



CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na escola básica no Brasil com utilização do Geogebraⁱ***Non-Euclidean geometries: an investigation in primary school in Brazil with the use of the Geogebra***José Carlos Pinto Leivas¹; Hiago Portella de Portella²; Helenara Machado de Souza³**RESUMO**

O artigo apresenta um recorte de uma pesquisa orientada pelo primeiro autor, envolvendo dois professores da rede pública de ensino no Brasil, sendo que o segundo autor trabalhou com três estudantes do Ensino Fundamental na aquisição de conhecimentos básicos sobre Geometria Hiperbólica, especificamente utilizando o GeoGebra na construção do modelo de Poincaré. A terceira autora investigou, juntamente com três estudantes do Ensino Médio, conhecimentos sobre Geometria Elíptica, mais designadamente aqui relatando a investigação na relação entre ângulo central e ângulo inscrito na circunferência. O objetivo do projeto foi investigar possibilidades didáticas de introduzir conteúdos dessas geometrias, com o uso de software, na escola básica brasileira. Os resultados da pesquisa mostraram ser possível desenvolver com os dois grupos de estudantes conteúdos que, na maioria das vezes, nem chegam a ser de conhecimento do professor de Matemática em formação.

Palavras-chave: *Geometrias Não-Euclidianas, investigação na escola básica, Plano de Poincaré, ângulo central e inscrito.*

ABSTRACT

The article presents part of a research oriented by the first author, involving two teachers from the public school system in Brazil. The second author worked with three students of the elementary school in the acquisition of basic knowledge about hyperbolic geometry, specifically using the GeoGebra in the construction of the Poincaré model. The third author, she investigated, together with three high school students, knowledge of elliptical geometry, most particularly reporting here the investigation on the relationship between central angle and angle inscribed in circumference. The objective of the project was to investigate educational possibilities to introduce contents of these geometries, with the use of software in the Brazilian Elementary School. The survey results have shown to be possible to develop with the two groups of students contents that, in most cases, do not even be familiarize of the mathematics teacher in formation

Keywords: *Non-Euclidean Geometries, research on the elementary school. Poincaré model, central angle and inscribed.*

¹ Unifra - Centro Universitário Franciscano – Santa Maria/RS - Brasil

² Prefeitura Municipal de Júlio de Castilhos – Júlio de Castilhos/RS – Brasil

³ UERGS - Universidade Estadual do Rio Grande do Sul – Três Passos/RS – Brasil.

1. INTRODUÇÃO

Este artigo aborda um fragmento de uma pesquisa realizada em um projeto de iniciação científica júnior intitulado Tecnologias Computacionais como Ferramentas para Inserir Conhecimentos de Geometrias Não-Euclidianas na Escola Básica. Foi desenvolvido durante um ano, de 2014 a 2015, na cidade de Santa Maria, no Rio Grande do Sul, Brasil. O projeto geral teve por objetivo investigar como as tecnologias computacionais poderiam contribuir para aquisição de conhecimentos de Geometria Hiperbólica e de Geometria Elíptica por estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio, respectivamente. O fragmento, constante do presente artigo, tem o objetivo de indicar possibilidades didáticas para introduzir conteúdos dessas geometrias, com o uso do software GeoGebra, na escola básica brasileira. Serão analisadas atividades realizadas durante o projeto à luz das tecnologias e com base no que indica D'Amore (2007) a respeito do que seja Didática da Matemática.

Foram constituídos dois grupos: o primeiro envolveu estudantes do Ensino Fundamental, foi executado em uma escola pública pelo segundo autor; buscou conhecimentos sobre a criação de uma Geometria Hiperbólica e deu ênfase à construção do Modelo de Poincaré por meio do uso do GeoGebra. O segundo foi desenvolvido com estudantes do Ensino Médio, sob a execução da terceira autora; abordou aspectos da criação da Geometria Elíptica e fez uso das versões 2D e 3D do GeoGebra. Cada grupo, constituído em escolas públicas distintas, foi formado por três alunos. O projeto foi coordenado pelo primeiro autor e com financiamento da FAPERGS, agência de fomento à pesquisa. Portanto, relata-se aqui o que foi realizado no contexto de um projeto de pesquisa do primeiro autor, atuante num programa de formação continuada de professores em nível de mestrado, submetido a um edital público e contemplado com financiamento de órgão público estadual.

O edital público para concessão das bolsas exigia que os professores escolhidos atuassem em escolas públicas do estado. Dessa forma, optou-se pela escolha do segundo autor por atuar em uma escola municipal de Ensino Fundamental, além de estar iniciando o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e poderia elaborar e defender projeto sob a orientação do primeiro autor, o que veio a ocorrer com a produção de uma dissertação (PORTELLA, 2016). A terceira autora foi escolhida por atuar em uma escola estadual de Ensino Médio e por estar desenvolvendo um projeto no mesmo mestrado sobre Geometria do Táxi, também sob a orientação do primeiro autor, concluído (SOUZA, 2015).

Julga-se pertinente a seleção dos dois executores do projeto por duas razões, sendo que a primeira diz respeito a estarem cursando um Mestrado Profissional, uma categoria criada no Brasil para envolver professores que estejam atuando na escola básica. Para Moreira (2009) "este tipo de pós-graduação é uma inovação no Brasil e constitui-se em uma iniciativa para a melhoria do ensino de Ciências e Matemática no país. Poderá também estimular o desenvolvimento de propostas em outros países que apresentem similaridades com a situação educacional brasileira" (p. 1). Para este autor, a população alvo para esses cursos é "prioritariamente constituída de professores em serviço" (p. 2) e este fato foi relevante para a escolha de uma investigação em um projeto voltado para a escola básica com professores que nela atuam e não apenas pensado e planejado na academia.

A segunda razão diz respeito ao fraco desempenho que os alunos apresentam, tanto na escola básica quanto nos cursos de Licenciatura em Matemática, a respeito de Geometria, tanto a Euclidiana quanto as não euclidianas. Isso pode ser uma consequência de falta de planejamento futuro que os alunos

apresentam. A este respeito, Malkevitch (1991, p. 1), ao abordar sobre Geometria no passado, no presente e no futuro, afirma:

a maioria dos principais estudantes de matemática universitários caem em um dos seguintes grupos: estudantes que planejam **ingressar na pós-graduação para começar em um programa de doutoramento** em matemática; alunos que planejam carreiras como **professores da escola básica**; estudantes planejando seguir carreiras relacionadas com a computação; estudantes que planejam carreiras atuariais; estudantes que planejam ingressar em um programa de mestrado "aplicado" (este é geralmente um grau terminal que não resulta em o estudante prosseguir o grau de doutoramento); e "outros" (grifo dos autores)

Assim, o desenvolvimento de um projeto de iniciação científica júnior, envolvendo estudantes da escola básica, pode ser um desencadeador de seus planejamentos futuros e cabe ao professor executá-lo, didaticamente planejado e organizado, a fim de averiguar a aprendizagem do estudante. A respeito da didática envolvida no projeto executado, buscamos em D'Amore (2007) a concepção a ser adotada. Diz o autor que há duas maneiras diferentes de conceber a Didática da Matemática:

A: como divulgação das ideias, fixando a atenção na base do ensino (A de *Ars*, em referência à sua tradução latina);

B: como pesquisa empírica, fixando a atenção nas fases da aprendizagem (algo que mais adiante definirei melhor e que poderíamos chamar: epistemologia da aprendizagem da Matemática). (p. 37)

A investigação proposta e executada no projeto centrou-se no que o autor define como Didática B, uma vez que objetivou a aprendizagem dos seis estudantes envolvidos, nos dois níveis de escolaridade. Por sua vez, não se poderia, neste momento, deixar de considerá-la, também, como Didática A uma vez que este artigo proporciona a divulgação da ideia de envolvimento na pesquisa de ensino e aprendizagem de conhecimentos de Geometrias não euclidianas com o uso do GeoGebra.

Não se pode contestar a importância do papel das ferramentas tecnológicas interativas utilizadas no presente projeto de pesquisa, no caso, um software de Geometria Dinâmica, pois isso "vem mostrando reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes". (GRAVINA e BASSO, 2012, p. 13).

No que segue, discute-se alguns pressupostos teóricos em termos de orientações para o ensino de Geometria no Brasil.

2. SOBRE ORIENTAÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIAS RELACIONADAS AO PROJETO

Em meados do século XIX e início do XX, além da Euclidiana e Analítica, novas geometrias surgiram, dando outras perspectivas de conhecimento para a humanidade e, acredita-se, que esse conhecimento necessita ser incluído na escola básica. Se percebe nas orientações emanadas dos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (BRASIL, 1998) que há necessidade de criação de condições nas escolas para discutir formas de proporcionar a todos o acesso ao conhecimento socialmente

construído e reconhecido, de maneira que os sujeitos possam exercer condignamente a cidadania. Este documento, norteador do Ensino Fundamental brasileiro, orienta que não se deve permanecer estagnado em procedimentos rotineiros, mecânicos e fora da realidade tecnológica atual. Na busca de formas para estimular os estudantes a superar tais procedimentos, o projeto aqui exposto propôs problemas que desafiaram busca de informações, as quais se considera inovadoras.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio PCNEM (BRASIL, 2000) indicam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática deve ser complementado e aprofundado no Ensino Médio. Nesse nível de escolaridade, busca-se envolver alunos, professores e a comunidade num processo cultural, que proporcione uma visão mais ampla e abra novas perspectivas aos estudantes.

No que diz respeito à formação do professor em nível superior, as Diretrizes Curriculares para a Formação de Professores da Educação Básica brasileira (BRASIL, 2002) é o documento norteador e indica que nestes cursos há uma formação insuficiente, corroborando o que indicou Makevitch (1991) para os Estados Unidos da América. Assim, o próprio documento indica que os cursos deverão tomar para si a responsabilidade de suprir as deficiências que os estudantes apresentam em Matemática e, em especial, em Geometria, ao ingressarem na Licenciatura em Matemática. Dessa forma, atividades de pesquisa e de ensino em ação continuada com professores em atuação na escola básica são relevantes, especialmente, em um curso de mestrado profissional.

Acredita-se que utilizar imaginação, intuição e visualização, por meio de softwares que oferecem ferramentas viáveis para os níveis de ensino pretendidos, contribuiu para a formação científica inicial de estudantes, os quais disseminam a metodologia, o interesse e o entusiasmo para novos trabalhos científicos.

A cartografia sempre despertou o interesse do homem, em particular pelas navegações e, dessa forma, projetar o globo terrestre em um plano, ou seja, a obtenção de mapas, é um problema matemático considerável, pois fica a pergunta: como obter curvas cujas projeções no plano determinem caminhos mais curtos, a saber, retas no plano ou geodésicas na superfície?

Estudos que se conhece sobre projeção estereográfica são constituídos de matemática avançada, que exigem um grande conhecimento de várias áreas, cujas representações requerem grandes habilidades até mesmo artísticas. Se desconhece trabalhos científicos e acadêmicos que façam uso de Geometria Dinâmica para as representações das projeções estereográficas e inversão, por exemplo.

Inversão, que é ferramenta disponível no GeoGebra, pode ser facilmente trabalhada de maneira que a imaginação e a intuição dos alunos sejam utilizadas para visualizar como ocorre a ortogonalidade no modelo de Poincaré, quais são as retas e assim por diante, o que foi um dos objetivos alcançados pelo primeiro grupo, dando indícios da existência de uma geometria axiomatizada.

A compreensão do conceito de reta sobre uma superfície esférica fornece outra forma de vislumbrar uma geometria além da Euclidiana, o que é possível e, até certo ponto, de fácil compreensão, com o uso do GeoGebra 3D, o que foi desenvolvido com o segundo projeto.

Na França, o relatório Kahane (2000, s.p.) destaca que [...] "o ensino da geometria permite formar alunos com cabeças bem-feitas, que se tornam cidadãos capazes de refletir e de compreender e que são assim equipados para encarar as dificuldades do mundo que nos cerca", sendo principal meta a

ser alcançada com o projeto. Dessa forma, acredita-se que os dois grupos puderam adquirir conhecimentos preliminares sobre duas geometrias dentre todas as não euclidianas.

A respeito de outros trabalhos de Euclides, Eves (2004) aponta que alguns deles “referem-se à matemática aplicada, sendo que dois deles ainda existem: *Os Fenômenos*, obra que focaliza a geometria esférica necessária para a astronomia de observação [...] (p. 181)”. No que diz respeito à outra geometria, o autor indica que “A criação da geometria de Lobachevsky não só libertou a geometria como também teve um efeito semelhante com a matemática como um todo. A matemática despontou como uma criação arbitrária do espírito humano e não como algo necessariamente ditado a nós pelo mundo em que vivemos” (p. 545)

Com base nesses pressupostos teóricos, no que segue, se dará indicativos da pesquisa realizada com cada um dos grupos, em sua primeira fase, o que pode ser interpretado como um planejamento didático para professores.

3. SOBRE A INVESTIGAÇÃO COM O PRIMEIRO GRUPO

O projeto em apreço forneceu uma bolsa de estudos a três estudantes para cada professor executor do mesmo. Para compor este primeiro grupo, optou-se por selecionar três, os quais, no ano anterior, haviam sido alunos do professor; estivessem nas séries finais do Ensino Fundamental (12-14 anos de idade); que obtiveram um bom rendimento na disciplina de Matemática, além de mostrarem algum interesse por pesquisa. Levou-se em consideração que os conhecimentos geométricos dos estudantes, até então adquiridos, eram insuficientes para uma investigação a respeito de uma geometria considerada de nível elevado. Além disso, um software de Geometria Dinâmica não era do conhecimento dos três alunos.

A partir disso, o professor do grupo disponibilizou um *tablet* para cada um e foi instalado o software GeoGebra. As primeiras atividades, portanto, foram no sentido de explorar as ferramentas do mesmo, simultaneamente com a aquisição ou retomada de conhecimentos de Geometria Euclidiana. Assim, os objetivos iniciais foram: que os participantes buscassem conhecimentos sobre a história da Geometria; apresentassem e reconhecessem as primeiras ferramentas disponíveis no software.

A fim de cumprir com o primeiro deles, o professor propôs uma busca na internet, propondo as seguintes questões:

- 1) O que é Geometria?
- 2) Como surgiu a Geometria?
- 3) Quem foi Euclides e qual o significado de seu trabalho para o estudo de Geometria?
- 4) Qual a diferença entre Geometria euclidiana e Geometria não euclidiana?
- 5) Software GeoGebra: o que é, para que serve este programa?

Posteriormente, os alunos deveriam encaminhar ao professor, por e-mail, as respostas de suas buscas.

Ao término da atividade, o professor fez uma análise do que lhe fora encaminhado e pôde concluir que os alunos adquiriram os conhecimentos esperados pelo professor, especialmente a respeito do surgimento de duas geometrias ditas Não-Euclidianas: a de Lobachevsky-Bolyai, também denominada Hiperbólica, e a de Riemann, chamada Esférica. Além disso, realizaram estudo histórico sobre Euclides e seu papel na construção matemática que perdura até os dias atuais. Verificaram, também, que era possível utilizar o computador para estudar Geometria, o que os entusiasmou, uma vez que as tecnologias despertam o interesse dos estudantes de qualquer nível de escolaridade.

A partir desses conhecimentos prévios, no encontro seguinte, o professor distribuiu os *tablets* e foi instalado o software em cada um deles para os primeiros percursos, os quais foram realizados com uma sequência de atividades didáticas dirigidas especialmente para o objetivo final, que foi o da construção do Modelo de Poincaré.

Poincaré se perguntou qual a geometria seria a verdadeira, pois, de acordo com Eves (2004), [...] “uma vez que toda mensuração envolve suposições físicas e geométricas, pode-se explicar um resultado observado de muitas maneiras diferentes, simplesmente fazendo mudanças compensatórias nas características que assumimos para o espaço e a matéria.” (p. 572). Ele foi um dos que primeiro criou um modelo não euclidiano e, assim, se a escola deseja despertar interesse dos estudantes pela Ciência, trazer considerações básicas e informações de algo não explorado, usualmente, é didaticamente relevante para a formação dos estudantes antes de realizarem suas escolhas universitárias. (MALKEVITCH, 1991).

As atividades envolveram a construção de circunferências com seus elementos, propriedades, tangentes e teoremas relacionados. Para exemplificar, foi proposta a demonstração visual do teorema: “Toda tangente a uma circunferência é uma reta perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência”. Para tal, foi dada a orientação de utilizar o GeoGebra para comprovar a afirmação.

A respeito de demonstrações visuais em Educação Geométrica, Cifuentes (2005, p. 58) afirma que “O visual na matemática não deve ser entendido só em relação à percepção física, senão também a certo tipo de percepção intelectual, ligada fortemente à intuição matemática”. Para ele, a criação das Geometrias Não-Euclidianas promoveu uma ruptura da Geometria com a realidade espacial, o que possibilitou desvincular os aspectos intuitivos dos formais e “com Hilbert, a partir de sua obra Fundamentos da Geometria de 1899, esta tornou-se uma ciência puramente formal ‘eliminando’ todo apelo à intuição”. (IBID., p. 61).

Foi feito um estudo da inversão de pontos em relação à circunferência, fundamental para poder compreender as h-retas, ou seja, as retas no Plano de Poincaré, o qual é constituído da região aberta limitada por uma circunferência. Observa-se o objetivo proposto: construir o ponto de inversão a uma circunferência, por um ponto fora dela. A figura 1 ilustra a construção realizada por um dos estudantes.

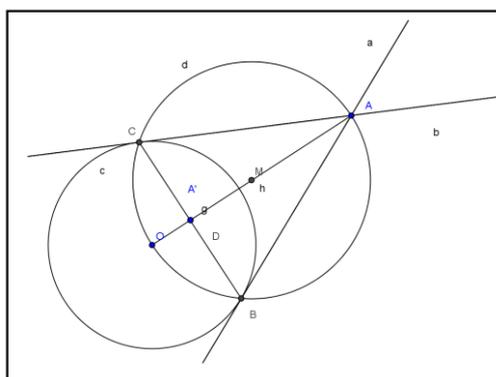


Figura 1. Ponto de inversão em relação a uma circunferência.

Na elaboração do aluno, constante da figura 1, o ponto A, exterior à circunferência c tem o ponto D por inverso. Esta construção foi relevante por ser necessária para a construção das h-retas no modelo, as quais são aqueles arcos de curvas que penetram ortogonalmente na circunferência limítrofe do disco. Os alunos construíram uma nova ferramenta e a incluíram no menu do software, como ilustra a figura 2.

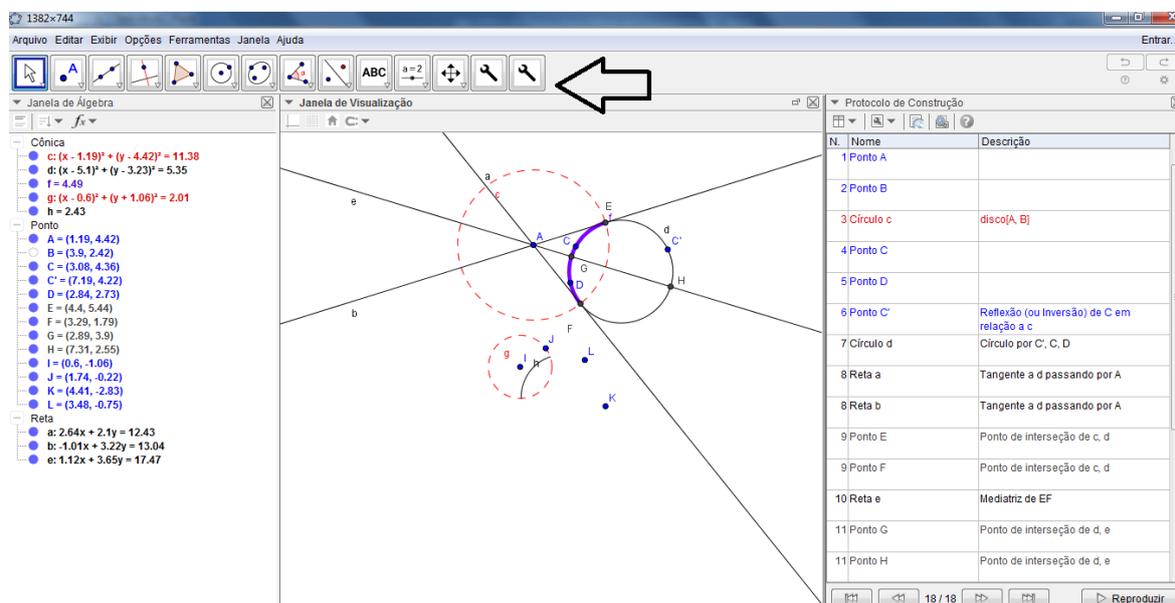


Figura 2. Ferramenta h-reta, elaborada por um dos estudantes.

Os objetivos da investigação, com este grupo de estudantes, foram alcançados no momento em que adquiriram destrezas no uso do software a ponto de criarem novas ferramentas, especialmente a de construção do Disco de Poincaré, um dos modelos teóricos de Geometria Hiperbólica, como pode ser observado na figura 3 por se tratar de um recorte da pesquisa global, a qual faz parte da dissertação de mestrado do segundo autor, na qual os resultados globais não são apresentados neste artigo.

O que se pode indicar do que aqui é apresentado é o fato de que os estudantes conseguiram compreender a existência de uma geometria que não é Euclidiana, ler texto histórico sobre criação de outras geometrias e estabelecer correlações, por exemplo, entre retas da Geometria com as h-retas no modelo de Poincaré. Isso atendeu plenamente ao desejado pelo investigador para este nível de escolaridade até mesmo porque, em muitas licenciaturas em Matemática, tais conhecimentos não são adquiridos pelos futuros professores, como pode ser comprovado na pesquisa de Leivas (2009).

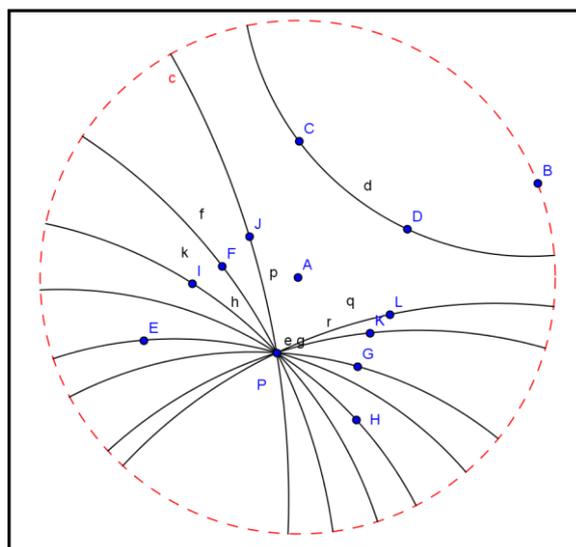


Figura 3. Ferramenta Disco de Poincaré, elaborada por um dos estudantes.

4. SOBRE A INVESTIGAÇÃO COM O SEGUNDO GRUPO

No que diz respeito à escolha das estudantes para compor o segundo grupo, além da disponibilidade de se reunirem com a professora executora, levou-se em consideração o interesse das mesmas em darem continuidade, posteriormente, a estudos universitários, uma vez que estavam a cursar o último ano do Ensino Médio. As atividades realizadas possibilitaram às estudantes elaborarem conjecturas para cada problema proposto pela professora e supervisionado pelo professor pesquisador, coordenador do projeto, e buscaram informações na literatura. A partir disso, verificaram suas hipóteses, com o uso da ferramenta computacional GeoGebra, discutiram entre si em encontros semanais com a presença da professora e elaboraram conclusões.

Para o presente trabalho indica-se a investigação sobre a relação entre o ângulo central em uma circunferência e o ângulo inscrito, tendo sido definido o seguinte objetivo: investigar como as alunas compreendiam a relação existente entre o ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência. Os pressupostos didático-teóricos levantados para esta investigação basearam-se nos níveis de desenvolvimento do raciocínio em Geometria, segundo a teoria de Van Hiele (NASSER, 1992). Essa leva em consideração cinco níveis de desenvolvimento do raciocínio: visualização ou reconhecimento; análise; ordenação ou dedução informal; dedução formal e rigor. Os níveis apresentam cinco fases as quais não necessariamente ocorrem em todos eles: interrogação/informação; orientação dirigida; explicação; orientação livre e integração⁴.

Por partir dos conhecimentos básicos, elementares e visuais, essa teoria se apresenta como um potencial didático relevante para o ensino e a aprendizagem de geometrias em qualquer nível de escolaridade, pois não pressupõe a idade do indivíduo e sim, a maturidade adquirida em um nível que deve servir de trampolim para a passagem ao nível seguinte.

De início, as estudantes foram orientadas por uma sequência de questionamentos pela professora executora, na busca de verificar se as mesmas se encontravam no primeiro nível da teoria.

⁴ Ver OLIVEIRA, M.T.; LEIVAS, J.C.P. (2017); CARGNIN, R.M, GUERRA, S.H.R.; LEIVAS, J.C.P. (2016)

- *O que vocês entendem por ângulo? Descrevam isso na ficha distribuída.*

Como resposta as alunas, aqui denotadas ficticiamente por Andri e Bruna, responderam:

"Tem no triângulo". "É uma pontinha", ao que a terceira aluna, Carol, disse concordar.

Pode-se perceber, pelas respostas fornecidas, que as estudantes se encontravam no primeiro nível uma vez que identificaram o que é ângulo pela aparência visual, ou seja, o nível do reconhecimento ou visualização. Elas apenas visualizaram e reconheceram ângulos a partir do objeto triângulo.

Na procura de avançar a níveis subsequentes, a professora sugeriu que buscassem o conceito de ângulo na internet e, após, veio a discutir com as estudantes que somente reconheceram ângulos planos. Indicou, então, que havia possibilidade de se obter ângulos no espaço e em outras geometrias como, por exemplo, naquela realizada sobre a superfície de uma esfera. Ao compreenderem os termos da definição, representarem geometricamente o objeto ângulo, entendeu-se que as mesmas passaram ao nível da análise pois, pela observação e experimentação, identificaram as características do mesmo.

Para o desenrolar desta etapa, a professora solicitou às estudantes que utilizassem o software para as representações e, na sequência, indicou:

- *Sabendo que um ângulo inscrito numa circunferência é o que tem vértice nela e cujos lados são semirretas, desenha o ângulo BDC no GeoGebra.*

As estudantes discutiram entre si, buscando as ferramentas disponíveis, elaborando, na janela de visualização, o que havia sido solicitado, inclusive sendo proporcionado debate entre elas a respeito das diferenças conceituais entre segmento de reta, reta e semirreta. Na sequência foi solicitado:

- *Sabendo que um ângulo central é o que tem o vértice no centro de uma circunferência e cujos lados contêm raios, desenha o ângulo CÂD (altera a cor das semirretas).*

A professora, atenta, orientava sempre que houvesse discrepância entre as concepções das estudantes e, no momento que percebia haverem chegado ao consenso correto, passava a nova proposição.

- *Mede a amplitude ou medida do ângulo central e do ângulo inscrito.*

Nesta situação, a variação dos valores obtidos por cada uma delas e a dúvida de qual valor deveriam considerar levou a professora a sugerir abrirem uma tabela disponível no software e movimentarem pontos livres para irem registrando. Esta ferramenta se apresenta como um instrumento didático muito relevante para obtenção de resultados, ou seja, uma dedução informal que passe para a formalização nos níveis de Van Hiele (NASSER, 1992).

A figura 4 ilustra o registro realizado por uma das estudantes, inclusive com a elaboração de uma tabela, no próprio software, indicando as medições obtidas a partir da movimentação do ponto C, percebendo a variação dos dois ângulos. A professora executora do projeto neste grupo questionou as estudantes sobre a relação entre as duas medições e as mesmas concluíram que, em muitos casos, eram exatamente iguais e que, em outros, havia uma pequena variação. Foi esclarecido que esta

pequena variação prende-se ao próprio software e que pode ser melhor aproximada quando se programa para um número maior de casas decimais.

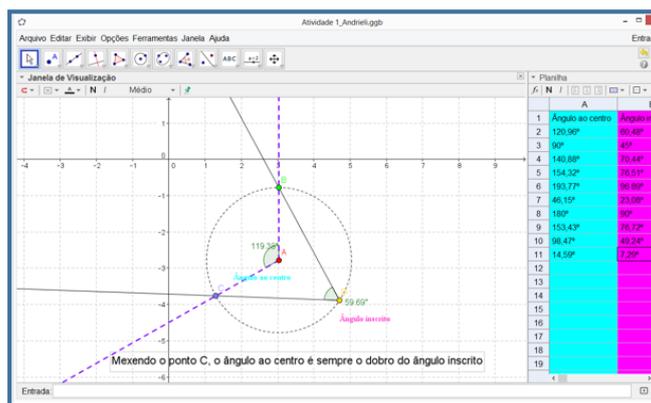


Figura 4. Registro da aluna Andri, sobre as variações dos dois ângulos.

Na figura 5, a aluna Bruna indica o procedimento realizado para a obtenção de sua conclusão de que o ângulo inscrito tem por medida a metade da medida do ângulo central.

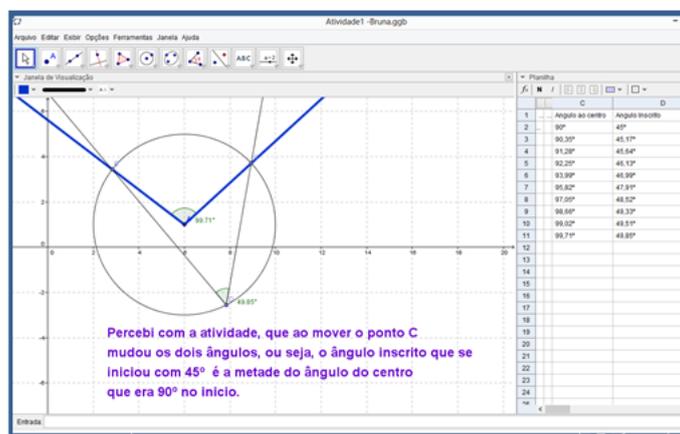


Figura 5. Conclusão da aluna Bruna a respeito da relação entre ângulo inscrito e central.

A relação entre ângulo central e ângulo inscrito é importante na aquisição de habilidades visuais para desenvolvimento de geometria espacial. As estudantes deste grupo, por terem trazido limitações na compreensão de Geometria do Ensino Fundamental, puderam retornar a este conteúdo, refazê-lo, adquirir novos conhecimentos e ampliar para o estabelecimento da mesma relação na esfera.

O estudo de geometria espacial, no Brasil, não é feito naquele nível e pouco se desenvolve no Ensino Médio. A fim de dar continuidade ao estudo de Geometria Esférica se entendeu ser necessária esta retomada. A investigação completa a respeito da relação entre ângulo inscrito e ângulo central foi objeto de divulgação em outro evento (SOUZA e LEIVAS, 2014), inclusive com premiação. Na sequência foi ampliada a atividade na obtenção da relação na superfície esférica e, para tal, foi utilizada a versão 5.0 do software que explora a geometria espacial.

Entende-se que, ao final do projeto, o que aqui foi relatado trouxe contribuições significativas já que as estudantes conseguiram compreender propriedades importantes nesta nova geometria para elas.

5. FINALIZANDO

A investigação realizada mostrou que é possível introduzir conhecimentos de Geometria Hiperbólica e de Geometria Elíptica, na escola básica, fazendo uso das tecnologias computacionais, especificamente, com o GeoGebra. Com estes instrumentos, relatou-se no presente artigo a construção do Plano de Poincaré no Ensino Fundamental com as h-retas e relação entre ângulo central e ângulo inscrito no Ensino Médio. Na sequência do que foi aqui apresentado neste artigo, o projeto permitiu concluir que conhecimentos das duas geometrias, relacionando conceitos, axiomas, teoremas da Geometria Euclidiana com as duas outras, é possível com o uso de um software de Geometria Dinâmica.

Na medida em que os alunos, que participaram do projeto, ao final, conseguiram identificar outras geometrias além da Geometria Euclidiana, que é estudada tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, no Brasil, entende-se que o projeto de iniciação científica cumpriu com o objetivo do edital governamental, ou seja, desenvolver o potencial investigativo júnior em estudantes da escola pública do estado do Rio Grande do Sul e, com isto, atende-se aos seguintes benefícios de um curso de pesquisa recém-constituído, indicado por Malkevitch (1991, p.5): “- para mostrar como a matemática geométrica está afetando a vida moderna; - para incentivar o pensamento visual e o raciocínio; - para saber a distinção entre a matemática da geometria e a geometria do espaço físico; - para mostrar como os computadores e os ambientes de software específicos podem ser uma ajuda para o pensamento geométrico”.

Há de se levar em consideração que a literatura nacional quase não apresenta resultados de investigações com estudantes dos níveis aqui relacionados e, por si, o trabalho apresenta contribuições para investigações futuras, especialmente pela formação continuada que os professores que atuaram no projeto como executores podem dar prosseguimento. Desta forma, a investigação planejada num Mestrado Profissionalizante e executada na escola básica pode constituir-se numa forma didática a ser seguida por outros professores.

Muito embora possa aparentar que o pretendido no projeto seja muito avançado para a Escola Básica, os aspectos intuitivos, imaginativos e visuais, adquiridos com a tecnologia podem trazer inovações e avanços para a compreensão e formação dos indivíduos, como indicado nos PCN, PCNEM e Diretrizes para a formação de professores, sendo papel da escola desenvolver conhecimentos de amplitude mais avançada e que correspondam a uma cultura geral para dar aos estudantes uma visão de mundo.

6. REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 30 jan. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Coordenação Geral de Ensino Médio. Brasília. 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso**

- de licenciatura, de graduação plena.** Brasília, DF, 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf>. Acesso em 08 ago. 2016.
- CARGNIN, R.M.; GUERRA, S.H.R.; LEIVAS, J.C.P. **Teoria de van Hiele e investigação matemática: implicações para o ensino de Geometria.** Revista Práxis, Ano VIII, n. 15, junho de 2016, pp. 105-117.
- CIFUENTES, J. C. **Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático.** Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72. 2005.
- D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física. 2007.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP. 2004.
- GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. de A. **Mídias digitais na Educação Matemática. Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática.** (org.) Maria Alice Gravina...[et al.]. Porto Alegre: Evangraf. pp. 11-37. 2012.
- KAHANE, J. P, (dir.) **Informatique et enseignement des mathématiques**, en ligne <http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportInfoMath/RapportInfoMath.pdf>. Maschietto, M., & Trouche, L. (2010), Mathematics learning and tools from theoretical. 2000.
- LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, Intuição E Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática.** Tese (Doutorado em Educação na UFPR). Curitiba, 2009, 294p.
- MALKEVITCH, J. **Geometry: Yesterday, Today, and Tomorrow.** In: Geometry's Future. Second Edition. USA: COMAP. 1991.
- MOREIRA, M. A. **O Mestrado Profissional na área de Ensino de Ciência e Matemática: alguns esclarecimentos.** R.B.E.C.T, v 2, núm 3, set./dez, 2009, p.1-9. 2009.
- NASSER, L. **Using the Van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil.** Thesis submitted for the PhD degree of the University of London, 1992, 366p.
- OLIVEIRA, M.T.; LEIVAS, J.C.P. **Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele.** Ciência e Natura, v. 39, n.1, 2017, pp. 108-117.
- PORTELLA, H. P. de. **Tecnologias computacionais como ferramentas para inserir conhecimentos de geometria hiperbólica no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional – UNIFRA), 2016, 136p.
- SOUZA, H.M. **A geometria do táxi: investigação sobre o ensino de uma geometria não euclidiana para o terceiro ano do ensino médio.** Dissertação (Mestrado Profissional – UNIFRA), 2015, 140p.
- SOUZA, H.M.; LEIVAS, J.C.P. **Uma investigação sobre ângulos inscrito e central no geogebra com base na teoria de Van Hiele.** Anais... XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

ⁱ Projeto de pesquisa financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul – FAPERGS.