: De modo análogo à demonstração do teorema anterior, segue que:

$$R_{-n}=R_1F_{-n}+R_0F_{-n-1}=$$

$$=R_1F_{-n}+R_0F_{-(n+1)}=$$

$$=R_1\left(\frac{\alpha^{-n}-\beta^{-n}}{\alpha-\beta}\right)+R_0\left(\frac{\alpha^{-n-1}-\beta^{-n-1}}{\alpha-\beta}\right)=$$

$$=\frac{R_1\left(\alpha^{-n}-\beta^{-n}\right)-R_0\left(\beta^{-n}\alpha-\alpha^{-n}\beta\right)}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{R_1\alpha^{-n}-R_1\beta^{-n}-R_0\beta^{-n}\alpha+R_0\alpha^{-n}\beta}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{\left(R_1+R_0\beta\right)\alpha^{-n}-\left(R_1+R_0\alpha\right)\beta^{-n}}{\alpha-\beta}.$$

3. REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS PARA OS QUATERNIONS DE FINONACCI

As representações matriciais são geradas a partir da combinação linear que envolve uma parte escalar real composta pelos números de Fibonacci $(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3})$ e uma base constituída pelas matrizes S_0, S_1, S_2 e S_3. A *posteriori*, assume-se a parte escalar complexa $(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3})$ formada pelos números complexos de Fibonacci. Conforme Halici (2013), a seguir seguem os teoremas matriciais, onde serão deduzidas as matrizes quadradas de ordem 4 x 4 e 8 x 8. Para os teoremas 3 e 4, serão consideradas as seguintes definições:

$$\begin{cases} S_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \sigma_0 \end{pmatrix} \\ S_1 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & \bar{0} \\ \bar{0} & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \\ S_2 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & \bar{0} \end{pmatrix} \\ S_3 = \begin{pmatrix} \bar{0} & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \bar{0} \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ onde } \begin{cases} \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ e } i^2 = -1.$$

Teorema 3: Para o Quaternion de Fibonacci $Q_n = (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3},)$, pode-se escrever:

$$Q_n = F_n.S_0 + F_{n+1}.S_1 + F_{n+2}.S_2 + F_{n+3}.S_3 = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} \\ -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}.$$

Prova:

$$Q_n = F_n.S_0 + F_{n+1}.S_1 + F_{n+2}.S_2 + F_{n+3}.S_3 =$$

$$= F_n.\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + F_{n+1}.\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} + F_{n+2}.\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} + F_{n+3}.\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{n+3}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -F_{n+1} \\ F_{n+1} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2} & 0 \\ 0 & F_{n+2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2} & 0 \\ 0 & -F_{n+2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$ Logo,

obtém-se: $$Q_n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & F_{n+2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & -F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Teorema 4: Para o Quaternion Complexo de Fibonacci $R_n = (C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3})$, pode-se escrever:

$$R_n = C_n.S_0 + C_{n+1}.S_1 + C_{n+2}.S_2 + C_{n+3}.S_3 = \begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} & C_{n+2} & C_{n+3} \\ -C_{n+1} & C_n & -C_{n+3} & C_{n+2} \\ -C_{n+2} & C_{n+3} & C_n & -C_{n+1} \\ -C_{n+3} & -C_{n+2} & C_{n+1} & C_n \end{pmatrix}.$$

Prova: Por definição, tem-se que $R_n = Q_n + i.Q_{n+1}$ de onde se pode escrever $R_n = (C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3}) = C_n e_0 + C_{n+1}.e_1 + C_{n+2}.e_2 + C_{n+3}.e_3$ com $C_n = F_n + i.F_{n+1}$, assim:

$$R_n = C_n.S_0 + C_{n+1}.S_1 + C_{n+2}.S_2 + C_{n+3}.S_3 =$$

$$= C_n.\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + C_{n+1}.\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} + C_{n+2}.\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} + C_{n+3}.\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= C_n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + C_{n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + C_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + C_{n+3}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$\therefore R_n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n & C_{n+1} \\ -C_{n+1} & C_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_{n+2} & C_{n+3} \\ -C_{n+3} & C_{n+2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -C_{n+2} & C_{n+3} \\ -C_{n+3} & -C_{n+2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+1} \\ C_{n+1} & C_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

A partir da definição matricial de Halici (2013), $K = \eta_1 \otimes I_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}$, onde $\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$, pode-se escrever uma representação matricial com oito componentes para os Quaternions de Fibonacci. Nesse sentido, a partir das matrizes S_0, S_1, S_2, S_3 e do produto matricial de Kronecker denotado por $\otimes$, obtém-se o seguinte:

$$\begin{cases} A_0 = I_2 \otimes S_0 = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix} \\ A_1 = I_2 \otimes S_1 = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \\ A_2 = I_2 \otimes S_2 = \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \\ A_3 = I_2 \otimes S_3 = \begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

A seguir, tem-se a definição do produto de Kronecker segundo Singer, Nobre & Rocha (2017) e o teorema que designa a representação de uma matriz quadrada de ordem 8 x 8 para os Quaternions de Fibonacci.

Definição 3: Sejam as matrizes A e B de dimensões (m x n) e (p x q) respectivamente, o produto de Kronecker das matrizes A e B é a matriz, cuja dimensão é (mp x nq), determinada por:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Teorema 5: Para o Quaternion de Fibonacci pode-se escrever:

$$R_n = (F_n + KF_{n+1})A_0 + (F_{n+1} + KF_{n+2})A_1 + (F_{n+2} + KF_{n+3})A_2 + (F_{n+3} + KF_{n+4})A_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} & -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} & -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n & -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & -F_{n+2} & -F_{n+3} & -F_{n+4} & F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & -F_{n+1} & F_{n+4} & -F_{n+3} & -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+3} & -F_{n+4} & -F_{n+1} & F_{n+2} & -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} \\ F_{n+4} & F_{n+3} & -F_{n+2} & -F_{n+1} & -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}.$$

Prova: Seja $R_n = (F_nA_0 + KF_{n+1}A_0) + (F_{n+1}A_1 + KF_{n+2}A_1) + (F_{n+2}A_2 + KF_{n+3}A_2) + (F_{n+3}A_3 + KF_{n+4}A_3)$,

e considerando os seguintes resultados:

- $F_{n+1}.I_4.S_0 = F_{n+1}\cdot\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} = F_{n+1}\cdot\begin{pmatrix} I_2.\sigma_0 & 0 \\ 0 & I_2.\sigma_0 \end{pmatrix} = F_{n+1}\cdot\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$,

- $F_{n+2}.I_4.S_1 = F_{n+2}\cdot\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} = F_{n+2}\cdot\begin{pmatrix} I_2.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -I_2.i\sigma_2 \end{pmatrix} = F_{n+2}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = F_{n+2}\cdot\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & -\eta_1 \end{pmatrix}$,

- $F_{n+3}.I_4.S_2 = F_{n+3}\cdot\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} = F_{n+3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & I_2.\sigma_0 \\ -I_2.\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} = F_{n+3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$,

- $F_{n+4}.I_4.S_3 = F_{n+4}\cdot\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = F_{n+4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & I_2.i\sigma_2 \\ I_2.i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = F_{n+4}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = F_{n+4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \eta_1 \\ \eta_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pode-se verificar para a primeira parcela:

$$F_nA_0 + KF_{n+1}A_0 = F_n\cdot\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}.F_{n+1}\cdot\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix} = \; = F_n\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+1}.I_4 \\ -F_{n+1}.I_4 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+1}.I_4.S_0 \\ -F_{n+1}.I_4.S_0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n.\sigma_0 & 0 \\ 0 & F_n.\sigma_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n.\sigma_0 & 0 \\ 0 & F_n.\sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.I_2 & 0 \\ 0 & F_{n+1}.I_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+1}.I_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.I_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n.\sigma_0 & 0 \\ 0 & F_n.\sigma_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.I_2 & 0 \\ 0 & F_{n+1}.I_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+1}.I_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.I_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n.\sigma_0 & 0 \\ 0 & F_n.\sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{n+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_n & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_n & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_n & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} \\ -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_n \end{pmatrix}.$$

Para a segunda parcela, tem-se que:

$$(F_{n+1}A_1 + KF_{n+2}A_1) = F_{n+1}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}.F_{n+2}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+2}.I_4 \\ -F_{n+2}.I_4 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+1}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+2}.I_4.S_1 \\ -F_{n+2}.I_4.S_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1}.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.i\sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.i\sigma_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1}.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.i\sigma_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.i\sigma_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.\eta_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+2}.\eta_1 & 0 \\ 0 & F_{n+2}.\eta_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1}.\eta_1 & 0 \\ 0 & -F_{n+1}.\eta_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 & 0 \\ -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+2} \\ 0 & 0 & F_{n+1} & 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 \\ 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 & 0 \\ F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+1} \\ 0 & 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & F_{n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Na terceira parcela, avalia-se:

$$F_{n+2}A_2 + KF_{n+3}A_2 = F_{n+2}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}.F_{n+3}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.I_4 \\ -F_{n+3}.I_4 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{n+2}.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.I_4.S_2 \\ -F_{n+3}.I_4.S_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\left(\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & F_{n+2}.\sigma_0\\ -F_{n+2}.\sigma_0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & F_{n+2}.\sigma_0\\ -F_{n+2}.\sigma_0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & F_{n+3}.I_2\\ -F_{n+3}.I_2 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & -F_{n+3}.I_2\\ F_{n+3}.I_2 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & F_{n+2}.\sigma_0\\ -F_{n+2}.\sigma_0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & F_{n+3}.I_2\\ -F_{n+3}.I_2 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & -F_{n+3}.I_2\\ F_{n+3}.I_2 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & F_{n+2}.\sigma_0\\ -F_{n+2}.\sigma_0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & F_{n+3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & F_{n+3}\\ -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & F_{n+2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & F_{n+2}\\ F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+2} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Na quarta parcela, tem-se que:

$$(F_{n+3}A_3+KF_{n+4}A_3)=F_{n+3}.\begin{pmatrix}S_3 & 0\\ 0 & S_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & I_4\\ -I_4 & 0\end{pmatrix}.F_{n+4}.\begin{pmatrix}S_3 & 0\\ 0 & S_3\end{pmatrix}=$$

$$=F_{n+3}.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i\sigma_2\\ i\sigma_2 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & i\sigma_2\\ i\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & F_{n+4}.I_4\\ -F_{n+4}.I_4 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}S_3 & 0\\ 0 & S_3\end{pmatrix}=$$

$$=F_{n+3}.\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i\sigma_2\\ i\sigma_2 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & i\sigma_2\\ i\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & F_{n+4}.I_4.S_3\\ -F_{n+4}.I_4.S_3 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & F_{n+3}.i\sigma_2\\ F_{n+3}.i\sigma_2 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & F_{n+3}.i\sigma_2\\ F_{n+3}.i\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & F_{n+4}.\eta_1\\ F_{n+4}.\eta_1 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & -F_{n+4}.\eta_1\\ -F_{n+4}.\eta_1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & F_{n+3}.i\sigma_2\\ F_{n+3}.i\sigma_2 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & F_{n+4}.\eta_1\\ F_{n+4}.\eta_1 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & -F_{n+4}.\eta_1\\ -F_{n+4}.\eta_1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & F_{n+3}.i\sigma_2\\ F_{n+3}.i\sigma_2 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.\eta_1 \\ F_{n+3}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+4}.\eta_1 \\ F_{n+4}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -F_{n+4}.\eta_1 \\ -F_{n+4}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n+3}.\eta_1 \\ F_{n+3}.\eta_1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & F_{n+4} \\ 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+4} & 0 \\ 0 & F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & F_{n+4} & 0 & 0 \\ -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F_{n+4} & 0 & 0 & 0 & F_{n+3} \\ 0 & 0 & F_{n+4} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 \\ 0 & -F_{n+4} & 0 & 0 & 0 & F_{n+3} & 0 & 0 \\ F_{n+4} & 0 & 0 & 0 & -F_{n+3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, reunindo as parcelas num mesmo conjunto de operações, segue que: $R_n=(F_nA_0+KF_{n+1}A_0)+(F_{n+1}A_1+KF_{n+2}A_1)+(F_{n+2}A_2+KF_{n+3}A_2)+(F_{n+3}A_3+KF_{n+4}A_3)=$

$$=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} \\ -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n+1} & -F_{n+2} & -F_{n+3} & -F_{n+4} \\ F_{n+2} & -F_{n+1} & F_{n+4} & -F_{n+3} \\ F_{n+3} & -F_{n+4} & -F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+4} & F_{n+3} & -F_{n+2} & -F_{n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ -F_{n+1} & F_n & -F_{n+3} & F_{n+2} \\ -F_{n+2} & F_{n+3} & F_n & -F_{n+1} \\ -F_{n+3} & -F_{n+2} & F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_n & Q'_n \\ -Q'_n & Q_n \end{pmatrix}.$$ Além do mais, a matriz

Q_n é dada pela equação $Q_n=F_nS_0+F_{n+1}S_1+F_{n+2}S_2+F_{n+3}S_3$, então, de modo análogo, tem-se que:

$Q'_n=F_{n+1}S_0+F_{n+2}S_1+F_{n+3}S_2+F_{n+4}S_3$.

4. EXTENSÃO DAS MATRIZES PARA ÍNDICES INTEIROS

Neste tópico, serão deduzidas matrizes quadradas de ordem 4 x 4 e 8 x 8 a fim de realizar uma extensão dos teoremas 3, 4 e 5 para índices inteiros. Essa ampliação será feita, recorrendo à identidade de Koshy (2001) $F_{-n}=(-1)^{n+1}.F_n$ e organizada na forma de três teoremas. Desse modo, iniciando a avaliação pelo teorema 3, segue que:

Teorema 6: Para o Quaternion de Fibonacci $Q_{-n}=(F_{-n},F_{-n+1},F_{-n+2},F_{-n+3},)$, pode-se escrever:

$$Q_{-n}=F_{-n}.S_0+F_{-n+1}.S_1+F_{-n+2}.S_2+F_{-n+3}.S_3=(-1)^n.\begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix}.$$

Prova:

$$Q_{-n} = F_{-n}.S_0 + F_{-n+1}.S_1 + F_{-n+2}.S_2 + F_{-n+3}.S_3 =$$

$$= F_{-n}\cdot\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} + F_{-n+1}\cdot\begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} + F_{-n+2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ -\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} + F_{-n+3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= F_{-n}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{-n+1}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{-n+2}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + F_{-n+3}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}.F_n\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n}.F_{n-1}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n-1}.F_{n-2}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n-2}.F_{n-3}\cdot\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{n+1}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -F_{n-1} \\ F_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n-2} & 0 \\ 0 & F_{n-2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n-2} & 0 \\ 0 & -F_{n-2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (-1)^{n-2}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Logo, obtém-se: $Q_{-n} = (-1)^n.\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & -F_{n-2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -F_n & -F_{n-1} \\ F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$

Teorema 7: Para o Quaternion Complexo de Fibonacci $R_{-n} = (C_{-n}, C_{-n+1}, C_{-n+2}, C_{-n+3})$, pode-se escrever:

$$R_{-n} = C_{-n}.S_0 + C_{-n+1}.S_1 + C_{-n+2}.S_2 + C_{-n+3}.S_3 = \begin{pmatrix} C_{-n} & C_{-n+1} & C_{-n+2} & C_{-n+3} \\ -C_{-n+1} & C_{-n} & -C_{-n+3} & C_{-n+2} \\ -C_{-n+2} & C_{-n+3} & C_{-n} & -C_{-n+1} \\ -C_{-n+3} & -C_{-n+2} & C_{-n+1} & C_{-n} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n.\begin{pmatrix} (-F_n + iF_{n-1}) & (F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-3} - i.F_{n-4}) \\ -(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_n + iF_{n-1}) & -(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-F_{n-2} + i.F_{n-3}) \\ -(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-F_n + iF_{n-1}) & -(F_{n-1} - i.F_{n-2}) \\ -(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & -(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_n + iF_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Prova: De modo análogo ao teorema 4, pode-se escrever $R_{-n} = C_{-n}.S_0 + C_{-n+1}.S_1 + C_{-n+2}.S_2$ $+C_{-n+3}.S_3 = \begin{pmatrix} C_{-n} & C_{-n+1} & C_{-n+2} & C_{-n+3} \\ -C_{-n+1} & C_{-n} & -C_{-n+3} & C_{-n+2} \\ -C_{-n+2} & C_{-n+3} & C_{-n} & -C_{-n+1} \\ -C_{-n+3} & -C_{-n+2} & C_{-n+1} & C_{-n} \end{pmatrix}$. Assim, considerando o número complexo de Fibonacci $C_n = F_n + i.F_{n+1}$, será assumido $C_{-n} = F_{-n} + i.F_{-n+1}$, além disso, será aplicada a identidade $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$. O que permite escrever a matriz da seguinte forma:

$$R_{-n} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-n} + i.F_{-n+1} & F_{-n+1} + i.F_{-n+2} \\ -(F_{-n+1} + i.F_{-n+2}) & F_{-n} + i.F_{-n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{-n+2} + i.F_{-n+3} & F_{-n+3} + i.F_{-n+4} \\ -(F_{-n+3} + i.F_{-n+4}) & F_{-n+2} + i.F_{-n+3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -(F_{-n+2} + i.F_{-n+3}) & F_{-n+3} + i.F_{-n+4} \\ -(F_{-n+3} + i.F_{-n+4}) & -(F_{-n+2} + i.F_{-n+3}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{-n} + i.F_{-n+1} & -(F_{-n+1} + i.F_{-n+2}) \\ F_{-n+1} + i.F_{-n+2} & F_{-n} + i.F_{-n+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n.(-F_n + iF_{n-1}) & (-1)^n.(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-1)^n.(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (-1)^n.(F_{n-3} - i.F_{n-4}) \\ (-1).(-1)^n.(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-1)^n.(-F_n + iF_{n-1}) & (-1).(-1)^n.(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-1)^n.(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) \\ (-1).(-1)^n.(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (-1)^n.(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-1)^n.(-F_n + iF_{n-1}) & (-1).(-1)^n.(F_{n-1} - i.F_{n-2}) \\ (-1).(-1)^n.(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-1).(-1)^n.(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (-1)^n.(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-1)^n.(-F_n + iF_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Logo, obtém-se: $R_{-n} = (-1)^n.\begin{pmatrix} (-F_n + iF_{n-1}) & (F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-3} - i.F_{n-4}) \\ -(F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_n + iF_{n-1}) & -(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-F_{n-2} + i.F_{n-3}) \\ -(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-3} - i.F_{n-4}) & (-F_n + iF_{n-1}) & -(F_{n-1} - i.F_{n-2}) \\ -(F_{n-3} - i.F_{n-4}) & -(-F_{n-2} + i.F_{n-3}) & (F_{n-1} - i.F_{n-2}) & (-F_n + iF_{n-1}) \end{pmatrix}.$

Teorema 8: Para o Quaternion de Fibonacci pode-se escrever:

$$R_{-n} = (F_{-n} + KF_{-n+1})A_0 + (F_{-n+1} + KF_{-n+2})A_1 + (F_{-n+2} + KF_{-n+3})A_2 + (F_{-n+3} + KF_{-n+4})A_3 =$$

$$= (-1)^n.\begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} & -F_{n-4} \\ -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} & F_{n-2} & F_{n-1} & F_{n-4} & F_{n-3} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} & -F_{n-3} & -F_{n-4} & F_{n-1} & F_{n-2} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n & F_{n-4} & -F_{n-3} & -F_{n-2} & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n-2} & -F_{n-3} & F_{n-4} & -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-2} & -F_{n-1} & -F_{n-4} & -F_{n-3} & -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} \\ F_{n-3} & F_{n-4} & -F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n-4} & F_{n-3} & F_{n-2} & -F_{n-1} & -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix}.$$

Prova: Análogo ao teorema 5, todavia, R_n será avaliada para índices inteiros considerando a identidade$F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$. Assim:

$$R_{-n} = (F_{-n} + KF_{-n+1})A_0 + (F_{-n+1} + KF_{-n+2})A_1 + (F_{-n+2} + KF_{-n+3})A_2 + (F_{-n+3} + KF_{-n+4})A_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-n} & F_{-n+1} & F_{-n+2} & F_{-n+3} \\ -F_{-n+1} & F_{-n} & -F_{-n+3} & F_{-n+2} \\ -F_{-n+2} & F_{-n+3} & F_{-n} & -F_{-n+1} \\ -F_{-n+3} & -F_{-n+2} & F_{-n+1} & F_{-n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{-n+1} & F_{-n+2} & F_{-n+3} & F_{-n+4} \\ -F_{-n+2} & F_{-n+1} & -F_{-n+4} & F_{-n+3} \\ -F_{-n+3} & F_{-n+4} & F_{-n+1} & -F_{-n+2} \\ -F_{-n+4} & -F_{-n+3} & F_{-n+2} & F_{-n+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{-n+1} & -F_{-n+2} & -F_{-n+3} & -F_{-n+4} \\ F_{-n+2} & -F_{-n+1} & F_{-n+4} & -F_{-n+3} \\ F_{-n+3} & -F_{-n+4} & -F_{-n+1} & F_{-n+2} \\ F_{-n+4} & F_{-n+3} & -F_{-n+2} & -F_{-n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{-n} & F_{-n+1} & F_{-n+2} & F_{-n+3} \\ -F_{-n+1} & F_{-n} & -F_{-n+3} & F_{-n+2} \\ -F_{-n+2} & F_{-n+3} & F_{-n} & -F_{-n+1} \\ -F_{-n+3} & -F_{-n+2} & F_{-n+1} & F_{-n} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.F_n & (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ -(-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n+1}.F_n & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} \\ -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n+1}.F_n & -(-1)^n.F_{n-1} \\ -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n+1}.F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-3}.F_{n-4} \\ -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^n.F_{n-1} & -(-1)^{n-3}.F_{n-4} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-3}.F_{n-4} & (-1)^n.F_{n-1} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} \\ -(-1)^{n-3}.F_{n-4} & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^n.F_{n-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -(-1)^n.F_{n-1} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-3}.F_{n-4} \\ (-1)^{n-1}.F_{n-2} & -(-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-3}.F_{n-4} & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ (-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-3}.F_{n-4} & -(-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} \\ (-1)^{n-3}.F_{n-4} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & -(-1)^n.F_{n-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.F_n & (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ -(-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n+1}.F_n & -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n-1}.F_{n-2} \\ -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n+1}.F_n & -(-1)^n.F_{n-1} \\ -(-1)^{n-2}.F_{n-3} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} & (-1)^n.F_{n-1} & (-1)^{n+1}.F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n . \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} & -F_{n-4} \\ F_{n-2} & F_{n-1} & F_{n-4} & F_{n-3} \\ -F_{n-3} & -F_{n-4} & F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-4} & -F_{n-3} & -F_{n-2} & F_{n-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_{n-1} & F_{n-2} & -F_{n-3} & F_{n-4} \\ -F_{n-2} & -F_{n-1} & -F_{n-4} & -F_{n-3} \\ F_{n-3} & F_{n-4} & -F_{n-1} & -F_{n-2} \\ -F_{n-4} & F_{n-3} & F_{n-2} & -F_{n-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -F_n & F_{n-1} & -F_{n-2} & F_{n-3} \\ -F_{n-1} & -F_n & -F_{n-3} & -F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & -F_n & -F_{n-1} \\ -F_{n-3} & F_{n-2} & F_{n-1} & -F_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = (-1)^n . \begin{pmatrix} Q_{-n} & -Q'_{-n} \\ Q'_{-n} & Q_{-n} \end{pmatrix}.$$

Além disso, a matriz Q_{-n} é dada pela equação $Q_{-n} = F_{-n}.S_0 + F_{-n+1}.S_1 + F_{-n+2}.S_2 + F_{-n+3}.S_3$, então, de modo semelhante, tem-se que: $Q'_{-n} = F_{-n+1}S_0 + F_{-n+2}S_1 + F_{-n+3}S_2 + F_{-n+4}S_3$.

5. DISCUSSÃO E RESULTADOS

Compreende-se que foi possível escrever uma fórmula variante de Binet para os Quaternions de Fibonacci a partir da escrita de $R_n = R_1F_n + R_0F_{n-1}$ em função de $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, para $n \geq 0$. Além disso, as equações Q_n, Q_{-n}, R_n e R_{-n} (I) geram matrizes quadradas de ordem 4x4 que possuem $a_{ij} = -a_{ji}$, onde $i \neq j$ e $i, j > 0$, onde a_{ij} é a posição dos termos, o primeiro índice de “a” indica a linha e o segundo é a coluna da matriz.

$$(\mathrm{I}) = \begin{cases} Q_n = F_n.S_0 + F_{n+1}.S_1 + F_{n+2}.S_2 + F_{n+3}.S_3 \\ Q_{-n} = F_{-n}.S_0 + F_{-n+1}.S_1 + F_{-n+2}.S_2 + F_{-n+3}.S_3 \\ R_n = C_n.S_0 + C_{n+1}.S_1 + C_{n+2}.S_2 + C_{n+3}.S_3 \\ R_{-n} = C_{-n}.S_0 + C_{-n+1}.S_1 + C_{-n+2}.S_2 + C_{-n+3}.S_3 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) = \begin{cases} R_n = (F_n + KF_{n+1})A_0 + (F_{n+1} + KF_{n+2})A_1 + (F_{n+2} + KF_{n+3})A_2 + (F_{n+3} + KF_{n+4})A_3 \\ R_{-n} = (F_{-n} + KF_{-n+1})A_0 + (F_{-n+1} + KF_{-n+2})A_1 + (F_{-n+2} + KF_{-n+3})A_2 + (F_{-n+3} + KF_{-n+4})A_3. \end{cases}$$

Em (II), as equações geram matrizes quadradas de ordem $8x8$ que podem ser simplificadas tal que: $R_n = \begin{pmatrix} Q_n & Q'_n \\ -Q'_n & Q_n \end{pmatrix}$ e $R_{-n} = (-1)^n.\begin{pmatrix} Q_{-n} & -Q'_{-n} \\ Q'_{-n} & Q_{-n} \end{pmatrix}$, onde se pode ver que $a_{ij} = -a_{ji}$. E, sabendo que o traço de uma matriz é a soma de seus elementos da diagonal principal, pode-se verificar que as matrizes geradas nos teoremas 3, 4, 5, 6, 7 e 8 possuem, respectivamente, traço igual a $4.F_n$, $4.C_n$, $8.F_n$, $-4.F_n$, $4.(-F_n + iF_{n-1})$ e $-8.F_n$. Logo, a fórmula variante de Binet e as representações matriciais foram discutidas, recorrendo à identidade $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$ para índices inteiros.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma versão Fibonacciana dos Quaternions $q = q_0 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$. Isso permitiu explorar o modelo de Fibonacci a partir das definições $Q_n = F_n + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + F_{n+3}e_3$ e $R_n = Q_n + i.Q_{n+1} = C_n + C_{n+1}\,e_1 + C_{n+2}\,e_2 + C_{n+3}\,e_3$. Dessa forma, observa-se uma complexificação no número de Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, através de sua representação por $C_n = F_n + i.F_{n+1}$.

Além do mais, a partir das matrizes obtidas da combinação linear que envolve uma parte escalar e uma parte vetorial, é possível ampliar o conjunto de representações para o modelo de Fibonacci, com matrizes quadradas de ordens $4x4$ e $8x8$ e a fórmula variante de Binet, através de sua extensão para índices inteiros feita com recorrência à identidade $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$. Finalmente, isso oportuniza a compreensão de um processo evolutivo do modelo complexo de Fibonacci.

7. REFERÊNCIAS

ALVES, F.R.V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. **VYDIA Educação**, v. 35, n. 1, p. 133-146, 2015.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**, v. 14, n. 2, p. 112-136, 2016.

FLAUT, C.; SHPAKIVSKYI. V. Real matrix representations for the complex quaternions, **Adv. Appl. Clifford Algebras,** 23(3), 657-671, 2013.

HALICI, S. On Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras,** 22(2), 321-327, 2012.

HALICI, S. On Complex Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 23, 105-112, 2013.

HORADAM, A. F. Quaternion Recurrence Relations. **Ulam Quaterly,** 2, 23-33, 1993.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.** A Wiley-Interscience publication, U.S.A., 2001.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA**, v. 11ic, p. 91-106, 2017.

SANGWINE, Stephen J.; ELL, Todd A.; BIHAN, Nicolas Le. Fundamental Represantations and Algebraic Properties of Biquaternions or Complexified Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 21, 607-636, 2011.

SINGER, J.M.; NOBRE, J.S.; ROCHA, F.M.M. **Análise de dados longitudinais.** Versão parcial preliminar. São Paulo: USP. Departamento de Estatística. Junho, 2017, 288 p.

Submissão: 31/05/2018

Aceito: 24/06/2018