2018 | Volume 15 | Nº 1 | Pág. 63 a 78

DOI - http://dx.doi.org/10.15536/thema.15.2018.63-78.572

ENGENHARIAS

REVISTA THEMA

Menores Principais de Matrizes Hermitianas: a negatividade para estados puros de *n* qubits.

Principal Minors of Hermitian Matrices: negativity for pure states of n qubits

João Luzeilton de Oliveira[1]

RESUMO

Quando se estuda emaranhamento de estados quânticos, há uma preocupação em fornecer critérios para saber se um dado estado quântico é ou não emaranhado, bem como quantificar esse emaranhamento. Neste sentido, propõe-se uma medida para quantificar esse emaranhamento: a negatividade. Na verdade, serão propostas duas expressões algébricas para a negatividade de um estado puro de *n* qubits. As duas serão utilizadas no cálculo da negatividade desse estado, sendo que uma delas está relacionada com a soma dos menores principais de ordem 3 da transposta parcial da matriz densidade do tal estado, e a outra, depende das amplitudes do referido estado. Com essas expressões é possível calcular $\mathcal{N}_{A_k(A_1 \ldots A_{k-2} A_{k-1} \ldots A_n)}$, com $1 \leq k \leq n$, obtendo-se uma generalização do cálculo da negatividade para estados de dois qubits *A* e *B*, $\mathcal{N}_{XY}$, com $X, Y \in \{A, B\}$. Diante do exposto, foi visto que o emaranhamento está relacionado com os menores principais da transposta parcial da matriz densidade do estado quântico em questão, mas como "critérios de separabilidade". O que se propõe aqui é uma expressão algébrica para o cálculo da negatividade, ou seja, medir o emaranhamento usando os menores principais da transposta parcial desse estado quântico.

Palavras-chave: *Menores principais. Matrizes hermitinas. Negatividade. Estados puros.*

ABSTRACT

When one studies the entanglement of quantum states, there is a concern to provide criteria for whether or not a given quantum state is entangled, as well as to quantify this entanglement. In this sense, a measure is proposed to quantify this entanglement: negativity. In fact, two algebraic expressions will be proposed for the negativity of a pure state of n qubits. The two will be used to calculate the negativity of this state, one of which is related to the sum of the principal minors of order 3 of the partial transpose of the matrix density of that state, and the other, depends on the amplitudes of said state. With these expressions it is possible to calculate $\mathcal{N}_{A_k(A_1 \ldots A_{k-2} A_{k-1} \ldots A_n)}$, *where* $1 \leq k \leq n$, *obtaining a generalization of the calculation of negativity for states of two qubits* A *and* B, $\mathcal{N}_{XY}$, *with* $X, Y \in \{A, B\}$. *Considering the above, it was seen that the entanglement is related to the principal minors of the partial transpose of the density matrix of the quantum state in question, but as "separability criteria". What is proposed here is an algebraic expression for the calculation of negativity, that is, to measure entanglement using the principal minors of the partial transpose of this quantum state.*

Keywords: *Principal minors. Hermitian matrices. Negativity. Pure states.*

[1] UECE – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza/CE – Brasil.

1. INTRODUÇÃO

O emaranhamento de estados quânticos é uma importante ferramenta para o processamento e desenvolvimento da informação quântica.

Para entender o comportamento do emaranhamento, inicialmente, é preciso identificar quando um estado quântico composto possui emaranhamento (inseparável) ou não (separável), ou seja, determinar critérios para saber se tal estado quântico é ou não emaranhado. Tendo as condições (critérios) sobre o emaranhamento de um determinado estado quântico, um outro problema surgirá: a necessidade de quantificá-lo, isto é, determinar o quão emaranhado é tal estado e, para isso, são essenciais as medidas de emaranhamento.

Com base na positividade da transposta parcial da matriz densidade do estado quântico, alguns critérios de separabilidade já foram estabelecidos, como por exemplos, o Critério de Peres (PERES, 1996) e o Critério de Horodecki (HORODECKI, 1996).

Com base nos menores principais da matriz densidade, também foram estabelecidos outros critérios de separabilidade. Em (SHCHUKIN, 2005) foram estabelecidas condições formuladas como uma série infinita de desigualdades para o momento do estado em estudo, sendo que a violação de qualquer uma das desigualdades da série, é condição suficiente para o emaranhamento. Já, em (SHCHUKIN, 2006) foram estabelecidas condições necessárias e suficientes para a transposta parcial da matriz densidade, que também resultam numa série de desigualdades para os menores principais em termos do momento do estado dado.

Portanto, a transposta parcial é uma importante função para o teste e qualificação do emaranhamento (MAZIERO, 2016). Além disso, (MAZIERO, 2016) mostra uma relação da positividade da transposta parcial da matriz densidade com aspectos geométricos de estados quânticos.

Vê-se, então, que os trabalhos acima mencionados se preocupam com o aspecto qualitativo e não com o aspecto quantitativo do emaranhamento quântico. O que se pretende aqui, baseado nos menores principais da matriz densidade de um estado quântico, é propor uma medida de emaranhamento para tais estados: a negatividade. A preocupação, portanto, é medir o emaranhamento e não estabelecer critérios de separabilidade, e isso será feito um pouco mais adiante.

Agora, algumas considerações relevantes para o estabelecimento e entendimento dessa forma de medir emaranhamento, serão feitas.

Um estado puro de *n* qubits, é um estado em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^{2^n}$, escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{1} \alpha_{i_1\dots i_n} |i_1\dots i_n\rangle, \tag{1}$$

em que $\alpha_{i_1\dots i_n} \in \mathbb{C}$ e $\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{1} |\alpha_{i_1\dots i_n}|^2 = 1$.

Representando-se esses *n* qubits por $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a matriz densidade do estado (1), $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, é dada por

$$\rho = \sum_{i_1,\ldots,i_n, j_1\ldots j_n=0}^{1} \alpha_{i_1\ldots i_n} \alpha^*_{j_1\ldots j_n} |i_1\ldots i_n\rangle\langle j_1\ldots j_n|, \tag{2}$$

e o traço parcial de ρ em relação a A_k, $1 \le k \le n$, indicado por $\rho_k = Tr_{A_1\ldots A_{k-1}A_{k+1}\ldots A_n}(\rho)$, é dado por

$$\rho_k = \sum_{i_1,\ldots,i_n, j_1\ldots j_n=0}^{1} \alpha_{i_1\ldots i_n} \alpha^*_{j_1\ldots j_n} \langle i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n \,|\, j_1\ldots j_{k-1} j_{k+1}\ldots j_n\rangle |i_k\rangle\langle j_k|, \tag{3}$$

ou seja,

$$\rho_k = \sum_{i_k, j_k=0}^{1} (\rho_k)_{pq} |i_k\rangle\langle j_k|, \tag{4}$$

com $1 \le p, q \le 2$. Dessa forma,

$$\rho_k = \begin{pmatrix} (\rho_k)_{11} & (\rho_k)_{12} \\ (\rho_k)_{21} & (\rho_k)_{22} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

onde

$$(\rho_k)_{pq} = \sum_{\overline{i_1\ldots i_{k-1}\hat{i}_k i_{k+1}\ldots i_n}, \overline{j_1\ldots j_{k-1}\hat{j}_k j_{k+1} j_n}} \alpha_{i_1\ldots i_{k-1} i_k i_{k+1}\ldots i_n} \alpha^*_{j_1\ldots j_{k-1} j_k j_{k+1}\ldots j_n} \langle i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n \,|\, j_1\ldots j_{k-1} j_{k+1}\ldots j_n\rangle, \tag{6}$$

$1 \le p, q \le 2$.

As expressões $\overline{i_1\ldots i_{k-1} i_k i_{k+1}\ldots i_n}$ e $\overline{i_1\ldots \hat{i}_k \ldots i_n}$, que serão utilizadas ao longo deste texto, precisam ter os seus significados esclarecidos. A primeira, em (6), é a representação de um número inteiro positivo na base 2, cujos algarismos são $i_1, \ldots, i_n$, ou seja, $\overline{i_1\ldots i_k \ldots i_n} = i_1 \times 2^{n-1} + \ldots + i_k \times 2^{n-k} + \ldots + i_n \times 2^0$, com $0 \le i_k \le 1$ e $i_1 \ne 0$. Já a segunda, também representa um número inteiro positivo, cujo algarismo i_k foi suprimido em $\overline{i_1\ldots i_{k-1} i_k i_{k+1}\ldots i_n}$, e assim, o número $\overline{i_1\ldots \hat{i}_k \ldots i_n} = \overline{i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n}$ será considerado como uma sequência de $n-1$ (termos) bits. Dessa maneira, as sequências $i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n$ e $j_1\ldots j_{k-1} j_{k+1}\ldots j_n$ possuem $n-1$ bits (o bit de ordem *k* foi suprimido), e assim, $\langle i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n \,|\, j_1\ldots j_{k-1} j_{k+1}\ldots j_n\rangle$ é o produto interno dos estados $|i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n\rangle$ e $|j_1\ldots j_{k-1} j_{k+1}\ldots j_n\rangle$ de $n-1$ qubits. Daí,

$$\langle i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n \,|\, j_1\ldots j_{k-1} j_{k+1}\ldots j_n\rangle = \begin{cases} 1, \text{ se } \overline{i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots j_{k-1} j_{k+1}\ldots j_n} \\ 0, \text{ se } \overline{i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_n} \ne \overline{j_1\ldots j_{k-1} j_{k+1}\ldots j_n} \end{cases}, \tag{7}$$

e assim,

$$\left(\rho_k\right)_{pq} = \sum_{\overline{i_1\ldots i_{k-1}\widehat{i_k}i_{k+1}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots j_{k-1}\widehat{j_k}j_{k+1}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots i_{k-1}i_k i_{k+1}\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots j_{k-1}j_k j_{k+1}\ldots j_n}, \tag{8}$$

com $1 \le p,q \le 2$, e que a soma em (8) possui 2^{n-1} parcelas, pois $\overline{i_1\ldots i_{k-1}\widehat{i_k}i_{k+1}\ldots i_n}$ varia de $\underbrace{\overline{0\ldots0}}_{n-1}$ a $\underbrace{\overline{1\ldots1}}_{n-1}$. Para calcular $\left(\rho_k\right)_{11}$, faz-se $i_k = 0$ e $j_k = 0$, em (3), ou seja, em cada uma das sequências $\overline{i_1\ldots i_{k-1}i_k i_{k+1}\ldots i_n}$ e $\overline{j_1\ldots j_{k-1}j_k j_{k+1}\ldots j_n}$ fixa-se o termo de ordem *k*, como sendo 0, de maneira que $\overline{i_1\ldots i_{k-1}\hat{0}i_{k+1}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots j_{k-1}\hat{0}j_{k+1}\ldots j_n}$. Em seguida, soma-se todos os coeficientes de $|0\rangle\langle 0|$, obtendo-se assim

$$\left(\rho_k\right)_{11} = \sum_{\overline{i_1\ldots i_{k-1}\widehat{i_k}i_{k+1}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots j_{k-1}\widehat{j_k}j_{k+1}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots i_{k-1}0 i_{k+1}\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots j_{k-1}0 j_{k+1}\ldots j_n}. \tag{9}$$

De maneira análoga, obtém-se

$$\left(\rho_k\right)_{12} = \sum_{\overline{i_1\ldots i_{k-1}\widehat{i_k}i_{k+1}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots j_{k-1}\widehat{j_k}j_{k+1}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots i_{k-1}0 i_{k+1}\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots j_{k-1}1 j_{k+1}\ldots j_n}, \tag{10}$$

fazendo-se, em (3), $i_k = 0$ e $j_k = 1$.

$$\left(\rho_k\right)_{21} = \sum_{\overline{i_1\ldots i_{k-1}\widehat{i_k}i_{k+1}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots j_{k-1}\widehat{j_k}j_{k+1}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots i_{k-1}1 i_{k+1}\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots j_{k-1}0 j_{k+1}\ldots j_n}, \tag{11}$$

fazendo-se, em (3), $i_k = 1$ e $j_k = 0$, e

$$\left(\rho_k\right)_{22} = \sum_{\overline{i_1\ldots i_{k-1}\widehat{i_k}i_{k+1}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots j_{k-1}\widehat{j_k}j_{k+1}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots i_{k-1}1 i_{k+1}\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots j_{k-1}1 j_{k+1}\ldots j_n}, \tag{12}$$

fazendo-se, em (3), $i_k = 1$ e $j_k = 1$. Substituindo-se (9) – (12) em (5), obtém-se

$$\rho_k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{\overline{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots\widehat{j_k}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots0\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots0\ldots j_n} & \displaystyle\sum_{\overline{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots\widehat{j_k}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots0\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots1\ldots j_n} \\ \displaystyle\sum_{\overline{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots\widehat{j_k}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots1\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots0\ldots j_n} & \displaystyle\sum_{\overline{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_n} = \overline{j_1\ldots\widehat{j_k}\ldots j_n}} \alpha_{i_1\ldots1\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots1\ldots j_n} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

com $\overline{j_1\ldots j_{k-1}\widehat{j_k}j_{k+1}\ldots j_n} = \overline{j_1\ldots j_{k-1}j_{k+1}\ldots j_n} \ne \overline{0\ldots0}$.

Os quantificadores de emaranhamento ou medidas de emaranhamento para um estado quântico devem ser não negativas, invariantes mediante operações unitárias locais, não crescentes sob LOCC (operações locais e comunicações clássicas) e convexas (PITTENGER and RUBIN, 2001).

Algumas medidas de emaranhamento já foram propostas, inclusive a negatividade, que será vista a seguir.

A negatividade proposta no texto está relacionada com o determinante da matriz em (13) e, também, com a soma dos menores principais de ordem 3 da transposta parcial da matriz densidade ρ, em relação ao qubit de ordem *k*, como será visto a partir da próxima seção.

2. A negatividade de um estado puro de *n* qubits

Nesta seção, será apresentada uma expressão para a negatividade em função das amplitudes do estado (1).

A negatividade é uma medida de emaranhamento proposta por (VIDAL and WERNER, 2002) que, para sistemas bipartes, é dada por

$$\mathcal{N}(\rho)=\frac{\left\|\rho^{T_A}\right\|_1-1}{2}, \qquad (14)$$

e corresponde ao valor absoluto da soma dos autovalores negativos de ρ^{T_A}. Para estados puros bipartes de qubits, tem-se $\mathcal{N}_{AB}=\mathcal{C}_{AB}$ (OU and FAN, 2007), em que $\mathcal{C}_{AB}$ é a concorrência (ou *concurrence*) do estado puro de qubits, *A* e *B* (HILL and WOOTTERS, 1997). E assim, a negatividade para um estado puro de dois qubits, em função de suas amplitudes, é dada pela expressão

$$\mathcal{N}_{AB}^2(\rho)=4\times\left|\alpha_{11}\alpha_{00}-\alpha_{10}\alpha_{01}\right|^2. \qquad (15)$$

No caso de um estado puro de três qubits, *A*, *B* e *C*, tem-se $\mathcal{N}_{A(BC)}=\mathcal{C}_{A(BC)}$ (OU and FAN, 2007). Para um estudo mais detalhado sobre essas e outras medidas de entrelaçamento, o leitor deverá consultar (COFFMAN; KUNDU and WOOTTERS, 2000), (HORODECKI, 2001), (WOOTTERS, 1998), (VEDRAL; PLENIO; RIPPING and KNIGHT, 1997) e (WOOTTERS, 2001).

Agora, será calculada a negatividade do estado $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$, em (2), indicada por $\mathcal{N}_{A_k(A_1\ldots A_{k-1}A_{k+1}\ldots A_n)}(\rho)$, e dada por

$$\mathcal{N}^2_{A_k(A_1\ldots A_{k-1}A_{k+1}\ldots A_n)}(\rho)=4\det\rho_k. \qquad (16)$$

Inicialmente, usando-se a eq. (13), calcula-se $\det\rho_k$:

$$\begin{aligned}\det\rho_k = &\sum_{\overline{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_n}=\overline{j_1\ldots\widehat{j_k}\ldots j_n}}\alpha_{i_1\ldots0\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots0\ldots j_n}\times\sum_{\overline{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_n}=\overline{j_1\ldots\widehat{j_k}\ldots j_n}}\alpha_{i_1\ldots1\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots1\ldots j_n}\\ &-\sum_{\overline{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_n}=\overline{j_1\ldots\widehat{j_k}\ldots j_n}}\alpha_{i_1\ldots1\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots0\ldots j_n}\times\sum_{\overline{i_1\ldots\widehat{i_k}\ldots i_n}=\overline{j_1\ldots\widehat{j_k}\ldots j_n}}\alpha_{i_1\ldots0\ldots i_n}\alpha^*_{j_1\ldots1\ldots j_n},\end{aligned} \qquad (17)$$

com $\overline{j_1 \ldots j_{k-1}\,\widehat{j_k}\,j_{k+1} \ldots j_n} = \overline{j_1 \ldots j_{k-1} j_{k+1} \ldots j_n} \neq \overline{0 \ldots 0}$. Daí,

$$\det \rho_k = \sum_{\overline{l_1 \ldots \widehat{l_k} \ldots l_n}, \overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'}} \left(\alpha_{l_1 \ldots 0 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 1 \ldots l_n'} - \alpha_{l_1 \ldots 1 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 0 \ldots l_n'} \right) \alpha^*_{l_1 \ldots 0 \ldots l_n} \alpha^*_{l_1' \ldots 1 \ldots l_n'}, \tag{18}$$

com $\overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'} \neq \overline{0 \ldots \hat{0} \ldots 0}$. Se $\overline{l_1 \ldots \widehat{l_k} \ldots l_n} = \overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'}$, então $\det \rho_k = 0$ e, neste caso, $\mathcal{N}_{A_k(A_1 \ldots A_{k-1} A_{k+1} \ldots A_n)}(\rho) = 0$. Já foi visto acima, que o número de sequências em que $\overline{l_1 \ldots \widehat{l_k} \ldots l_n} = \overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'}$ é igual a 2^{n-1}. Suponha, agora, que $\overline{l_1 \ldots \widehat{l_k} \ldots l_n} \neq \overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'}$; neste caso, tem-se que $2^{n-2} \times \left(2^{n-1} - 1\right)$ é o número de parcelas em (18). Assim,

$$\begin{aligned} \det \rho_k = & \sum_{l_1 \leq l_1', \ldots, l_n \leq l_n'} \left(\alpha_{l_1 \ldots 0 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 1 \ldots l_n'} - \alpha_{l_1 \ldots 1 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 0 \ldots l_n'} \right) \alpha^*_{l_1 \ldots 0 \ldots l_n} \alpha^*_{l_1' \ldots 1 \ldots l_n'} + \\ & + \sum_{l_1' \leq l_1, \ldots, l_n' \leq l_n} \left(\alpha_{l_1 \ldots 0 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 1 \ldots l_n'} - \alpha_{l_1 \ldots 1 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 0 \ldots l_n'} \right) \alpha^*_{l_1 \ldots 0 \ldots l_n} \alpha^*_{l_1' \ldots 1 \ldots l_n'} \end{aligned}, \tag{19}$$

ou seja,

$$\det \rho_k = \sum_{\overline{l_1 \ldots \widehat{l_k} \ldots l_n} \neq \overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'}} \left| \alpha_{l_1 \ldots 0 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 1 \ldots l_n'} - \alpha_{l_1 \ldots 1 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 0 \ldots l_n'} \right|^2, \tag{20}$$

com $\overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'} \neq \overline{0 \ldots \hat{0} \ldots 0}$, e assim, $\det \rho_k > 0$, isto é, $\mathcal{N}_{A_k(A_1 \ldots A_{k-1} A_{k+1} \ldots A_n)}(\rho) > 0$. Segue de (16), que

$$\mathcal{N}^2_{A_k(A_1 \ldots A_{k-1} A_{k+1} \ldots A_n)}(\rho) = 4 \times \left(\sum_{\overline{l_1 \ldots \widehat{l_k} \ldots l_n}, \overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'}} \left| \alpha_{l_1 \ldots 0 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 1 \ldots l_n'} - \alpha_{l_1 \ldots 1 \ldots l_n} \alpha_{l_1' \ldots 0 \ldots l_n'} \right|^2 \right), \tag{21}$$

onde $\overline{l_1' \ldots \widehat{l_k'} \ldots l_n'} \neq \overline{0 \ldots \hat{0} \ldots 0}$.

Usando a eq. (21) para calcular $\mathcal{N}_{A_1(A_2 A_3 \ldots A_k \ldots A_n)}(\rho)$, por exemplo, tem-se

$$\mathcal{N}^2_{A_1(A_2 A_3 \ldots A_k \ldots A_n)}(\rho) = 4 \times \left(\sum_{\overline{l_2 \ldots l_k \ldots l_n} \neq \overline{l_2' \ldots l_k' \ldots l_n'}} \left| \alpha_{0 l_2 \ldots l_k \ldots l_n} \alpha_{1 l_2' \ldots l_k' \ldots l_n'} - \alpha_{1 l_2 \ldots l_k \ldots l_n} \alpha_{0 l_2' \ldots l_k' \ldots l_n'} \right|^2 \right) \tag{22}$$

e $\mathcal{N}^2_{A_1(A_2 A_3 \ldots A_k \ldots A_n)}(\rho) = 0$, quando $\overline{l_2 \ldots l_k \ldots l_n} = \overline{l_2' \ldots l_k' \ldots l_n'}$.

Suponha que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ é a matriz densidade de um estado de 2 qubits, ou seja, $|\psi\rangle$ é um estado em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$, dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^{1} \alpha_{ij} |ij\rangle, \tag{23}$$

com $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ e $\sum_{i,j=0}^{1} |\alpha_{ij}|^2 = 1$. Considerando-se a eq. (21), com $n=2$, tem-se que $\det \rho_k = \sum_{j \neq j'} |\alpha_{0j}\alpha_{1j'} - \alpha_{1j}\alpha_{0j'}|^2$, ou seja, $\det \rho_k = |\alpha_{0j}\alpha_{1j'} - \alpha_{1j}\alpha_{0j'}|^2$. Isto significa que $\det \rho_1 = \det \rho_2$, e assim, verifica-se (15).

Considere agora, $|\psi\rangle$ um estado puro em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^8$, ou seja,

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k=0}^{1} \alpha_{ijk} |ijk\rangle, \tag{24}$$

com $\alpha_{ijk} \in \mathbb{C}$ e $\sum_{i,j=0}^{1} |\alpha_{ijk}|^2 = 1$. Fazendo $n=3$ na eq. (21), tem-se

$$\mathcal{N}^2_{A(BC)}(\rho) = 4 \times \left(\sum_{jk \neq j'k'} |\alpha_{0jk}\alpha_{1j'k'} - \alpha_{1jk}\alpha_{0j'k'}|^2 \right), \tag{25}$$

$$\mathcal{N}^2_{B(AC)}(\rho) = 4 \times \left(\sum_{ik \neq i'k'} |\alpha_{i0k}\alpha_{i'1k'} - \alpha_{i1k}\alpha_{i'0k'}|^2 \right), \tag{26}$$

$$\mathcal{N}^2_{B(AC)}(\rho) = 4 \times \left(\sum_{ik \neq i'k'} |\alpha_{i0k}\alpha_{i'1k'} - \alpha_{i1k}\alpha_{i'0k'}|^2 \right). \tag{27}$$

Se $\overline{\hat{i}jk} = \overline{\hat{i'}j'k'}$, $\overline{i\hat{j}k} = \overline{i'\hat{j'}k'}$ e $\overline{ij\hat{k}} = \overline{i'j'\hat{k'}}$, $\mathcal{N}^2_{A(BC)}(\rho) = \mathcal{N}^2_{B(AC)}(\rho) = \mathcal{N}^2_{C(AB)}(\rho) = 0$, de acordo com os resultados obtidos em (OLIVEIRA, 2012).

A expressão para o cálculo de $\mathcal{N}_{A_k(A_1 \dots A_{k-1}A_{k+1} \dots A_n)}(\rho)$, em (21), tem os índices das amplitudes do estado na base 2. Essa mesma expressão será obtida agora de outra maneira, reescrevendo a eq. (1) com os índices em $\alpha_{i_1 \dots i_n}$, na base 10, isto é, $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle$, com $\alpha_i \in \mathbb{C}$ e $\sum_{i=0}^{2^n-1} |\alpha_i|^2 = 1$. Logo,

$$\rho = \sum_{i,j=0}^{2^n-1} \alpha_i \alpha_j^* |i\rangle\langle j|. \tag{28}$$

Mostra-se, então, que

$$\mathcal{N}^2_{A_k(A_1\ldots A_{k-1}A_{k+1}\ldots A_n)}(\rho)=4\times\left(\sum_{0\le\xi,\xi'\le 2^{k-1}-1}\left(\sum_{0\le i,j\le 2^{n-k}-1}\left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}-\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{j+2\xi' 2^{n-k}}\right|^2\right)\right). \quad (29)$$

De fato, o estado $|\psi\rangle=\sum_{i=0}^{2^n-1}\alpha_i|i\rangle$ pode ser escrito como

$$|\psi\rangle=\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\sum_{\xi=0}^{2^k-1}\alpha_{i+\xi 2^{n-k}}\left|i+\xi 2^{n-k}\right\rangle. \quad (30)$$

Como já foi visto em (5), cada $(\rho_k)_{pq}$, com $1\le p,q\le 2$, possui 2^{n-1} parcelas do tipo $\alpha_i\alpha_j^*$, sendo que cada uma delas é coeficiente de $|i\rangle\langle j|$, $i,j\in\{0,1\}$. Se $i=j$, então os índices em $\alpha_i\alpha_j^*$ são iguais, e se $i\neq j$, então os coeficientes de $|i\rangle\langle j|$ são da forma $\alpha_i\alpha_j^*$; e $\alpha_j\alpha_i^*$, quando $|j\rangle\langle i|$. De (3), segue que

$$|i_k\rangle\langle j_k|=Tr_{A_1\ldots A_{k-1}A_{k+1}\ldots A_n}\left(|i_1\ldots i_{k-1}i_k i_{k+1}\ldots i_n\rangle\langle j_1\ldots j_{k-1}j_k j_{k+1}\ldots j_n|\right), \quad (31)$$

com $\overline{i_1\ldots i_{k-1}\widehat{i_k}i_{k+1}\ldots i_n}=\overline{j_1\ldots j_{k-1}\widehat{j_k}j_{k+1}\ldots j_n}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\rho_k = &\underbrace{\begin{bmatrix}\left(\alpha_0\alpha_0^*+\ldots+\alpha_{2^{n-k}-1}\alpha^*_{2^{n-k}-1}\right)+\left(\alpha_{2\times 2^{n-k}}\alpha^*_{2\times 2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{3\times 2^{n-k}-1}\alpha^*_{3\times 2^{n-k}-1}\right)+\ldots+\\ +\left(\alpha_{2(2^{k-1}-1)2^{n-k}}\alpha^*_{2(2^{k-1}-1)2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{(2^k-1)2^{n-k}-1}\alpha^*_{(2^k-1)2^{n-k}-1}\right)\end{bmatrix}}_{(\rho_k)_{11}}|0\rangle\langle 0|+\\
&+\underbrace{\begin{bmatrix}\left(\alpha_0\alpha^*_{2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{2^{n-k}-1}\alpha^*_{2\times 2^{n-k}-1}\right)+\left(\alpha_{2\times 2^{n-k}}\alpha^*_{3\times 2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{3\times 2^{n-k}-1}\alpha^*_{4\times 2^{n-k}-1}\right)+\ldots+\\ +\left(\alpha_{2(2^{k-1}-1)2^{n-k}}\alpha^*_{(2^k-1)2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{(2^k-1)2^{n-k}-1}\alpha^*_{2^k 2^{n-k}-1}\right)\end{bmatrix}}_{(\rho_k)_{12}}|0\rangle\langle 1|+\\
&+\underbrace{\begin{bmatrix}\left(\alpha_{2^{n-k}}\alpha_0^*+\ldots+\alpha_{2\times 2^{n-k}-1}\alpha^*_{2^{n-k}-1}\right)+\left(\alpha_{3\times 2^{n-k}}\alpha^*_{2\times 2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{4\times 2^{n-k}-1}\alpha^*_{3\times 2^{n-k}-1}\right)+\ldots+\\ +\left(\alpha_{(2^k-1)2^{n-k}}\alpha^*_{2(2^{k-1}-1)2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{2^k 2^{n-k}-1}\alpha^*_{(2^k-1)2^{n-k}-1}\right)\end{bmatrix}}_{(\rho_k)_{21}}|1\rangle\langle 0|+\\
&+\underbrace{\begin{bmatrix}\left(\alpha_{2^{n-k}}\alpha^*_{2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{2\times 2^{n-k}-1}\alpha^*_{2\times 2^{n-k}-1}\right)+\left(\alpha_{3\times 2^{n-k}}\alpha^*_{3\times 2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{4\times 2^{n-k}-1}\alpha^*_{4\times 2^{n-k}-1}\right)+\ldots+\\ +\left(\alpha_{(2^k-1)2^{n-k}}\alpha^*_{(2^k-1)2^{n-k}}+\ldots+\alpha_{2^k 2^{n-k}-1}\alpha^*_{2^k 2^{n-k}-1}\right)\end{bmatrix}}_{(\rho_k)_{22}}|1\rangle\langle 1|
\end{aligned} \quad (32)$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
(\rho_k)_{11} &= \left(\alpha_0\alpha_0^* + \ldots + \alpha_{2^{n-k}-1}\alpha_{2^{n-k}-1}^*\right) + \left(\alpha_{2\times 2^{n-k}}\alpha_{2\times 2^{n-k}}^* + \ldots + \alpha_{3\times 2^{n-k}-1}\alpha_{3\times 2^{n-k}-1}^*\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\alpha_{2\left(2^{k-1}-1\right)2^{n-k}}\alpha_{2\left(2^{k-1}-1\right)2^{n-k}}^* + \ldots + \alpha_{\left(2^k-1\right)2^{n-k}-1}\alpha_{\left(2^k-1\right)2^{n-k}-1}^*\right) \\
&= \left(\alpha_{0+2\times 0\times 2^{n-k}}\alpha_{0+2\times 0\times 2^{n-k}}^* + \ldots + \alpha_{\left(2^{n-k}-1\right)+2\times 0\times 2^{n-k}}\alpha_{\left(2^{n-k}-1\right)+2\times 0\times 2^{n-k}}^*\right) + \\
&\quad + \left(\alpha_{0+2\times 1\times 2^{n-k}}\alpha_{0+2\times 1\times 2^{n-k}}^* + \ldots + \alpha_{\left(2^{n-k}-1\right)+2\times 1\times 2^{n-k}}\alpha_{\left(2^{n-k}-1\right)+2\times 1\times 2^{n-k}}^*\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\alpha_{0+2\left(2^{k-1}-1\right)2^{n-k}}\alpha_{0+2\left(2^{k-1}-1\right)2^{n-k}}^* + \ldots + \alpha_{\left(2^{n-k}-1\right)+2\left(2^{k-1}-1\right)2^{n-k}}\alpha_{\left(2^{n-k}-1\right)+2\left(2^{k-1}-1\right)2^{n-k}}^*\right) = \\
&= \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}^*
\end{aligned}
,(33)
$$

ou seja,

$$
(\rho_k)_{11} = \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}^* . \tag{34}
$$

De modo análogo, mostra-se que

$$
(\rho_k)_{12} = \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}^* , \tag{35}
$$

$$
(\rho_k)_{21} = \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}^* , \tag{36}
$$

$$
(\rho_k)_{22} = \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}^* . \tag{37}
$$

Agora, mostra-se que

$$
\det\rho_k = \sum_{0\le\xi,\xi'\le 2^{k-1}-1}\left(\sum_{0\le i,j\le 2^{n-k}-1}\left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} - \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{j+2\xi' 2^{n-k}}\right|^2\right). \tag{38}
$$

De (34) – (37), segue que

$$
\rho_k = \begin{pmatrix} \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}^* & \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}^* \\ \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}^* & \sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}^* \end{pmatrix}, \tag{39}
$$

e assim,

$$\det\rho_k=\left(\sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}}\right)\left(\sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\right)-$$
$$-\left(\sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\right)\left(\sum_{\xi=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-k}-1}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}}\right), \quad (40)$$

Depois de alguns cálculos, chega-se à expressão

$$\det\rho_k=\sum_{\xi,\xi'=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{i,j=0}^{2^{n-k}-1}\left(\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}-\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{j+2\xi'2^{n-k}}\right)\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}. \quad (41)$$

Se $\xi=\xi'$ e $i=j$, então $\det\rho_k=0$. Já, nos casos

i) $\xi=\xi'$, $i<j$

ii) $\xi<\xi'$, $i\le j$

iii) $\xi'<\xi$, $i<j$,

tem-se

$$\det\rho_k=\sum_{0\le\xi'\le\xi\le 2^{k-1}-1}\ \sum_{0\le i\le j\le 2^{n-k}-1}\left(\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}-\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{j+2\xi'2^{n-k}}\right)\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}+$$
$$+\sum_{0\le\xi\le\xi'\le 2^{k-1}-1}\ \sum_{0\le j\le i\le 2^{n-k}-1}\left(\alpha_{j+2\xi'2^{n-k}}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}-\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\right)\alpha^*_{j+2\xi'2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}. \quad (42)$$

Portanto,

$$\det\rho_k=\sum_{0\le\xi\le\xi'\le 2^{k-1}-1}\left(\sum_{0\le i\le j\le 2^{n-k}-1}\left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}-\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{j+2\xi'2^{n-k}}\right|^2\right), \quad (43)$$

pois,

$$\left(\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}-\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{j+2\xi'2^{n-k}}\right)\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}+$$
$$+\left(\alpha_{j+2\xi'2^{n-k}}\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}-\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\right)\alpha^*_{j+2\xi'2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}= \quad (44)$$
$$=\left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}-\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{j+2\xi'2^{n-k}}\right|^2.$$

Observe-se que o número de parcelas nulas em (43) é igual a $2^{k-1}2^{n-k}=2^{n-1}$, enquanto o número de parcelas não nulas, é igual a $2^{n-2}\times\left(2^{n-1}-1\right)$, e que ambos independem de *k*. Como $\mathcal{N}^2_{A_k(A_1\ldots A_{k-1}A_{k+1}\ldots A_n)}(\rho)=4\det\rho_k$, de (43) segue (29).

Determinou-se, aqui, uma expressão para a negatividade em termos de ρ_k. A seguir, será obtida outra expressão para a negatividade, porém, em termos da soma dos menores principais de ordem 3 da transposta parcial de ρ.

3. MÍNIMOS PRINCIPAIS DE MATRIZES HERMITIANAS

Pretende-se agora determinar uma relação entre a negatividade de um estado puro de *n* qubits e a soma dos menores principais de ordem 3 da transposta parcial de sua matriz densidade ρ. Denotando-se a transposta parcial de ρ em relação ao qubit A_k por $\rho^{T_{X_k}}$, com $X_k \in \{A_1,...,A_n\}$ e $1 \le k \le n$, e representando-se por $S_3\left(\rho^{T_{X_k}}\right)$ a soma dos mínimos principais de ordem 3 de $\rho^{T_{X_k}}$, esta relação será dada da seguinte maneira

$$\mathcal{N}^2_{A_k(A_1...A_{k-1}A_{k+1}...A_n)}(\rho) = -4S_3\left(\rho^{T_{X_k}}\right). \tag{45}$$

Para verificar (45), inicialmente, mostra-se que $\det \rho_k = -S_3\left(\rho^{T_{X_k}}\right)$.

Para o estado puro de n qubits escrito na forma (30), sua matriz densidade ρ, pode ser escrita como

$$\rho = \sum_{i,j=0}^{2^{n-k}-1} \sum_{\xi,\xi'=0}^{2^k-1} \alpha_{i+\xi 2^{n-k}} \alpha^*_{j+\xi' 2^{n-k}} \left| i+\xi 2^{n-k} \right\rangle \left\langle j+\xi' 2^{n-k} \right|, \tag{46}$$

e a transposta parcial $\rho^{T_{X_k}}$, dada por

$$\rho^{T_{X_k}} = \sum_{i,j=0}^{2^{n-k}-1} \sum_{\xi,\xi'=0}^{2^k-1} \alpha_{i+\xi' 2^{n-k}} \alpha^*_{j+\xi 2^{n-k}} \left| i+\xi' 2^{n-k} \right\rangle \left\langle j+\xi 2^{n-k} \right|. \tag{47}$$

Assim, para $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\rho^{T_{X_k}} - \lambda I = \sum_{i,j=0}^{2^{n-k}-1} \sum_{\xi,\xi'=0}^{2^k-1} \left(\alpha_{i+\xi' 2^{n-k}} \alpha^*_{j+\xi 2^{n-k}} - \lambda \right) \left| i+\xi' 2^{n-k} \right\rangle \left\langle j+\xi 2^{n-k} \right|. \tag{48}$$

O polinômio característico de $\rho^{T_{X_k}}$ é dado por

$$P(\lambda) = \lambda^{2^n} + \alpha_1 \lambda^{2^n-1} + \alpha_2 \lambda^{2^n-2} + ... + \alpha_{2^n-1}\lambda + \alpha_{2^n}, \tag{49}$$

onde $\alpha_i = (-1)^i S_i$, sendo S_i é a soma dos mínimos principais de ordem *i* de $\rho^{T_{X_k}}$ (MEYER, 2000).

Seja $D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}(\lambda)$ o determinante da matriz obtida de $\rho^{T_{X_k}} - \lambda I$, substituindo-se as linhas $p_1, p_2, \ldots, p_{2^n - r}$ por $-e_{p_1}^T, -e_{p_2}^T, \ldots, -e_{p_{2^n - r}}^T$, respectivamente. Daí,

$$D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}(0) = (-1)^{2^n - r} \det\left(\rho_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}^{T_{X_k}}\right), \tag{50}$$

onde $\rho_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}^{T_{X_k}}$ é a matriz obtida de $\rho^{T_{X_k}}$, substituindo-se as linhas $p_1, p_2, \ldots, p_{2^n - r}$ por $e_{p_1}^T, e_{p_2}^T, \ldots, e_{p_{2^n - r}}^T$, respectivamente, e $\det\left(\rho_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}^{T_{X_k}}\right)$ é o menor principal de $\rho^{T_{X_k}}$, de ordem $r \times r$, obtido eliminando-se, em $\rho^{T_{X_k}}$, as $p_1, p_2, \ldots, p_{2^n - r}$ linhas e colunas (MEYER, 2000). De (50), segue que

$$\sum_{p_x \neq p_y} D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}(0) = (-1)^{2^n - r} \sum_{p_x \neq p_y} \det\left(\rho_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}^{T_{X_k}}\right), \tag{51}$$

e assim,

$$S_r = \sum_{p_x \neq p_y} \det\left(\rho_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}^{T_{X_k}}\right) = \frac{1}{(-1)^{2^n - r}} \sum_{p_x \neq p_y} D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - r}}(0). \tag{52}$$

Fazendo $r = 3$ em (52), tem-se

$$S_3\left(\rho^{T_{X_k}}\right) = -\sum_{p_x \neq p_y} D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - 3}}(0). \tag{53}$$

O número total de menores principais de ordem 3, o número de menores principais nulos e o número de menores principais não nulos de $\rho^{T_{X_k}}$, são dados, respectivamente, por

$$\binom{2^n}{3} = \frac{2^n\left(2^n - 1\right)\left(2^{n-1} - 1\right)}{3}, \tag{54}$$

$$2 \times \left(\binom{2^{n-1} - 1}{2} + \binom{2^{n-1} - 2}{2} + \ldots + \binom{2}{2}\right) = 2 \times \binom{2^{n-1}}{3}, \tag{55}$$

$$2^{n-2}\left(2^{n-1} - 1\right). \tag{56}$$

A seguir serão exibidos todos os casos para os quais tem-se $D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - 3}}(0) \neq 0$ e $D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - 3}}(0) = 0$.

I) $D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n-3}}(0) = -\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n-3}}\right) \neq 0$ nos seguintes casos:

Caso 1.

$$\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_I p_J \cdots p_L}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi+1)2^{n-k}} & \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}} & \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha^*_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} \\ \alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi+1)2^{n-k}} & \alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}} & \alpha_{i+2\xi' 2^{n-k}}\alpha^*_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} \\ \alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi+1)2^{n-k}} & \alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi' 2^{n-k}} & \alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha^*_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} \end{vmatrix},$$

com $0 \leq i < j < l \leq 2^{n-k} - 1$ e $0 \leq \xi, \xi' \leq 2^{k-1} - 1$. Assim,

$$\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_I p_J \cdots p_L}\right) = -\left|\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\right|^2 \left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} - \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi' 2^{n-k}}\right|^2. \quad (57)$$

Caso 2.

$$\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_I \cdots p_J p_L}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}} & \alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{j+2\xi' 2^{n-k}} & \alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}} \\ \alpha_{j+2\xi' 2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}} & \alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha^*_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} & \alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi'+1)2^{n-k}} \\ \alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+2\xi 2^{n-k}} & \alpha_{i+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha^*_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} & \alpha_{i+(2\xi'+1)2^{n-k}}\alpha^*_{i+(2\xi'+1)2^{n-k}} \end{vmatrix}$$

com $0 \leq i < j < l \leq 2^{n-k} - 1$ e $0 \leq \xi, \xi' \leq 2^{k-1} - 1$. Assim,

$$\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_I \cdots p_J p_L}\right) = -\left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\right|^2 \left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} - \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi' 2^{n-k}}\right|^2. \quad (58)$$

II) $D_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n-3}}(0) = -\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n-3}}\right) = 0$, quando

Caso 1. $1 \leq k \leq n-2$

i) $$\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_I p_J \cdots p_L}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_{i+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+\xi 2^{n-k}} & \alpha_{i+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{j+\xi 2^{n-k}} & \alpha_{i+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{l+\xi 2^{n-k}} \\ \alpha_{j+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+\xi 2^{n-k}} & \alpha_{j+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{j+\xi 2^{n-k}} & \alpha_{j+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{l+\xi 2^{n-k}} \\ \alpha_{l+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{i+\xi 2^{n-k}} & \alpha_{l+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{j+\xi 2^{n-k}} & \alpha_{l+\xi 2^{n-k}}\alpha^*_{l+\xi 2^{n-k}} \end{vmatrix},$$

com $0 \leq i < j < l \leq 2^{n-k} - 1$ e $0 \leq \xi \leq 2^k - 1$.

Caso 2. $k = n-1$.

$$\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_I \cdots p_J p_L}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_I \alpha_I^* & \alpha_I \alpha_J^* & \alpha_I \alpha_L^* \\ \alpha_J \alpha_I^* & \alpha_J \alpha_J^* & \alpha_J \alpha_L^* \\ \alpha_L \alpha_I^* & \alpha_L \alpha_J^* & \alpha_L \alpha_L^* \end{vmatrix} = 0$$, nas seguintes situações:

i) Os índices I, J e L satisfazem as seguintes condições:

$$I = i + \xi 2^{n-k}, \; J = j + \xi 2^{n-k}, \; L = l + (\xi + 2) 2^{n-k},$$

com $0 \le l \le 2^{n-k} - 1$, $0 \le i < j \le 2^{n-k} - 1$ e $0 \le \xi \le 2^{k-1} - 1$.

ii) Os índices I, J e L satisfazem as condições:

$$I = i + \xi 2^{n-k}, \; J = j + (\xi + 2) 2^{n-k}, L = l + (\xi + 2) 2^{n-k}$$

com $0 \le i \le 2^{n-k} - 1$, $0 \le j < l \le 2^{n-k} - 1$ e $0 \le \xi \le 2^{k-1} - 1$.

Caso 3. $k = n$

$$\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_I \cdots p_J \cdots p_L}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_I \alpha_I^* & \alpha_I \alpha_J^* & \alpha_I \alpha_L^* \\ \alpha_J \alpha_I^* & \alpha_J \alpha_J^* & \alpha_J \alpha_L^* \\ \alpha_L \alpha_I^* & \alpha_L \alpha_J^* & \alpha_L \alpha_L^* \end{vmatrix} = 0$$, nas seguintes situações:

i) $I = 2\xi$, $J = 2\xi + 2$, $L = 2\xi + 4$;

ii) $I = 2\xi + 1$, $J = 2\xi + 3$, $L = 2\xi + 5$,

com $0 \le \xi \le 2^{n-k} - 2$.

Das situações acima, conclui-se que cada $\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - 3}}\right)$ é da forma

$$\det\left(\rho^{T_{X_k}}_{p_1 p_2 \cdots p_{2^n - 3}}\right) = -\left|\alpha_{i+\xi 2^{n-k}}\right|^2 \left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}} \alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} - \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}} \alpha_{i+2\xi' 2^{n-k}}\right|^2, \tag{59}$$

com $0 \le i < j < l \le 2^{n-k} - 1$ e $0 \le \xi, \xi' \le 2^{k-1} - 1$. Assim, por (53)

$$\begin{aligned} -S_3\left(\rho^{T_{X_k}}\right) = &\left|\alpha_0\right|^2 \left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}} \alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} - \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}} \alpha_{i+2\xi' 2^{n-k}}\right|^2 + \ldots + \\ &+ \left|\alpha_{2^n - 1}\right|^2 \left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}} \alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}} - \alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}} \alpha_{i+2\xi' 2^{n-k}}\right|^2 . \end{aligned} \tag{60}$$

Como $\left|\alpha_0\right|^2+\ldots+\left|\alpha_{2^n-1}\right|^2=1$, tem-se

$$S_3\left(\rho^{T_{X_k}}\right)=-\sum_{0\le i<j<l\le 2^{n-k}-1}\left(\sum_{0\le\xi,\xi'\le 2^{k-1}-1}\left|\alpha_{i+2\xi 2^{n-k}}\alpha_{j+(2\xi'+1)2^{n-k}}-\alpha_{i+(2\xi+1)2^{n-k}}\alpha_{i+2\xi' 2^{n-k}}\right|^2\right)=-\det\rho_k, \quad (61)$$

e assim, verifica-se (45).

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentadas expressões algébricas para o cálculo da negatividade de um estado puro de *n* qubits. Uma delas relaciona a negatividade com as amplitudes desse estado; já a outra, relaciona a negatividade com a soma dos menores principais de ordem 3 da transposta parcial da matriz densidade, em relação ao qubit de ordem *k*. Tais expressões servem para generalizar os resultados obtidos em (WOOTTERS, 1997) e (OLIVEIRA, 2012), para 2 e 3 qubits, respectivamente. Observe-se também que a negatividade proposta é uma medida para cálculo de emaranhamento, e não um critério de separabilidade, usando-se os menores principais da matriz densidade do estado quântico em questão.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHEN, Chi-Tsong. **Linear systems theory and design**. New York: Oxford University Press, 1999.

COFFMAN, Valerie; KUNDU, Joydip and WOOTTERS, William. Distributed entanglement. **Phys. Rev. A**, Netherlands, v. 61, n. 5, p. 052306, mai. 2000.

HILL, Scott and WOOTTERS, William. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. **Phys. Rev. Letters**, United States, v. 78, n. 26, p. 5022-5025, jun. 1997.

HORODECKI, Michal. Entanglement Measures. **Quantum Information Processing**, United States, v. 1, n. 1, p. 3-26, 2001.

HORODECKI, Michal; HORODECKI, Pavel and HORODECKI, Ryszard. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, **Physics Letters A**, Netherlands, v. 223, n. 1, p. 1-8, nov. 1996.

MAZIERO, Jonas. Computing Partial Transposes and Related Entanglement Functions. **Brazilian Journal of Physics**, Brazil, v. 46, n. 6, p. 605-611, dec. 2016.

MEYER, Carl. **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**. Philadelphia: SIAM, 2000.

NIELSEN, Michael e CHUANG, Ivan. **Computação Quântica e Informação Quântica**. Porto Alegre: Bookman, 2005.

OLIVEIRA, João Luzeilton de. **Ferramentas Algébricas para o Estudo do Entrelaçamento Quântico**. Fortaleza, UFC, 2012. Tese, Departamento de Engenharia de Teleinformática, Universidade Federal do Ceará, 2012.

OU, Yong-Chen and FAN, Heng. Monogamy inequality in terms of negativity for three-qubti states. **Phys. Rev. A**, Netherlands, v. 75, n. 6, p. 1-5, jun. 2007.

PERES, Asher. Separability Criterion for Density Matrices. **Phys. Rev. Lett.**, United States, v. 77, n. 8, p. 1413-1415, ago. 1996.

PITTENGER, Arthur and RUBIN, Morton. Convexity and the separability problem of quantum mechanical density matrices. **Linear Algebra and its Applications**, United States, v. 346, n. 1-3, p. 47-71, sep. 2001.

SHCHUKIN, Evegny and VOGEL, Werner. Conditions for Multipartite Continuous – Variable Entanglement. **Phys. Rev. A**, United States, v. 74, n. 3, 030302 (R), sep. 2006.

SHCHUKIN, Evegny and VOGEL, Werner. Inseparability Criteria for Continuous Bipartite Quantum States. **Phys. Rev. Letters**, United States, v. 95, n. 24, 230502, nov. 2005.

VEDRAL, Vlatko; PLENIO, Martin Bodo; RIPPING, Michael and KNIGHT, Peter. Quantifying Entanglement. **Phys. Rev. Letters**, Unites States, v. 78, n. 12, p. 2275-2278, mar. 1997.

VIDAL, Guifre and WERNER, Reinhard. A computable measure of entanglement, **Physical Review A**, Netherlands, v. 65, n. 2, p. 032314, fev. 2002.

WOOTTERS, William. Entanglement of Formation and Concurrence. **Quantum Information and Computation**, United States, v. 1, n.1, p. 27-44, jan. 2001.

WOOTTERS, William. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. **Phys. Rev. Letters**, United States, v. 80, n. 10, p. 2245-2248, mar. 1998.