2018 | Volume 15 | Nº 1 | Pág. 51 a 62
DOI - http://dx.doi.org/10.15536/thema.15.2018.51-62.813

REVISTA THEMA

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Superfícies mínimas e bolhas de sabão no Ensino Médio

Minimal surfaces and soap bubbles in secondary school

Marcos Melo[1]; Lucimara Andrade[1]

RESUMO

O desafio de tornar atrativo e prático o estudo de matemática no ensino médio brasileiro exige do professor uma constante busca por novas estratégias pedagógicas, podendo essas trazer para o cotidiano dos estudantes assuntos que lhes possibilitem contato real com objetos matemáticos de fundamentação teórica abstrata e não trivial, do ponto de vista do ensino médio. Diante disto, o objetivo deste trabalho é compartilhar com alunos no ensino médio noções da vasta teoria matemática das superfícies mínimas. Trata-se de uma experiência que foi realizada com um grupo de estudantes da 2a série do ensino médio, da Escola de Ensino Médio Antonio Raimundo de Melo, em Carnaubal, Ceará, Brasil. Os experimentos foram realizados para introduzir e discutir propriedades básicas de superfícies mínimas usando bolhas de sabão, por exemplo. A metodologia possibilitou aos alunos aprendizado significativo e contato prático com questões matemáticas profundas, sem necessidade de introduzir a formulação matemática técnica que há por trás dos experimentos. Como resultado, constata-se que com iniciativa e criatividade, muito pode ser feito para que a matemática esteja cada vez mais presente no dia a dia dos alunos do ensino médio.

Palavras-chave: *Superfícies mínimas, Bolhas de sabão, Ensino Médio.*

ABSTRACT

The challenge of promoting attractive and practical study of mathematics in the secondary school demands of the teacher a continuous search for new pedagogical strategies, which may include bringing to the students daily life subjects that enable them to be in touch with abstract and non trivial mathematical tools, from secondary school perspective. In view of the above, the objective of this work is to share with secondary school students an amount of the vast theory of minimal surfaces. This job is about an experience with a group of second grade students from Escola de Ensino Médio Antonio Raimundo de Melo, in Carnaubal, Ceará, Brazil. The experiments were accomplished to introduce and discuss minimal surfaces basic properties by using soap bubbles, for instance. The methodology allowed the students to have a meaningful learning and a practical contact with deep questions in mathematics, without the need to introduce them to the hard mathematical background behind the experiments. As a result, we observe that by having initiative and creativity, much can be done in order to put mathematics in the secondary school students everyday routine.

Keywords: *Minimal surfaces, Soap bubbles, Secondary school.*

[1] UFC – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza/CE – Brasil.

1. INTRODUÇÃO

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como um de seus objetivos primordiais promover a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Estas diretrizes não apoiam, em particular, o estudo de matemática dissociado de contextualização. Exige-se assim do professor de matemática uma atitude dinâmica de traduzir para o cotidiano de seus estudantes a linguagem técnica apresentada em sala de aula. Reciprocamente, espera-se que o professor também traga para seus alunos a interpretação matemática de certos objetos que aparecem no dia a dia deles.

O empenho do professor de matemática do ensino médio em tornar esta disciplina cada vez menos teórica e mais coruscante para seus alunos está em harmonia com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, quando diz que:

Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p.69).

Tendo este desígnio em mente, este trabalho foi realizado com o intuito de trazer para o cotidiano de estudantes do ensino médio algumas noções da teoria de superfícies mínimas, que é um ramo muito destacado da Geometria Diferencial, uma das grandes áreas de pesquisa em Matemática Pura.

Esse método de trabalho empregado é também consoante com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, quando declaram que:

A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isto significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica (BRASIL, 2006, p.69).

Dessa forma, ao apresentar a estudantes do ensino médio diversos exemplos concretos de superfícies mínimas, bem como algumas de suas propriedades, foram aguçados e difundidos o pensamento e o raciocínio matemático entre eles, possibilitando compreensão e verificação da veracidade de resultados teóricos clássicos bem estabelecidos numa área de trabalho geralmente apreciada apenas por alunos de pós-graduação em matemática.

Na seção 2 será apresentada uma fundamentação histórica destacando nomes de grandes matemáticos que introduziram o conceito de superfícies mínimas, destacaram suas propriedades básicas e propuseram problemas relacionados a esses objetos matemáticos. Em seguida, na seção 3, introduziremos a fundamentação teórica, estabelecendo o formalismo matemático por trás da teoria das superfícies mínimas. Ainda nesta seção, poderão ser visualizadas algumas das superfícies mínimas mais importantes já descobertas. Na seção 4 veremos que materiais e métodos foram usados no trabalho com os estudantes. Na sequência, a seção 5 destacará as discussões e os resultados obtidos nas experiências realizadas com os alunos. Por fim, a seção 6 trará conclusões e oportunas ponderações decorrentes deste trabalho.

Em seguida, na seção 3, introduziremos a fundamentação teórica, estabelecendo o formalismo matemático por trás da teoria das superfícies mínimas. Ainda nesta seção, poderão ser visualizadas algumas das superfícies mínimas mais importantes já descobertas. Na seção 4 veremos que materiais e métodos foram usados no trabalho com os estudantes. Na sequência, a seção 5 destacará as discussões e os resultados obtidos nas experiências realizadas com os alunos. Por fim, a seção 6 trará conclusões e oportunas ponderações decorrentes deste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

Segundo Eves (2004), em 1827 Carl Friedrich Gauss (1777-1885) introduziu o importante conceito de curvatura de uma superfície S num ponto p de S. Ele considerou as secções de S formadas pelos planos que contêm a normal a S no ponto p. Dessas secções há uma de curvatura máxima k e uma de curvatura mínima k' em p. Essas duas secções em geral são perpendiculares entre si e suas curvaturas em p se chamam *curvaturas principais* de S em p. O produto $K=k \cdot k'$ é chamado *curvatura total* ou *gaussiana* da superfície S em p.

Figura 1: Carl F. Gauss
Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Christian_Albrecht_Jensen

Em 1831 Sophie Germain (1776-1831) introduziu o conceito de *curvatura média* $H=(k+k')/2$, que é precisamente a média aritmética das curvaturas principais introduzidas por Gauss.

Figura 2: Sophie Germain
Fonte: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Germain.html

Percebeu-se que eram particularmente importantes as superfícies para as quais H é nula em todos os pontos; estas superfícies se denominam *superfícies mínimas*. A designação de superfícies mínimas decorre do fato de que elas se caracterizam por serem as superfícies de área menor entre todas as superfícies limitadas por uma dada curva fechada no espaço. Ilustram-se nas formas assumidas pelas películas de espuma de sabão obtidas quando se mergulham laços fechados de arame de qualquer forma numa solução de água e sabão; a tensão superficial das películas minimiza as áreas das superfícies das películas.

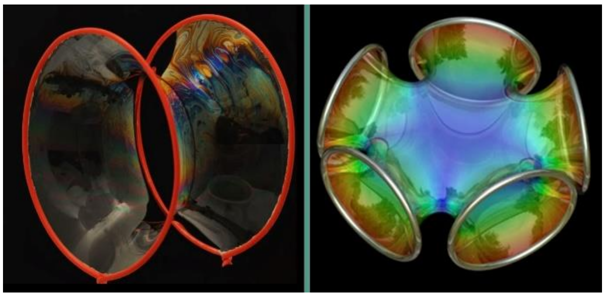

Figura 3: Superfícies mínimas em películas de espuma de sabão
Fonte: https://redlegagenda.files.wordpress.com/2015/09/soap-films-minimal-surfaces.jpg

Quem pela primeira vez propôs o problema de determinar a superfície mínima por uma dada curva do espaço foi Joseph Louis Lagrange (1736-1813), mas a questão tornou-se conhecida como *problema de Plateau*, devido ao fato de o físico cego Joseph Plateu (1801-1883) ter tido a primazia de conceber o método da película de espuma de sabão para "enxergar" essas superfícies.

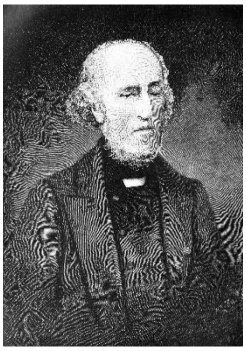

Figura 4: Joseph Plateau
Fonte: https://ca.wikipedia.org/wiki/Joseph_Plateau

É interessante que se possa caracterizar uma superfície mínima tanto local como globalmente. Em 1931 o matemático americano Jesse Douglas (1897-1965), quando tinha apenas 34 anos de idade, deu uma solução completa do problema de Plateau, graças ao que ele recebeu o prêmio Bôcher e uma das duas primeiras medalhas Fields concedidas (1936).

Figura 5: Jesse Douglas
Fonte: https://www.geni.com/people/Jesse-Douglas-Fields-Medal-1936/6000000042457855167

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma breve apresentação técnica do conceito de superfícies mínimas faz-se necessário para fundamentar os experimentos práticos realizados pelos estudantes do ensino médio com algumas de tais superfícies.

De acordo com do Carmo (2008), quando S é uma superfície orientada por um campo de vetores normais $N:S\rightarrow S^2$ (aqui S^2 indica a esfera unitária do espaço euclidiano tridimensional), sabe-se que para cada ponto p de S a diferencial de N em p, o operador linear $dN_p:T_pS\rightarrow T_pS$, definido sobre T_pS, o plano tangente de S em p, é autoadjunta, e, consequentemente, diagonalizável. O menor e o maior autovalor deste operador são as precisamente *curvaturas principais*, apresentadas na seção anterior. O determinante e a metade do traço de dN_p são, respectivamente, a *curvatura gaussiana* e a *curvatura média* de S em p, também mencionadas na seção anterior, ou seja, $K=\det(dN_p)$ e $H=1/2(\mathrm{tr}(dN_p))$.

Quando são feitas variações normais da superfície S, analisa-se naturalmente como varia a área dessas superfícies assim obtidas, e observa-se que a condição $H=0$ (condição de S ser *mínima*) significa que a área de S é um valor crítico da função área associada a essas variações. Em particular, quando S é a superfície de menor área dentre as superfícies dessas variações normais, S é uma superfície mínima, isto é, necessariamente é satisfeita a equação $H=0$. Deve-se notar que este valor crítico pode não ser um mínimo e que isso faz a palavra mínima parecer um pouco estranha. No entanto, esta terminologia é consagrada pelo tempo, tendo sido introduzida por Lagrange (que foi o primeiro a definir uma superfície mínima) em 1760, quase 70 anos antes de Sophie Germain ter introduzido o conceito de curvatura média, como já mencionado anteriormente.

Alguns exemplos clássicos de superfícies mínimas, dadas aqui em termos de coordenadas, são:

- **O plano.** $X(x_1,x_2)=(x_1,x_2,0)$, sendo x_1 e x_2 números reais quaisquer. É a única superfície mínima completa e com curvatura gaussiana nula no espaço euclidiano tridimensional.
- **O catenoide.** $X(x_1,x_2)=(\cosh(x_2)\cos(x_1),\cosh(x_2)\mathrm{sen}(x_1),x_2)$, $0< x_1<2\pi$, $-\infty<x_2<\infty$.

Em 1741 Euler descobriu que quando a catenária $x_1=\cosh(x_3)$ é rotacionada em torno do eixo x_3, obtém-se uma superfície que minimiza a área dentre todas as superfícies de revolução após serem fixados valores de fronteira para as curvas geradoras.

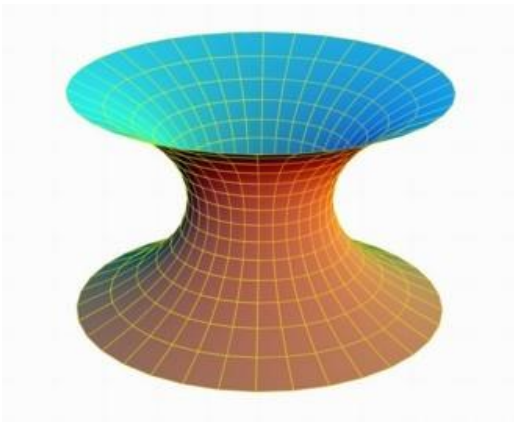

Figura 6: Catenoide
Fonte: http://www.indiana.edu/~minimal/maze/catenoid.html

- **O helicoide.** $X(x_1,x_2)=(\text{senh}(x_2)\cos(x_1),\text{senh}(x_2)\text{sen}(x_1),x_1)$, $0< x_1<2\pi$, $-\infty<x_2<\infty$.

O primeiro a mostrar que esta superfície era mínima foi Meusnier em 1776. O helicoide é a única superfície mínima, além do plano, que é também uma superfície regrada por família de retas (i.e., por cada ponto do helicoide passa uma reta inteiramente continua nele).

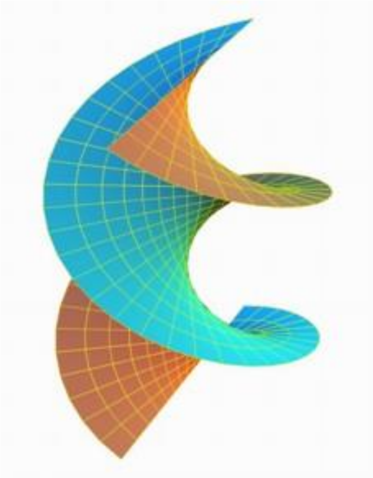

Figura 7: Helicoide
Fonte: http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Classical/Classical/Helicoid/web/index.html

- **A superfície de Enneper.** $X(x_1, x_2)=(x_1-x_1^3/3+x_1x_2^2,x_2-x_2^3/3+x_2x_1^2,x_1^2-x_2^2)$, sendo x_1 e x_2 números reais quaisquer. Esta superfície foi descoberta por Enneper em 1864, usando a recém-formulada teoria de representação de superfícies mínimas em termos de dados analíticos, atualmente conhecida como *representação de Weierstrass*.

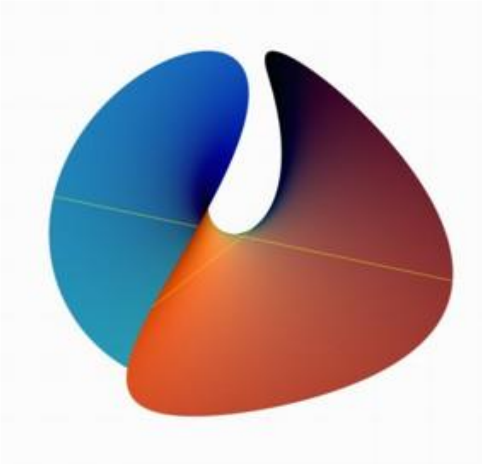

Figura 8: Superfície de Enneper
Fonte: www.indiana.edu/~minimal/maze/enneper.html

- **A faixa de Möbius mínima de Meeks.** *S* é o plano complexo menos a origem com o *par de Weierstrass* (g,dh), onde $g(z)=z^2(z+1)/(z-1)$ e $dh(z)=i(z^2-1)dz/z^2$ (aqui a superfície está dada em termos de representação de Weierstrass, e o par (g,dh) é usualmente conhecido como *dados de Weierstrass da superfície*). Esta superfície foi obtida por Meeks em 1981. Ele provou que ela é a única superfície completa, minimamente imersa no espaço euclidiano tridimensional com curvatura total finita 6π.

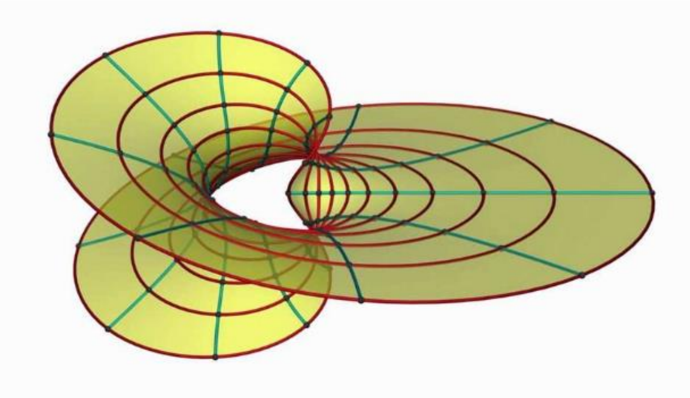

Figura 9: Faixa de Möbius mínima de Meeks
Fonte:
https://www.researchgate.net/profile/William_Meeks2/publication/2123797/figure/fig1/AS:394642597138438@1471101535549/Figure-1-The-complete-minimal-Mobius-strip.jpg

- **O toro de Costa.** *S* é dada pelos pares de pontos complexos (z,w) que satisfazem $w^2=(z^2-1)/z$, com exceção dos pontos (±1,0) e (∞,∞), com o par de Weierstrass (g,dh) dado por g(z)=czw e $dh(z)=dz/(z^2-1)$, onde c é uma constante associada à representação de Weierstrass da superfície mínima de gênero um e três fins do espaço euclidiano tridimensional (aqui, como no exemplo anterior,(g,dh) são os dados de Weierstrass da superfície). Esta é talvez a superfície mínima completa no espaço tridimensional mais celebrada desde os exemplos clássicos do século 19. O toro de Costa foi descoberto em 1982 pelo brasileiro Celso José da Costa. Em uma entrevista à revista Galileu, Costa disse: "Eu assistia a um filme sobre escola de samba e um sambista desfilava com um bizarro chapéu de três abas. Naquele momento tive a inspiração crucial e final do modo como a figura geométrica da superfície que eu buscava se apresentava no espaço."

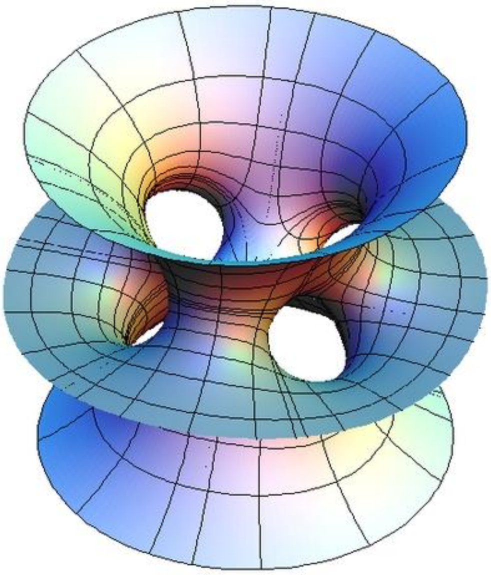

Figura 10: Toro de Costa
Fonte: https://br.pinterest.com/shiqiliu/costa-surface/

4. MATERIAL E MÉTODOS

Este trabalho foi desenvolvido na Escola de Ensino Médio Antonio Raimundo de Melo, localizada na rua Paulo Sarasate, 539, bairro Cruzeiro, município de Carnaubal, Ceará, Brasil. Os colaboradores são alunos do 2º ano do ensino médio desta escola.

Com a finalidade de expor os estudantes à teoria de superfícies mínimas, foram abordadas questões acerca das leis de Plateu através de experimentos feitos com os seguintes materiais:

- Contornos de arame de vários formatos;
- Garrafas de plástico;
- Palitos de sorvete;
- Massa de biscuit;
- Bolhas de sabão.

A proposta consistiu em mergulhar contornos de arame em soluções com água e sabão para produzir diversos exemplos de superfícies mínimas, verificando de modo prático as esperadas condições sobre minimização de área superficial. Além disso, ao ser construído um helicoide a partir do uso de diversos palitos, inspecionou-se sua propriedade como superfície mínima regrada por retas.

Visto que um estudo formal da teoria das superfícies mínimas se dá em geral em nível de pós-graduação em matemática, era impossível esperar que os alunos da escola Antonio Raimundo de Melo estivessem minimamente familiarizados com o rigor matemático por trás dos experimentos. Com isto posto, seria premente a necessidade do aprendizado do conceito de superfícies mínimas através de situações concretas, o que, neste caso, corrobora as ideias de uma corrente de diálogo menos tradicional sobre o processo de ensino e aprendizagem que diz que:

As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático. (BRASIL, 2006, p.81)

Assim, mesmo diante dessas diversas situações-problema de significativa complexidade teórica apresentadas aos estudantes, verificou-se que a praticidade da teoria quando trazida para uma linguagem do cotidiano possibilitou que esses alunos vivenciassem de modo garrido uma realidade matemática que de outra forma estaria desconvizinha deles. A confrontação dos dados empíricos com as conclusões teóricas besuntou o aspecto dinâmico da construção do conhecimento neste caso.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A investigação matemática neste trabalho desenvolveu-se a partir do problema da determinação da superfície de menor área em comparação com outras superfícies limitadas por uma dada curva fechada no espaço, o bem conhecido *problema de Plateau*. Os estudantes que participaram desta perquisição conseguiram resolver o problema, produzindo algumas das soluções clássicas conhecidas na teoria das superfícies mínimas.

Neste caso, vivenciou-se o que foi apontado por Ponte e Matos (1998, p.119):

> Nas investigações matemáticas os alunos são colocados no papel dos matemáticos [...]. Envolvem processos de raciocínio complexos e requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte do aluno. Envolvem, no entanto, também alguns processos característicos. Enquanto os problemas matemáticos tendem a caracterizar-se por assentarem em dados e objetivos bem concretos, as investigações têm um ponto de partida muito menos definido.

Segundo Meneghetti e Redling (2012, p.208), os alunos de matemática devem participar ativamente na construção do conhecimento, o que pressupõe a participação do aluno na aquisição de novos saberes, de maneira que esses não sejam uma mera repetição ou cópia dos formulados pelo professor ou pelo livro-texto, mas uma reelaboração pessoal. Esta participação efetiva certamente ocorreu neste trabalho.

Ao ser colocada uma película de espuma de sabão entre dois arcos, separando-os lentamente, um grupo de estudantes obteve o *catenoide*, a superfície mínima descoberta por Euler em 1741, conforme a figura a seguir.

Figura 11: Catenoide em película de sabão limitada por arames
Fonte: Autores

Após colocar uma mistura de sabão numa garrafa descartável de plástico, cortá-la e separa a garrafa em dois pedaços, obtém-se novamente (só que de modo diferente do procedimento anterior) o catenoide.

O formato obtido remete naturalmente a formas que os alunos encontram com frequência no supermercado e à importância da Matemática até para questões ambientais: superfícies menores (superfícies mínimas, por exemplo) gastam menos material e, portanto, são mais econômicas e têm menos impacto no meio ambiente.

Ainda com o uso do catenoide, percebeu-se que as noções de curvaturas principais e curvatura média ficaram mais claras construindo esta superfície mínima, desta vez com massa de biscuit. Neste caso, os alunos perceberam que as curvaturas principais do catenoide (as das circunferências centrais, uma horizontal e a outra vertical) têm sinais contrários e mesmo valor absoluto, ou seja, têm soma nula, o que comprova que a curvatura média do catenoide é zero.

Figura 12: Catenoide com massa de biscuit
Fonte: Autores

Em seguida, mergulhando um arame em formato espiral num recipiente com água e sabão, os alunos conseguem produzir o *helicoide*, a superfície mínima descoberta por Meusnier em 1776.

Figura 13: Helicoide em película de sabão
Fonte: Autores

Com o objetivo de descobrir/entender a propriedade de o helicoide ser uma superfície regrada, os estudantes fizeram a construção desta superfície mínima usando palitos de picolé. Com isto, ficou claro para os alunos que por cada ponto do helicoide passa uma reta que está inteiramente contida no próprio helicoide.

Figura 14: Helicoide com palitos de picolé
Fonte: Autores

Muitos outros experimentos foram realizados com os alunos, como a confecção de diversos tipos de poliedros utilizando arames e películas de sabão, tendo por objetivo estender o que foi feito com superfícies mínimas e aguçar discussões sobre topologia das superfícies, que é também um tema dialogado quase sempre com estudantes de nível de pós-graduação em matemática.

Com isto, fica claro que quando o professor de matemática decide investir num processo de aprendizagem em que o aluno tem a oportunidade de participar ativamente na construção do conhecimento, o estudo de matemática deixa de ser aquela sequência (muitas vezes monótona) “definição → exemplo → exercícios”, e a boa escolha de uma situação-problema passa a instigar/motivar o aluno. Neste caso, o professor se torna mediador e orientador no processo ensino-aprendizagem, sendo assim responsável pela sistematização do novo conhecimento, e isto de uma forma agora atraente e prazerosa.

6. CONCLUSÕES

O estudo contribuiu muito para a formação educacional dos estudantes, possibilitando a eles um contato teórico e prático com tópicos matemáticos voltados quase exclusivamente para alunos de pós-graduação em matemática. Além disso, os estudantes foram expostos a resultados clássicos e de interesse de vários pesquisadores matemáticos da área de Geometria Diferencial. Isto significa que foram trazidos à atenção de estudantes do ensino médio assuntos de altíssimo nível científico, ou seja, discussões profundas propostas por grandes matemáticos desde o século 19 fizeram parte do cotidiano de alunos que ainda nem tinham se despedido do ensino básico.

Um dos pontos mais intrigantes nesta investigação foi o fato ter sido possível gerar aprendizado sem fazer uso do método tradicional de ensino. Segundo Brasil (2006, p.80), o ensino tradicional é transmissão do conhecimento, e a aprendizagem é a mera recepção de conteúdos, ou seja, o aprendizado é o acúmulo de conteúdos e o ensino baseia-se essencialmente na “verbalização” do conhecimento por parte do professor. Visto que era impossível apresentar a definição formal de superfícies mínimas aos alunos do ensino médio (pois esta definição envolve o conceito de superfícies regulares, diferenciabilidade de funções definidas em superfícies, elemento de área de superfície, variação da área, dentre outros), os conceitos foram introduzidos empiricamente por meio das noções comuns e da experiência prática acerca das propriedades minimizantes esperadas para tais superfícies, bem como pelo uso de ferramentas lúdicas capazes de produzir exemplos concretos de superfícies mínimas. Assim, passaram a ser do conhecimento desses alunos do ensino médio belos exemplos de superfícies mínimas (algumas sendo produzidas por eles próprios), sem que houvesse a necessidade de se prender aos detalhes técnicos que há por trás da teoria (que neste momento está num nível muito acima do que é apresentado na escola secundária) que estabelece formalmente esses objetos matemáticos, algo que poderia ter ofuscado a beleza da teoria e desmotivado os alunos. Esta experiência comprova que com iniciativa e criatividade, a matemática (mesmo aquela matemática que aparentemente faz parte apenas da rotina de pesquisadores de alto nível) pode deixar de ser temida e rejeitada por muitos estudantes, e passar a ser vista como uma ferramenta indispensável e presente no dia a dia dos alunos do ensino médio.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.** Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm. Acesso em 29 de novembro de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: 2006. (volume 2).

do CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.** Coleção Textos Universitários. SBM. 2008.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Editora da UNICAMP. 2004

MEEKS III, William and PÉREZ, Joaquín. The classical theory of minimal surfaces. **Bulletin of the AMS.** Volume 48, Number 3, Pages 325–407, July 2011.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel, REDLING, Julyette Priscila. Tarefas alternativas para o ensino e a aprendizagem de funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. **Bolema,** Rio Claro (SP), vol.26, no.42A, p. 193-229, abr. 2012.

da PONTE, João Pedro, MATOS, João Filipe. Processos Cognitivos e Interações Sociais nas Investigações Matemáticas. In ABRANTES, P., LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Orgs.) Inv**estigar para aprender matemática - Textos selecionados.** Lisboa: Projeto MPT e APM, p. 119 – 137, 1998.

REVISTA GALILEU. **A bolha de sabão em números. Como a arte inspirou a matemática (e vice-versa) no estudo de figuras geométricas.** Eureca. Editora Globo, 2015. Disponível em http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT656726-2680,00.html. Acesso em 06 de dezembro de 2017.