2017 | Volume 14 | Nº 2 | Pág. 225 a 235
DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.14.2017.225-235.457

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Utilização do GeoGebra na resolução de problemas físicos: uma possibilidade para a Modelagem Matemática na Educação Básica

Using GeoGebra to troubleshoot physics: a possibility for Mathematical Modeling in Education Basic

Tiago Vencato Martins[1]; Luiza Rodríguez Doering[2]; Mauro Dinael Beilfuss Bartz[3]

RESUMO

Este artigo discute a abordagem da Lei de Resfriamento de Newton como possibilidade para a Modelagem Matemática na Educação Básica. Propomos que os alunos desenvolvam modelos que não estariam ao seu alcance, em função dos sofisticados conhecimentos matemáticos que exigem, valendo-se de recursos da Modelagem Matemática e auxiliados pelo software GeoGebra. Aliando o uso da tecnologia ao ensino da álgebra, baseando-nos em bibliografias que apoiam esta associação, apresentamos como sugestão uma atividade experimentada no primeiro ano do Ensino Médio onde abordamos o ensino de funções. Nela apontamos que a adoção de uma metodologia apoiada por recursos tecnológicos pode colaborar no desenvolvimento de habilidades inerentes ao pensamento matemático, tais como: estabelecer relações, fazer conjecturas, realizar aproximações, previsões e resolver problemas.

Palavras-chave: *modelagem matemática; funções; GeoGebra.*

ABSTRACT

This article discusses the use of the software GeoGebra as one more resource for the teacher develop works with mathematical modeling in basic education. Its use permits that the pupils make determinated models which they could not do without GeoGebra, because of the sophisticated knowledge required when there's no technological aid. Adding technology to the teaching of algebra (with bibliographic references) we present, as an example of this, a little work done in the basic education. With such experience we would like to show that the adoption of a methodology supported by technological resources has facilitated the development of many inherent abilities to the mathematic thought, such as: doing relations, conjectures, making approaches and previsions. All of this in order of solving mathematic problems.

Keywords: *mathematical modeling; functions; GeoGebra.*

[1] IFSUL – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Sul-rio-grandense, Jaguarão/RS – Brasil.
[2] UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS – Brasil.
[3] IFSUL – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Sul-rio-grandense, Jaguarão/RS – Brasil.

1. INTRODUÇÃO

O conceito de função, um dos mais importantes da matemática e igualmente relevante em outras áreas como a física, já deve começar a ser construído pelo aluno na Educação Básica por uma abordagem qualitativa na relação entre duas grandezas.

De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais:

> “É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc.)”. (BRASIL, 2006, p. 72).

Este texto discute a possibilidade de um trabalho pautado sobre ideias da Modelagem Matemática com a utilização do software GeoGebra como ferramenta facilitadora para que o aluno, ainda na Educação Básica, busque modelar matematicamente fenômenos, o que lhe exige conhecimentos matemáticos mais sofisticados, abrindo um leque de possibilidades muito grande no que diz respeito ao estudo das funções.

Neste trabalho abordamos algumas ideias sobre a Lei de Resfriamento de Newton, sobre Modelagem Matemática, sobre o ensino de funções e apresentando como sugestão certas atividades desenvolvidas pelos alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

2. A LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

Embora o resfriamento de uma xícara de chá ou de café seja uma experiência bastante familiar a todos nós o estudo físico ou matemático este fenômeno requer conhecimentos específicos destas disciplinas. Optamos pelo estudo desse fenômeno físico por que, além do resfriamento ser algo bastante intuitivo, seu estudo não requer uma infraestrutura de laboratórios (apenas uma xícara de café quente e um termômetro de álcool). Outro fato que justifica nossa escolha é o de que a Lei de Resfriamento de Newton conduz a um modelo de função exponencial que é frequentemente abordada nos programas de ensino do primeiro ano do Ensino Médio. Obviamente outros fenômenos físicos podem ser abordados em um trabalho alinhado com a Modelagem Matemática, o que pretendemos aqui é apresentar uma sugestão de uso do software GeoGebra.

Segundo Santos (2010), a lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura T(t) de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo T(t) e a temperatura constante do meio ambiente Tm, ou seja, a temperatura do corpo, T(t) é a solução do um problema de valor inicial conforme a equação 1:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = K\left(T - T_m\right) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Equação 1 - Problema de valor inicial

A solução deste problema de valor inicial é dada por

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

onde T_m e T_0 são, respectivamente, temperaturas ambiente e inicial e k é um parâmetro.

Apresentamos a seguir um problema relacionado.

Uma xícara de café está a uma temperatura de 90C e, um minuto depois passa a 85C, em uma cozinha a 25C. Vamos determinar a temperatura do café em função do tempo e quanto tempo levará para o café atingir 60C.

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = K(T-25) \\ T(0) = 90, T(1) = 85 \end{cases}$$

Dividindo a equação por $(T-25)$, temos:

$$\frac{1}{T-25}T' = K$$

Integrando a equação em relação a t

$$\int \frac{1}{T-25}T'\,dt = \int K\,dt$$

$$\int \frac{1}{T-25}dT = \int K\,dt$$

$$ln|T-25| = Kt - c_1$$

$$T(t) = 25 \pm e^{c1}e^{kt}$$

$$T(t) = 25 + ce^{kt}$$

Substituindo $t = 0$ e $T = 90$

$$90 = 25 + c$$

$$c = 65$$

Substituindo $t = 1$ e $T = 85$

$$85 = 25 + 65e^{K}$$

$$k = \ln\left(\frac{60}{65}\right)$$

A temperatura do café (T) em função do tempo (t)é dada por

$$T(t) = 25 + 65e^{ln\left(\frac{60}{65}\right)t}$$

Substituindo $T = 60$

$$60 = 25 + 65e^{ln\left(\frac{60}{65}\right)t}$$

Então o tempo para que o café atinja 60C

$$t = \frac{ln\left(\frac{35}{65}\right)}{ln\left(\frac{60}{65}\right)} \approx 8 \text{ minutos}$$

3. A MODELAGEM MATEMÁTICA

O homem desenvolve a ciência objetivando entender a natureza. Por meio de construções teóricas busca a compreensão de seus fenômenos e leis. Tornando-se capaz de realizar previsões e construir conceitos que expliquem, da melhor forma possível, os fatos que permeiam o seu mundo. Na busca por este entendimento valeu-se sempre e cada vez mais de poderosa ferramenta capaz de contribuir para a compreensão de fenômenos do mundo real: a Matemática

Nossa capacidade de pensar, questionar, investigar, criar, recriar, criticar a realidade que nos cerca, aliada aos avanços tecnológicos e alicerçada por ferramentas como a Matemática, nos permite estabelecer modelos que expliquem os fatos que nos rodeiam a fim de favorecer a tomada de decisões em todos os âmbitos da atividade humana.

Segundo Bassanezi (2002), quando se procura refletir sobre um setor da realidade, ou agir sobre ela, o processo usual é selecionar argumentos ou parâmetros e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo. O autor chama simplesmente de modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.

Um modelo matemático possui uma linguagem breve, objetiva e permite análises claras, sem ambiguidade.

Algumas definições de Modelagem Matemática segundo os autores que referenciam este texto:

Para Bassanezi:

> "Modelagem Matemática é um processo dinâmico para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual". (BASSANEZI, 2002, p.24).

Para Biembengut e Hein (2007), Modelagem é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Sob certo aspecto este processo tem caráter artístico, pois para elaborar um modelo, além de conhecimentos específicos sobre Matemática, o modelador precisa apresentar certo grau de intuição e criatividade para interpretar fatos da realidade e o contexto que os cercam.

Bassanezi (2002) destaca dois aspectos sobre Modelagem Matemática: constitui um método de pesquisa científica ou uma estratégia para o processo de ensino-aprendizagem.

Biembengut e Hein (2007) destacam que a Modelagem Matemática no ensino constitui um caminho para despertar o interesse dos alunos por tópicos específicos da disciplina ao mesmo tempo em que desenvolve a "arte de modelar", aguçando o seu sentido criativo.

4. O ENSINO DE FUNÇÕES

O conceito de função, muito importante no contexto matemático, deve ser privilegiado com uma abordagem que permita ao aluno mais do que a mera construção de tabelas e gráficos. Segundo as Orientações Curriculares Nacionais (2006), é interessante levar o aluno a constatar relações funcionais que, desde seu manejo inicial, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações.

Camargo e Rocha (2011) relatam em seu artigo referente ao ensino das funções que, para seu melhor entendimento, as noções de função deveriam ser apresentadas como modelos de relações observadas, ou seja, como ferramentas para a descrição e previsão de fenômenos.

Segundo Bueno (2007), o estudo deste tópico no currículo segue uma linha tradicional e direcionada, muitas vezes, pela sequência sugerida pelos livros didáticos com temas geralmente tratados de forma carente de associação e desconexa.

É de fundamental importância que no início do estudo de funções os alunos já tenham contato com suas várias representações (gráfica, algébrica, tabular ou ainda por meio de diagramas). Isto evitaria a dificuldade – segundo Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) – que frequentemente ocorre na passagem de uma forma de representação para outra.

Os autores Markovits, Eylon e Bruckheimer apontam em suas conclusões:

> "Temos evidências de que foi mais fácil para os alunos lidar com funções dadas na forma gráfica do que na forma algébrica. Não é difícil encontrar as razões disso. A representação gráfica é mais visual." (MARKOVITS, EYLON E BRUCKHEIMER, 1995, p.65).

Os autores ainda destacam que em quase todos os currículos a representação algébrica precede a gráfica, dificultando desnecessariamente a apreensão do modelo de mais fácil entendimento. Sugerem a correção deste problema enfatizando o uso preferencial da forma gráfica nos estágios iniciais do desenvolvimento no conceito de funções.

Markovits, Eylon e Bruckheimer incluem em seu estudo problemas com "histórias" e citam como exemplo o seguinte:

> "Numa cultura de bactérias, a população depende da temperatura. Marca-se num sistema de coordenadas o número de bactérias por cm^3 às temperaturas de 10ºC e 20 ºC. Trace o gráfico, que em sua opinião, descreve a relação entre o número de bactérias e a temperatura." (MARKOVITS, EYLON E BRUCKHEIMER, 1995, p.65).

O trabalho com um software como o GeoGebra facilita imensamente esse tipo de trabalho, como já destacou Mcconnell:

> "É de se esperar que o traçado de gráficos se eleve ao primeiro plano do currículo de álgebra graças aos dispositivos dos computadores e das calculadoras para esse fim. A tecnologia permite aos alunos de álgebra responderem a questões significativas sobre funções, como, por exemplo: O que são os zeros de uma função? Quando uma função assume um certo valor? Quando duas funções se interseccionam? Um computador ou uma calculadora que faça gráficos, permite ao aluno responder a essas questões apertando uma tecla. Não há por que protelá-las até o final da high school ou mesmo mais tarde." (MCCONNELL, 1995, p.165).

Reestruturando significativamente o ensino da álgebra no que tange às funções, os alunos serão capazes de responder a questões fundamentais sobre funções, permitindo que façam aproximações, suposições, aliando, para isso, o uso da tecnologia às ideias da Modelagem Matemática.

5. O MODELO ATRAVÉS DO SOFTWARE GEOGEBRA

Contiero e Gravina (2011) já apontam para a utilização do software GeoGebra associado à modelagem geométrica. Eles destacam:

> "Com os recursos tecnológicos disponíveis, diferente poderia ser o processo de aprendizagem da matemática a se instalar nas escolas – tanto na provocação das habilidades cognitivas dos alunos, quanto na integração de conteúdos que normalmente são estudados separadamente e desta forma o contexto da aprendizagem também poderia se aproximar daquele de natureza interdisciplinar." (CONTIERO E GRAVINA, 2011, p.3).

Como utilizar o fenômeno do resfriamento, tão presente no cotidiano, para trabalhar ideias sobre funções? Tendo em vista que o aluno do primeiro ano, obviamente, ainda não tem os conhecimentos necessários para que se faça uma abordagem através de equações diferenciais ordinárias, dos métodos empregados para a modelagem de funções ou ainda, no caso específico, a determinação do parâmetro k, por exemplo.

A ideia desenvolvida junto aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio foi a utilização do software GeoGebra e de seus recursos para que se busque, intuitivamente, um modelo (função) que aproxime os dados do experimento que realizaram.

Cabe salientar que o professor já havia trabalhado previamente com os alunos algumas ideias sobre funções exponenciais, sobre análise qualitativa de gráficos e que não é o objetivo deste texto, de modo geral, fazer a análise dos resultados das atividades desenvolvidas e sim apresentar uma sugestão viável para a busca de modelos matemáticos no ensino médio.

Na primeira etapa os alunos foram informados do fenômeno que observariam (o resfriamento da xícara de café). Pediu-se então que conjecturassem sobre o que aconteceria com a temperatura da bebida ao longo do tempo e que esboçassem, de acordo com suas ideias, um gráfico que representasse a situação.

Na segunda etapa da tarefa os alunos mediram, durante trinta minutos, a temperatura de uma xícara de café, construindo uma tabela onde tomaram nota dos dados a cada dois minutos como ilustra a tabela 1. Além disso, verificaram nos termômetros de álcool a temperatura ambiente no momento do experimento (no caso 13ºC).

Tabela 1 – Relação entre tempo e temperatura

Tempo (minutos)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Temperatura (Celsius)	80	74	71	67	64	61	59	57	54	52	50	48	46	45	43	41

Buscando analisar o experimento realizado os estudantes responderam as seguintes questões:

Você pensa ser possível estabelecer alguma relação entre a temperatura do café e o tempo decorrido desde o início da observação? Justifique.

Em relação à associação entre tempo e temperatura (nos 30 primeiros minutos), comente sobre a possibilidade de associar um mesmo instante a temperaturas diferentes.

Comente a afirmação: "A temperatura do café varia em função do tempo transcorrido".

Estime a que temperatura encontraremos o café depois de três horas decorridas.

Construa um diagrama de flechas associando o tempo às temperaturas nestes 30 minutos.

Na fase seguinte do trabalho os alunos passaram à utilização do software GeoGebra plotando os pares ordenados (tempo, temperatura) conforme a tabela construída e ilustrado na figura 1.

A lei de resfriamento de Newton permite estabelecer uma função que relaciona a temperatura do café ao tempo decorrido. Esta função pode ser descrita por $f(x)= a + (b – a) e^{-kx}$, onde a, b e k representam números reais e representa o número irracional 2,7182... chamado número de Euler.

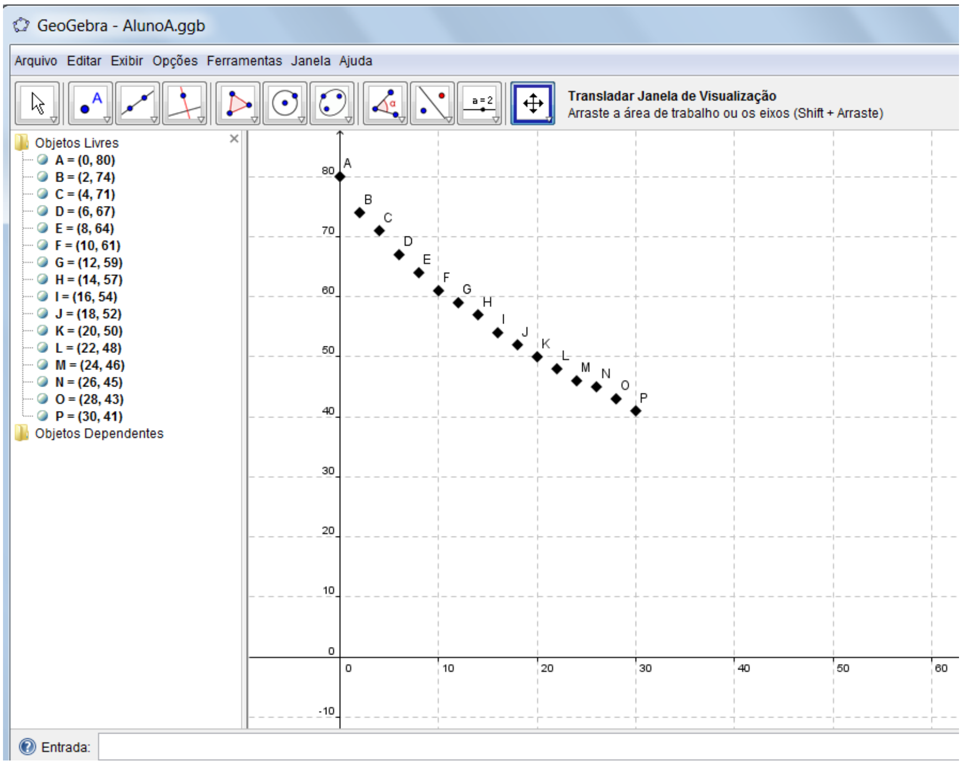

Figura 1 - Plotagem dos pontos no GeoGebra

Com GeoGebra os alunos puderam, intuitivamente, ajustar os valores de a, b e k através do recurso seletor, concluindo que a e b representam respectivamente as temperaturas ambiente e inicial, buscando uma função (Lei de Newton) que aproxima os dados obtidos no experimento.

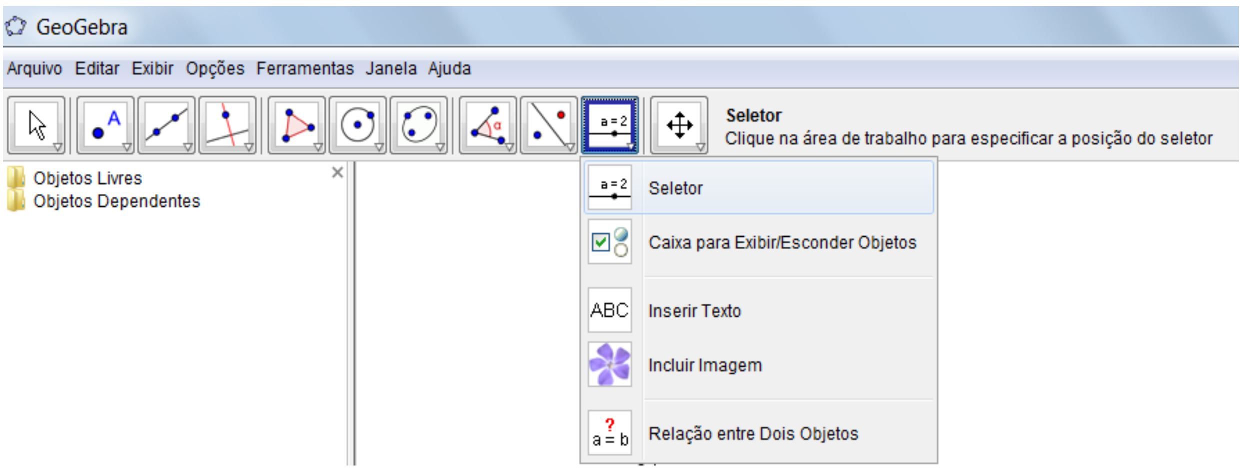

Figura 2 - O recurso Seletor

O recurso seletor do GeoGebra, ilustrado na figura 2 e figura 3, permite a manipulação das constantes. No caso, os valores dos seletores, bem como do incremento de a, b e k foram os apresentados na tabela 2 abaixo:

Parâmetro	Valor mínimo	Valor máximo	Incremento
a	0	20	1
b	0	100	1
k	-0,1	0,1	0,001

Tabela 2 - Valores utilizados para as constantes a, b e k

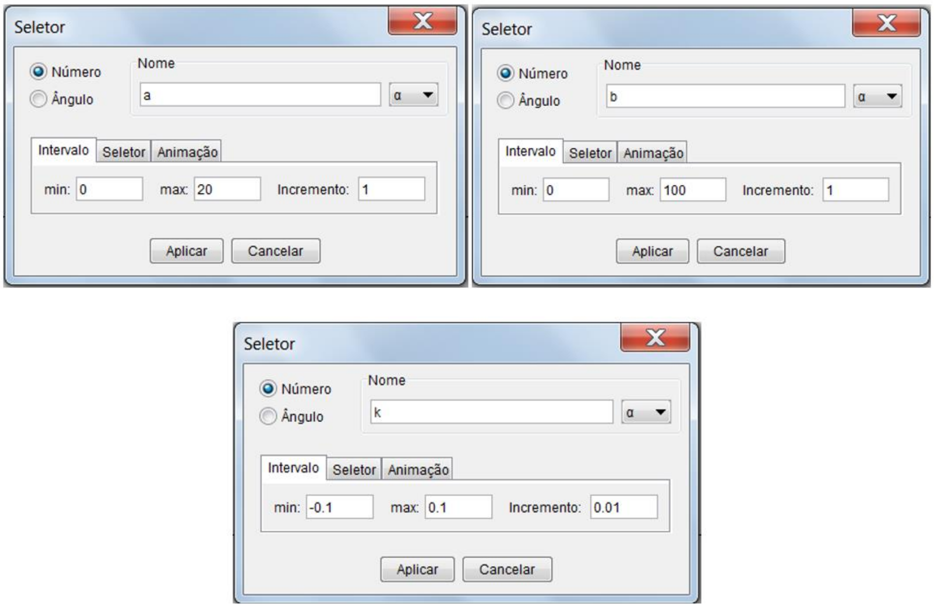

Figura 3 - Janelas do recurso Seletor

Através do comando Função (Função[a + (b – a)exp(-k*x),0,180]), no intervalo de 0 a 180 minutos, os alunos introduziram o modelo f(x)= a + (b – a) e^{-kx}, buscando em seguida o melhor ajuste entre os valores dos seletores a, b e k.

Destacamos que este "melhor ajuste" foi feito experimentalmente através da manipulação dos seletores, de forma puramente intuitiva, já que os conhecimentos matemáticos dos alunos do nível de ensino no qual estas atividades foram aplicadas não permitem o uso de técnicas mais refinadas para tais ajustes.

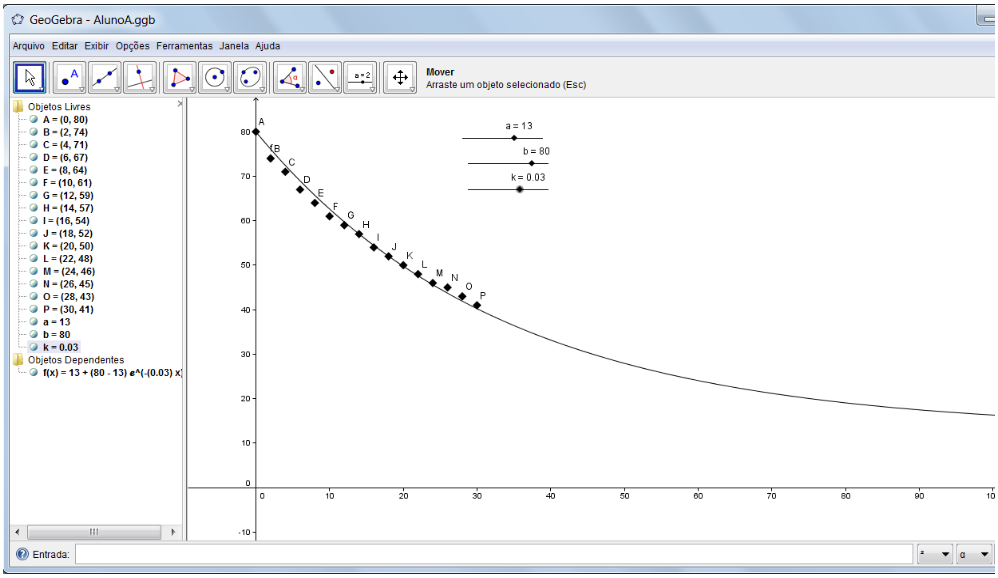

Figura 4 - A função f(x) que modela a temperatura em função do tempo

Graças a função f(x) $=13+67e^{-0,03x}$ (cujo gráfico está ilustrado na figura 4), que aproxima a temperatura do café ao longo do tempo, uma série de questionamentos puderam ser levantados a respeito do fenômeno observado. Para isso os alunos inseriram um ponto Q (móvel) sobre a curva (conforme ilustra a figura 5) e, deslocando-o, puderam responder a questões tais como:

Segundo o modelo encontrado, qual será a temperatura do café aos 90 minutos?

Que tendência na temperatura você observa ao longo do tempo (mova o ponto Q ao longo da curva até 180 minutos)?

Sua previsão de temperatura após 3 horas decorridas confirmou-se de acordo com o modelo?

Insira novos parâmetros c e d e ajuste uma função do tipo y = cx+d aos pontos do gráfico (conforme mostrado na figura 6).

A reta ajusta satisfatoriamente a temperatura ao longo do tempo? Justifique.

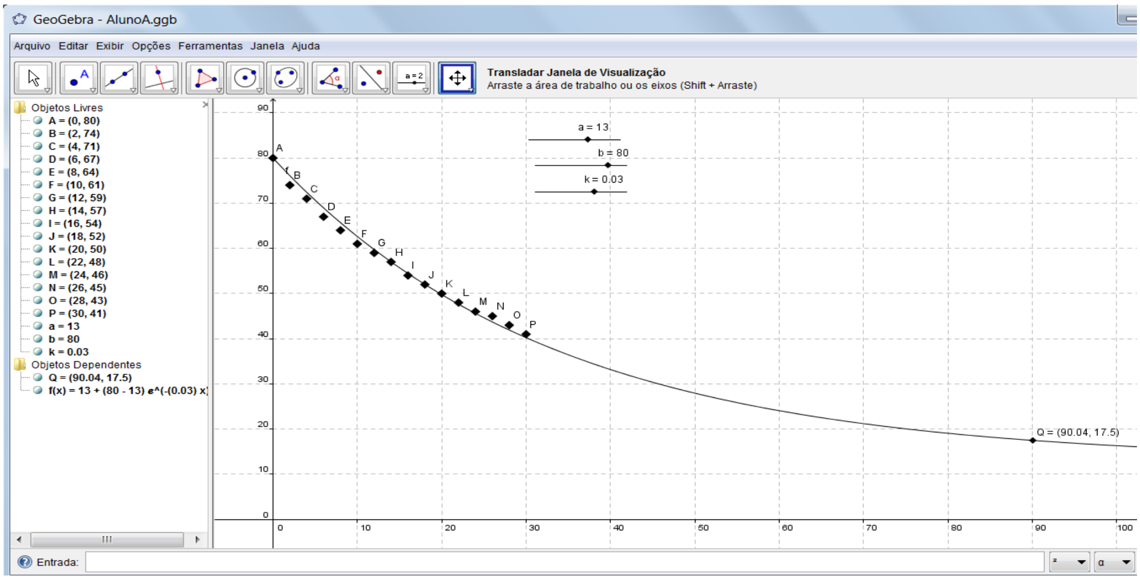

Figura 5 - Ponto Q (móvel), previsão da temperatura aos 90 minutos (17,5C)

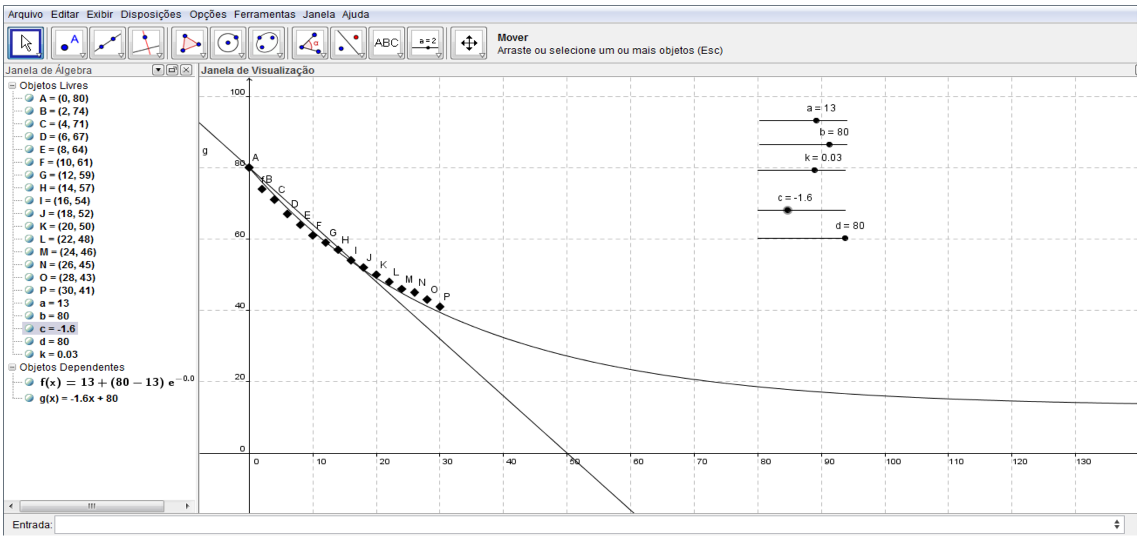

Figura 6 – Ajuste com a reta g(x)=-1,6x+80

A manipulação dos seletores a e b possibilitou ainda que se conjecturasse sobre as consequências decorrentes da variação das temperaturas inicial e ambiente, permitindo que os alunos observassem o que acontece com uma bebida cuja temperatura fosse inferior à temperatura ambiente.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma abordagem que utilize recursos computacionais pode ser encarada como um desafio ao docente, porém somente as possibilidades que se abrem através do uso desses recursos já justificariam sua presença nas salas de aula. Sobre o uso de tecnologias digitais destacamos Borba e Penteado (2001):

> Aspectos como incerteza e imprevisibilidade, geradas num ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para desenvolvimento: desenvolvimento do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem. (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 64).

Recursos computacionais, como o software GeoGebra, fornecem um leque grande de possibilidades ao professor que trabalhe com Modelagem Matemática, seja no trabalho com funções, como tratado aqui neste artigo, seja com modelagem geométrica, como abordam Contiero e Gravina (2011).

As atividades que aqui propomos com o auxílio do software GeoGebra são, de acordo com Spinelli (2005) são um objeto virtual de aprendizagens. Para este autor o objeto virtual de aprendizagem é um recurso digital reutilizável que auxilie na aprendizagem de algum conceito e estimule o desenvolvimento de capacidades pessoais como imaginação e criatividade.

Um objeto virtual de aprendizagem pode tanto contemplar um único conceito quanto englobar todo o corpo de uma teoria. Pode ainda compor uma sequência didática, envolvendo um conjunto de atividades, com foco apenas determinado aspecto do conteúdo envolvido, ou formando, com exclusividade, a metodologia adotada para determinado trabalho.

Há bastante tempo Mcconnell (1995) alertava que o uso da álgebra explorada com recursos computacionais seria dinâmica, direcionada para funções, e enfatizaria a matematização de uma grande variedade de aplicações. Sendo assim os alunos contam com mais instrumentos para abordarem problemas matemáticos.

Apresentamos uma sugestão, que acreditamos ser viável, para que o professor trabalhe de forma mais livre, criativa e interdisciplinar, questões tão importantes como o ensino de funções. Apontamos que a adoção de uma metodologia apoiada por recursos tecnológicos pode colaborar no desenvolvimento de habilidades inerentes ao pensamento matemático.

Segundo Mcconnell (1995), o momento é oportuno para a renovação da parte mais tradicional da matemática: a álgebra. A tecnologia ao nosso dispor coloca-nos o desafio de livrar a matemática da sala de aula da rotina e cada vez mais abordá-la aproximando-a de nossos alunos, realizando o almejado objetivo do ensino: o desenvolvimento da criatividade, da originalidade, da capacidade de julgamento, da profundidade dos insights, da energia para tonada de iniciativas e enfrentamento de desafios.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 4. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

BRASIL, **Secretaria da Educação Básica: Orientação Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, MEC, 2006.

BUENO, M. M. **Matemática e educação sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários**. 2007. 416 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

CAMARGO, D. S.; ROCHA, J. **Ensinando Funções de Primeiro Grau – Experimento, Software Livre e Mídia**. RENOTE. Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 9, p. 01-10, 2011.

CONTIERO, L. O.; GRAVINA, M. A. **Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?** Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 9, p. 01-10, 2011.

MARKOVITS, Z; EYLON, B. S; BRUCKHEIMER, M. **Dificuldade dos alunos com o conceito de função**. IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.; As idéias da álgebra. São Paulo : Atual, p. 49-69, 1995.

McCONNELL, J. Tecnologia e álgebra. IN: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.; **As ideias da álgebra**. São Paulo : Atual, p. 162-1709, 1995.

SANTOS, R. **Introdução às equações diferenciais ordinárias**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da Ufmg, 2010. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi>. Acesso em: 10 mar. 2017.

SPINELLI, Walter. **Aprendizagem Matemática em Contextos Significativos: Objetos Virtuais de Aprendizagem e Percursos Temáticos.** 2005. 1 v. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.