2017 | Volume 14 | Nº 1 | Pág. 112 a 136

DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.14.2017.112-136.425

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

A classe dos polinômios bivariados de fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo

The bivariate fibonacci polynomals´ class (PBF): recent elements on the evolution of a model

Francisco Regis Vieira Alves[1]; Paula Maria Machado Cruz Catarino[2]

RESUMO

Se constata na abordagem, por parte dos autores de livros de História da Matemática – HM, uma apreciação lacônica, lúdica e desprovida de um vigor histórico-matemático que proporcione ao leitor um entendimento do processo evolutivo irrefreável hodierno do modelo de Fibonacci, originariamente correspondente ao processo biológico de produção de pares de coelhos. A partir dessa perspectiva, o trabalho atual discute a classe dos Polinômios Bivariados Complexos de Fibonacci – PBCF. Os mesmos constituem uma representação generalizada da Sequência de Fibonacci, em termos de uma variável real 'x' e a unidade imaginária 'i'. Assim, o texto aborda e pormenoriza determinados resultados matemáticos que envidam uma perspectiva correlata ao processo ininterrupto evolutivo do modelo de Fibonacci, costumeiramente negligenciados por autores de livros.

Palavras Chave: *Sequência de Fibonacci, Sequência Bivariada Polinomial de Fibonacci, História da Matemática.*

ABSTRACT

Abstract. *An approach by the authors of Mathematics History books´ can be constated, that develops an laconic, playful and lackning apreciacion of a historical power unstoppable process today's the Fibonacci model, originally corresponding to the biological process of the pairs rabbits production. From this perspective, the present paper discusses the class of Polynomials Bivariate Fibonacci Complexes - PBCF. The work represents a generalized representation of the Fibonacci sequence, in terms of a real variable x and the imaginary unit 'i'. Thus, the written addresses and details certain results shall make a related perspective to the evolutionary process uninterrupted Fibonacci model, often neglected by the authors´books.*

Key-words: *Fibonacci Sequence, Bivariate Polynomial Fibonacci Sequence, History of Mathematics.*

[1]IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza/SP – Brasil

[2]UTAD - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro/ Vila Real, Portugal.

1. INTRODUÇÃO

De modo praticamente compulsório, no *locus* acadêmico, ao decurso do estudo ou da formação atinente aos conteudos de História da Matemática – HM, o tema denominado Sequência de Fibonacci – SF se evidencia como um exemplo de modelo matemático que, a despeito do seu surgimento, cujo nascedouro se traduz pela intenção "pedagógica" de Leonardo Pisano, em 1202, com a proposição de uma situação problema, de apelo biológico, caracterizado pelo processo de cruzamento de coelhos que se reproduzem *ad eternum* (LÍVIO, 2002; POSAMENTIER & LEHMANN, 2007; SIGLER 2003; VAJDA, 1989).

O que já se transformou num patrimonio coletivo, num ambito de uma investigação histórica, se consubstancia pelo nosso conhecimento da Sequência de Fibonacci - SF que, por intermédio de um aparato notacional moderno, constatamos ser indicada por $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, ou equivalentemente, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ com $n = 0,1,2,3,4,5\ldots$. Em, ainda, alguns dos nossos trabalhos temos assumido um posicionamento crítico, no sentido de compreendermos uma espécie de "hiato histórico" do modelo supracitado que dificulta nosso entendimento sobre o processo contiguo do referido modelo.

E, nesse texto, nosso entendimento do termo "hiato histórico" (ALVES, 2015; 2016a; 2016b; 2016c) diz respeito ao caráter infrutífero e negativista, oriundo do contato dos estudantes com um modelo publicizado no século XIII, conquanto quase nenhum vestígio do processo evolutivo ou seu estádio e interesse atual, por parte de especialistas, se mostra pouco publicizado. Isso posto, no próximo segmento, discutiremos uma classe particular de funções polinomiais, visceralmente vinculada o modelo de Fibonacci, propugnada por alguns matemáticos no século XX. Dessa forma, o caráter que perseguiremos mostrar ao longo do artigo, deve envidar o esforço em apresentar para os estudantes elementos de um modelo matemático de irrefreável vigor evolutivo.

2. A ORIGEM E PROPRIEDADES DOS POLINÔMIOS BIVARIADOS DE FIBONACCI - PBF

Os polinômios de Fibonacci foram estudados (ou definidos) pela primeira vez em 1883, pelo matemático belga Eugene Charles Catalan (1814 – 1894) e pelo matemático alemão Ernest Erich Jacobsthal (1881 – 1965). Catalan introduziu a família de funções polinomiais de Fibonacci através da seguinte definição.

Definição 1: Chamaremos de Sequência Polinomial de Fibonacci – SPF, ao conjunto de funções polinomiais descritos pela relação de recorrência $f_1(x)=1,\ f_2(x)=x,\ f_n(x)=x\cdot f_{n-1}(x)+f_{n-2}(x)$, $n\geq 1$. Ou de modo equivalente $f_{n+1}(x)=x\cdot f_n(x)+f_{n-1}(x)$.

E, de acordo com Asci & Gurel (2012, p. 1), o interesse maior pelo estudo dos polinômios de Lucas, em 1970, ocorreu com os trabalhos de Bicknell (1970). E, para sua formulação, registramos a seguinte relação de recorrência indicada na definição 2.

Definição 2: Chamaremos de Sequência Polinomios de Lucas – SPL, ao conjunto de funções polinomiais descritos pela relação de recorrência $L_0(x)=2, \mathrm{L}_1(x)=x, L_n(x)=x\cdot L_{n-1}(x)+L_{n-2}(x)$.

Doravante, restringir-nos-emos ao caso das funções polinomiais de Fibonacci, porquanto perseguiremos propriedades que carecem de maior publicização no âmbito acadêmico, da classe de Polinômios Bivariados de Fibonacci – PBF.

Sem mais delongas, em Asci & Gurel (2012, p. 2), encontramos a seguinte definição.

Definição 3: Chamaremos de Sequência de Polinômios de Fibonacci – SBPF, ao conjunto sujeito às condições $F_0(x,y)=0, \mathrm{F}_1(x,y)=1, F_{n+1}(x,y)=ix\cdot F_n(x,y)+y\cdot F_{n-1}(x,y), n\geq 1$. Ou, equivalentemente, $F_n(x,y)=ix\cdot F_{n-1}(x,y)+y\cdot F_{n-2}(x,y), n\geq 2$.

Logo abaixo na figura 1, apresentamos uma tabela com alguns de seus termos iniciais da sequência $\{F_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$.

n	$F_n(x,y)$		n	$L_n(x,y)$
0	0		0	2
1	1		1	ix
2	ix		2	$-x^2+2y$
3	$-x^2+y$		3	$-x^3i+3xyi$
4	$-x^3i+2xyi$	and	4	$x^4-4x^2y+2y^2$
5	$x^4-3x^2y+y^2$		5	$x^5i-5x^3yi+5xy^2i$
6	$x^5i-4x^3yi+3y^2xi$		6	$-x^6+6x^4y-9x^2y^2+2y^3$
7	$-x^6+5x^4y-6x^2y^2+y^3$		7	$-x^7i+7x^5yi-14x^3y^2+7xy^3i$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

Figura 1. Asci & Gurel (2012) listam os primeiros termos das sequencias bivariadas polinomiais de Fibonacci e de Lucas

A partir da última definição, empregaremos a noção de função geradora para o caso dos PBF. De fato, vamos considerar a seguinte série formal de potências $g(t):=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x,y)\cdot t^n = F_0(x,y)\cdot t^0+F_1(x,y)\cdot t^1+F_2(x,y)\cdot t^2+\cdots+F_n(x,y)\cdot t^n+\cdots$. Logo em seguida, avaliaremos as seguintes expressões, por intermédio da multiplicação correspondente dos termos $\left(ix\cdot t\cdot g(t)\right)$ e $\left(y\cdot t^2\cdot g(t)\right)$, respectivamente:

$$\begin{cases} g(t):=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x,y)\cdot t^n = F_0(x,y)\cdot t^0+F_1(x,y)\cdot t^1+F_2(x,y)\cdot t^2+\cdots+F_n(x,y)\cdot t^n+\cdots \\ ixt\cdot g(t):=ix\cdot\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x,y)\cdot t^n = ix\cdot F_0(x,y)\mathrm{t}+ix\cdot F_1(x,y)\cdot t^2+\cdots+ix\cdot F_{n-1}(x,y)\cdot t^n+ix\cdot F_n(x,y)\cdot t^{n+1}+\cdots \\ yt^2\cdot g(t):=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x,y)\cdot t^n = yF_0(x,y)\cdot t^2+yF_1(x,y)\cdot t^3+\cdots+yF_{n-2}(x,y)\cdot t^n+yF_{n-1}(x,y)\cdot t^{n+1}+\cdots \end{cases}$$

Com origem nas três expressões acima e, recordando o fato de que $F_{n+1}(x,y)-ix\cdot F_n(x,y)-y\cdot F_{n-1}(x,y)=0$, termos correspondentes (observados as potencias da variável 't'), devem ser eliminados, na medida em que lidamos com o comportamento da seguinte expressão $\left(g(\mathrm{t})-\mathrm{ix}\cdot\mathrm{t}\cdot g(t)-y\cdot t^2\cdot g(t)\right)=F_0(x,y)+tF_1(x,y)+$

$$\cdots + \sum_{n=2}^{\infty}\left(F_{n+1}(x,y) - ix\cdot F_n(x,y) - y\cdot F_{n-2}(x,y)\right)\cdot t^n = F_0(x,y) + tF_1(x,y) + \sum_{n=2}^{\infty}(0)\cdot t^n = 0 + t + 0.$$

$g(\mathrm{t}) = \dfrac{t}{1 - ix\cdot t - y\cdot t^2}$. Ademais, desde que $F_{n+1}(x,y) - ix\cdot F_n(x,y) - y\cdot F_{n-1}(x,y) = 0 \leftrightarrow$ $\dfrac{F_{n+1}(x,y)}{F_n(x,y)} - ix - \dfrac{y}{\left(\dfrac{F_n(x,y)}{F_{n-1}(x,y)}\right)} = 0$ e assumindo que $t_{n+1} := \dfrac{F_{n+1}(x,y)}{F_n(x,y)} \therefore t_{n+1} - ix - \dfrac{y}{t_n} = 0 \leftrightarrow t_{n+1}t_n - ix\cdot t_n - y = 0$.

Assumindo que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}(x,y)}{F_n(x,y)} = t$ deve seguir que $t^2 - ix\cdot t - y = 0$ é o polinômio característico buscado, que corresponde a definição formulada por Asci & Gurel (2012). E, com origem na última expressão, enunciaremos nosso primeiro teorema que, na literatura especializada recebe a denominação de fórmula de Binnet ou fórmula variante de Binnet (KILIC, 2008; MAYNARD, 2008; WITFORD, 1977).

Teorema 1: Para $n \geq 0$, temos que $F_n(x,y) = \dfrac{\left(\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)\right)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$.

Demonstração: No texto acima, necessitamos observar que, com um procedimento *standard* que se repete em casos semelhantes, tomamos a equação $t^2 - ix\cdot t - y = 0$ e, resolvendo tal equação na variável 't', devemos obter suas raízes expressas do seguinte modo: $\Delta = (-ix)^2 - 4y(-1) = -x^2 + 4y$, $\alpha(x,y) = \dfrac{ix + \sqrt{4y - x^2}}{2}$, $\beta(x,y) = \dfrac{ix - \sqrt{4y - x^2}}{2}$, $\alpha(x,y)\cdot\beta(x,y) = -y$.

Ademais, de acordo com os argumentos anteriores, garantimos as seguintes relações $\alpha(x,y)^2 - ix\cdot\alpha(x,y) - y = 0$, $\beta(x,y)^2 - ix\cdot\beta(x,y) - y = 0$. Logo em seguida, vamos recordar a relação fundamental $F_{n+1}(x,y) = ix\cdot F_n(x,y) + y\cdot F_{n-1}(x,y)$.

Assim, pela hipótese indutiva, escrevemos: $F_{n+1}(x,y) = ix\cdot F_n(x,y) + y\cdot F_{n-1}(x,y) =$

$$=ix\frac{(\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y))}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}+y\cdot\frac{(\alpha^{n-1}(x,y)-\beta^{n-1}(x,y))}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}=ix\frac{(\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y))}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}+y\cdot\frac{\left(\frac{\alpha^n(x,y)}{\alpha(x,y)}-\frac{\beta^n(x,y)}{\beta(x,y)}\right)}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}$$

$$=ix\frac{(\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y))}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}+y\cdot\frac{(\alpha^n(x,y)\beta(x,y)-\alpha(x,y)\beta^n(x,y))}{\left(\alpha(x,y)\beta(x,y)\right)\cdot\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}=ix\frac{(\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y))}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}+$$

$$+y\cdot\frac{(\alpha^n(x,y)\beta(x,y)-\alpha(x,y)\beta^n(x,y))}{(-y)\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}=\frac{ix\cdot\alpha^n(x,y)-ix\cdot\beta^n(x,y)-\alpha^n(x,y)\beta(x,y)+\alpha(x,y)\beta^n(x,y)}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}$$

$$=\frac{ix\cdot\alpha(x,y)\cdot\alpha^{n-1}(x,y)-ix\cdot\beta(x,y)\cdot\beta^{n-1}(x,y)-\alpha^n(x,y)\beta(x,y)+\alpha(x,y)\beta^n(x,y)}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}=$$

$$=\frac{\left(\alpha(x,y)^2-y\right)\cdot\alpha^{n-1}(x,y)-\left(\beta(x,y)^2-y\right)\cdot\beta^{n-1}(x,y)-\alpha^n(x,y)\beta(x,y)+\alpha(x,y)\beta^n(x,y)}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}=$$

$$=\frac{\alpha(x,y)^{n+1}-y\cdot\alpha^{n-1}(x,y)-\beta(x,y)^{n+1}+y\cdot\beta^{n-1}(x,y)+y\cdot\alpha^{n-1}(x,y)-y\cdot\beta^{n-1}(x,y)}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}=$$

$=\dfrac{\alpha(x,y)^{n+1}-\beta(x,y)^{n+1}}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}$. Portanto, vemos que $F_{n+1}(x,y)=\dfrac{\alpha(x,y)^{n+1}-\beta(x,y)^{n+1}}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}$, $n\geq 0$.

Segue o resultado. No próximo teorema trazemos uma representação dos elementos da BPF por intermédio de um determinante de uma matriz especial formulada por Asci & Gurel (2012).

Teorema 2: Denotando por $D_n(x,y)_{n\times n}$ a matriz tridiagonal definida na figura abaixo. Nesse caso, ao assumirmos que $D_0(x,y)=0$, então $\det D_n(x,y)_{n\times n}=F_n(x,y), n\geq 0$.

$$D_n(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ix & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -y & ix & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -y & ix \end{bmatrix},\quad n\geq 1$$

Figura 2. Matriz proposta por Asci & Gurel (2012) para a geração dos PBF

Demonstração: Vamos proceder por indução matemática. Nos casos preliminares, vemos (n=1 e n=2) que $\det D_1(x,y)_{1\times 1}=1=F_1(x,y)$ e $\det D_2(x,y)_{2\times 2}=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & ix\end{pmatrix}=ix=F_2(x,y)$. Assumiremos o passo indutivo da seguinte forma $\det D_{n-1}(x,y)_{n-1\times n-1}=F_{n-1}(x,y)$ e $\det D_{n-2}(x,y)_{n-2\times n-2}=F_{n-2}(x,y)$. Segue, pois, que:

$$\det D_n(x,y)_{n\times n}=ix\cdot \det D_{n-1}(x,y)+$$

$$+y\cdot \det D_{n-2}(x,y)\underset{indutivo}{\overset{passo}{=}} ix\cdot F_{n-1}(x,y)+y\cdot F_{n-2}(x,y)=F_n(x,y)\therefore \det D_n(x,y)_{n\times n}=F_n(x,y), n\geq 1$$

Por outro lado, vale assinalar, um comportamento esperado para matrizes particulares indicadas por $D_2(x,y)_{2\times 2}, D_3(x,y)_{3\times 3}, D_4(x,y)_{4\times 4}, D_5(x,y)_{5\times 5}, D_6(x,y)_{6\times 6}, D_7(x,y)_{7\times 7}, D_8(x,y)_{8\times 8}$, ..., etc. Dessa forma, passamos a explorar o *CAS Maple*, a fim de inspecionar o comportamento particular de matrizes de ordem elevada. Sendo assim, podemos determinar, por exemplo, que $\det D_3(x,y)_{3\times 3}=-x^2+y$, $\det D_4(x,y)_{4\times 4}=-x^3 i+2xyi$, $\det D_6(x,y)_{6\times 6}=x^5 i-4x^3 yi+3xy^2 i$ e que podem ser conferidos na tabela da figura 2 proposta pelos autores.

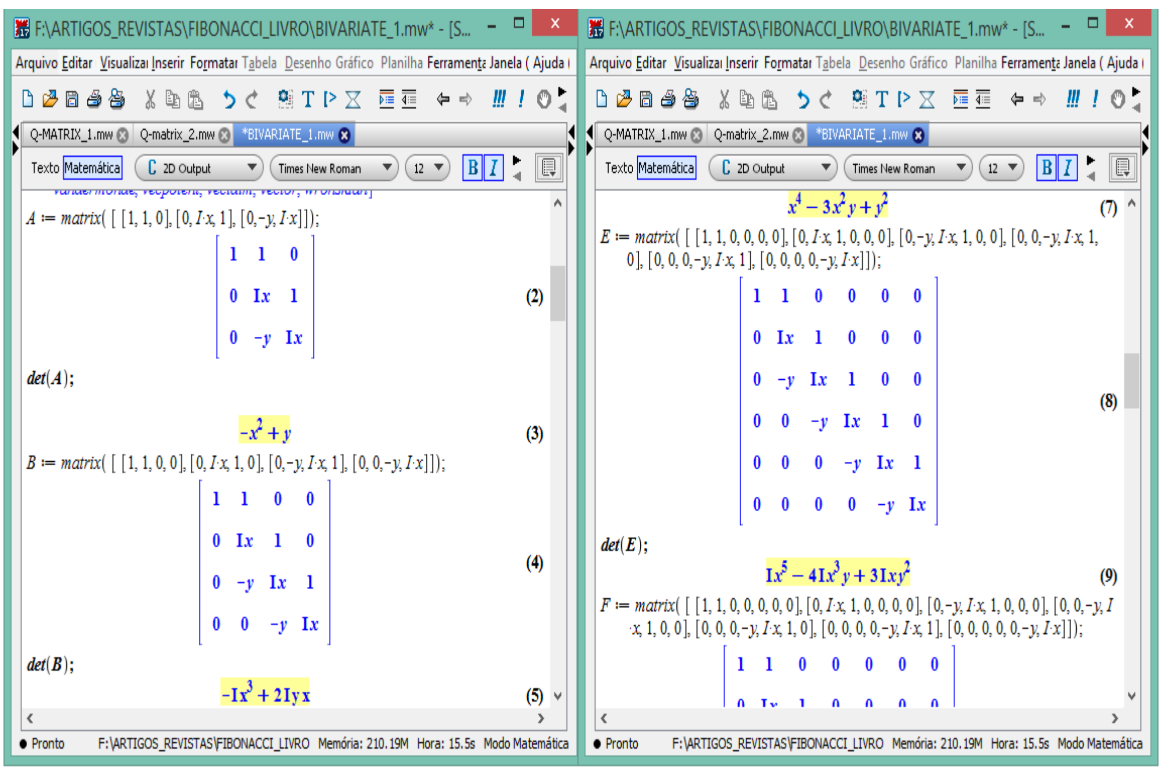

Figura 3. Com recurso ao CAS Maple alguns casos particulares da matriz $D_n(x,y)_{n\times n}$ são avaliados

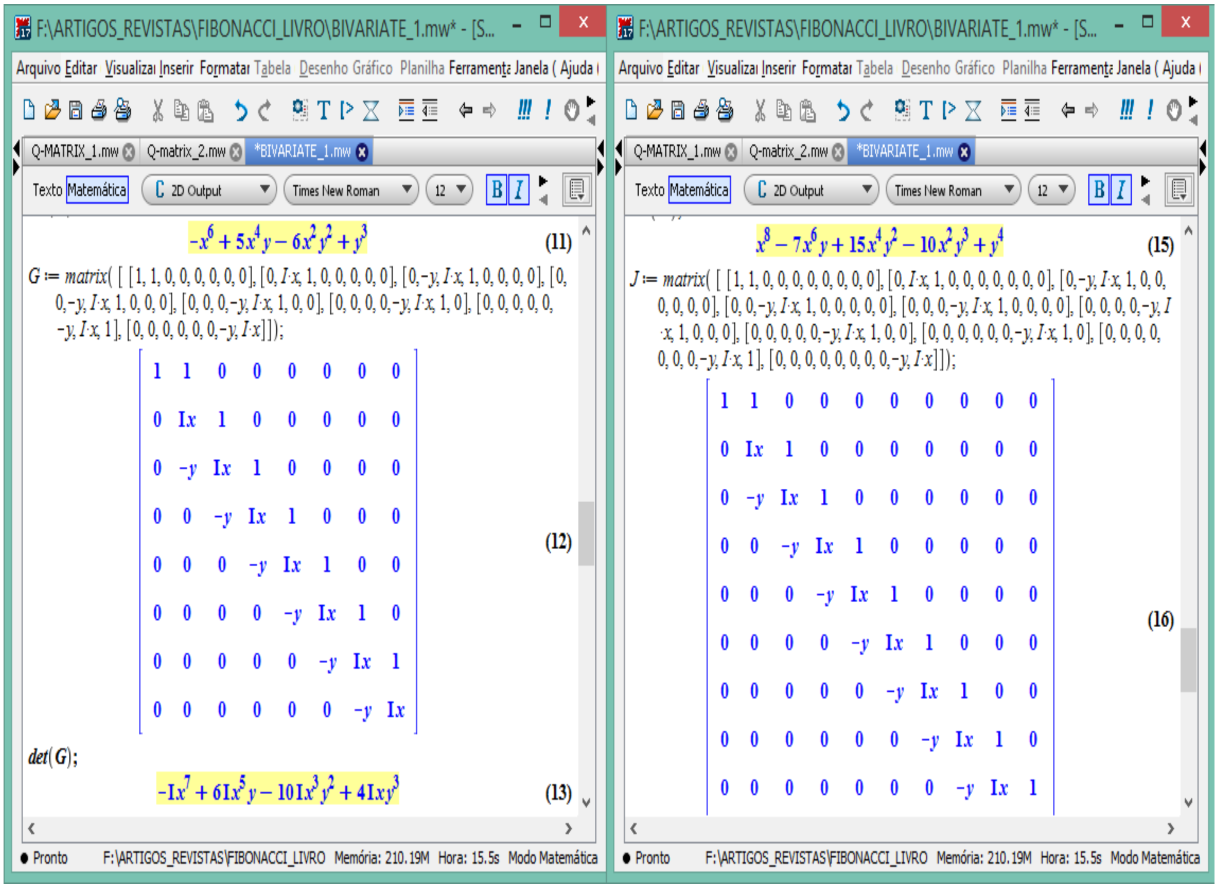

Figura 4. Com recurso ao *CAS Maple* alguns casos particulares da matriz $D_n(x,y)_{n\times n}$ são avaliados

Por outro lado, vejamos outras expressões algébricas que indicaremos por $\det D_8(x,y)_{8\times8} = -x^7 i + 6x^5 yi - 10x^3y^2 i + 4xy^3 i$, $\det D_9(x,y)_{9\times9} = x^8 - 7x^6y + 15x^4y^2 - 10x^2y^3 + y^4$, $\det D_{10}(x,y)_{10\times10} = x^9 i - 8x^7 yi + 21x^5y^2 i - 20x^3y^3 i + 5xy^4 i$, $\det D_{11}(x,y)_{11\times11} = -x^{10} + 9x^8 y - 28x^6y^2 +35x^4y^3 - 15x^2y^4 + y^5$. (ver figuras 3 e 4).

Agora, vamos considerar a seguinte representação matricial $Q(x,y) = \begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. E, logo, em seguida, Asci & Gurel enunciam o seguinte teorema.

Teorema 3: Dado $n \geq 1$, então vale que $Q^n(x,y) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$.

Demonstração: Com efeito, vejamos que $Q(x,y)=\begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_2(x,y) & yF_1(x,y) \\ F_1(x,y) & yF_0(x,y) \end{pmatrix}$ e que $Q^2(x,y)=Q(x,y)Q(x,y)=\begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x^2+y & ixy \\ ix & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_3(x,y) & yF_2(x,y) \\ F_2(x,y) & yF_1(x,y) \end{pmatrix}$.

Ainda, podemos apreciar que: $Q^3(x,y)=Q^2(x,y)Q(x,y)=\begin{pmatrix} -x^2+y & ixy \\ ix & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -ix^3+2ixy & y\cdot(-x^2+y) \\ -x^2+y & y\cdot ix \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_4(x,y) & yF_3(x,y) \\ F_3(x,y) & yF_2(x,y) \end{pmatrix}$. Podemos ainda constatar a seguinte multiplicação matricial $Q^4(x,y)=Q^3(x,y)Q(x,y)=\begin{pmatrix} -ix^3+2ixy & y\cdot(-x^2+y) \\ -x^2+y & y\cdot ix \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} x^4-3x^2y+y^2 & y(-x^3i+2xyi) \\ (-x^3i+2xyi) & y(-x^2+y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_5(x,y) & yF_4(x,y) \\ F_4(x,y) & yF_3(x,y) \end{pmatrix}$. E, num passo posterior, ainda pode ser constatado que $Q^5(x,y)=Q^4(x,y)Q(x,y)=\begin{pmatrix} x^4-3x^2y+y^2 & y(-x^3i+2xyi) \\ (-x^3i+2xyi) & y(-x^2+y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. E, repetindo o laborioso cálculo matricial repetido nas linhas anteriores, devemos determinar que $Q^5(x,y)=\begin{pmatrix} F_6(x,y) & yF_5(x,y) \\ F_5(x,y) & yF_4(x,y) \end{pmatrix}$. Nas figuras 5 e 6, obtemos ordens elevadas para $Q_1{}^n(x,y)$. Por fim, vejamos o comportamento do seguinte produto $Q^{n+1}(x,y)=Q^n(x,y)\cdot Q(x,y)=$

$=\begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ixF_{n+1}(x,y)+yF_n(x,y) & yF_{n+1}(x,y)+0 \\ ixF_n(x,y)+yF_{n-1}(x,y) & yF_n(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{n+2}(x,y) & yF_{n+1}(x,y)+0 \\ F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \end{pmatrix}$. Segue, pois, a propriedade por indução matemática, para todo 'n' natural.

Ademais, podemos observar que s fórmula de Binnet se extende para os índices inteiros, ou seja:

$$F_{-n}(x,y)=\frac{\alpha^{-n}(x,y)-\beta^{-n}(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=\frac{\left(\dfrac{1}{\alpha^n(x,y)}-\dfrac{1}{\beta^n(x,y)}\right)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}=\frac{\left(\dfrac{\beta^n(x,y)-\alpha^n(x,y)}{\left(\alpha(x,y)\beta(x,y)\right)^n}\right)}{\left(\alpha(x,y)-\beta(x,y)\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\beta^n(x,y)-\alpha^n(x,y)}{(-y)^n}\right)}{(\alpha(x,y)-\beta(x,y))} = \frac{1}{(-y)^n}\,\frac{-(\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y))}{(\alpha(x,y)-\beta(x,y))} = \frac{-F_n(x,y)}{(-y)^n}.$$

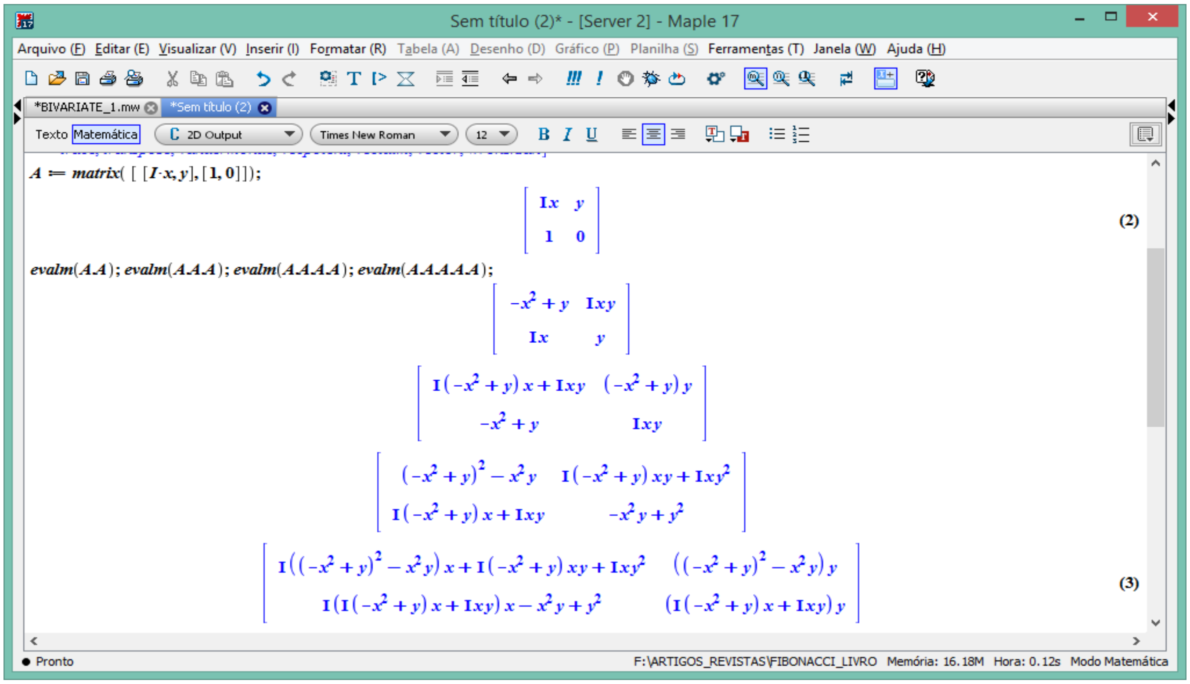

Figura 5. Determinação das potências de matrizes de ordem elevadas com o *CAS Maple* (elaboração do autor)

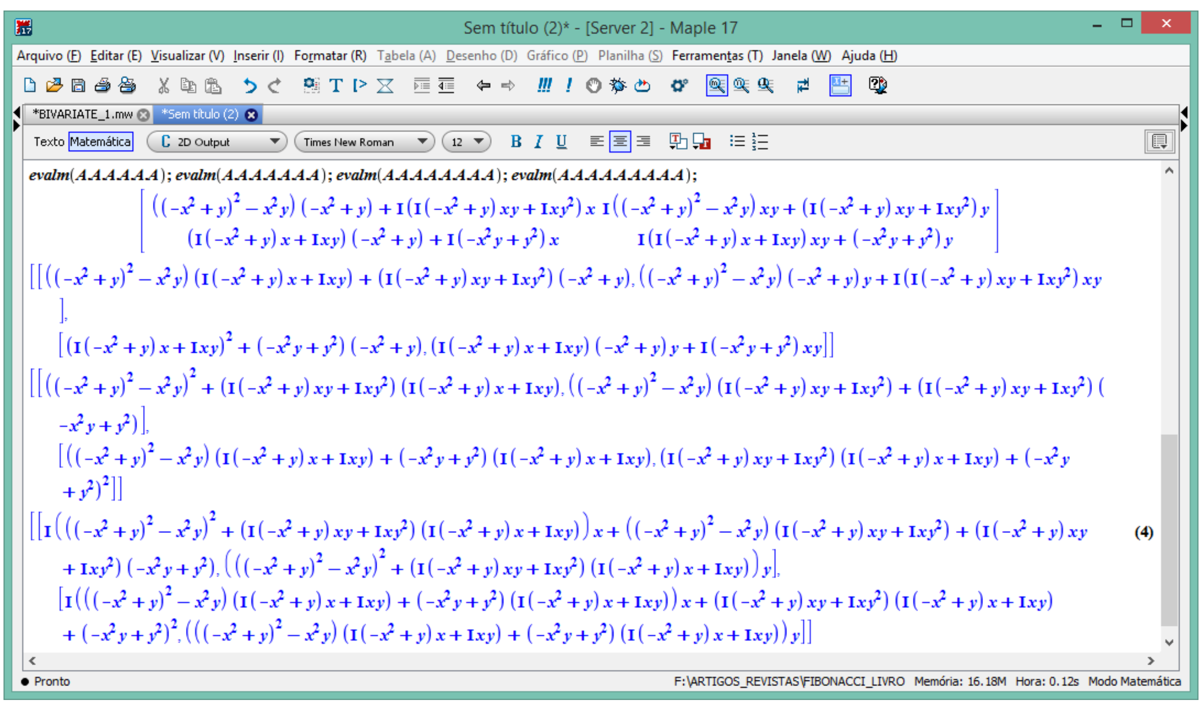

Figura 6. Determinação das potências de matrizes de ordem elevadas com o *CAS Maple*

Agora, a partir disso, enunciamos o seguinte teorema que permitirá expandir a descrição da família de PBF para índices inteiros.

Teorema 4: Para $n \geq 1$ vale que $F_{-n}(x,y) = \dfrac{-F_n(x,y)}{(-y)^n} \leftrightarrow (-y)^n \cdot F_{-n}(x,y) = -F_n(x,y)$.

Demonstração: Antes, porém, reparemos que $n = 0 \therefore F_1(x,y) = ix \cdot F_0(x,y) + y \cdot F_{-1}(x,y)$ e, portanto, teremos $1 = ix \cdot 0 + y \cdot F_{-1}(x,y) \leftrightarrow F_{-1}(x,y) = \dfrac{1}{y} = \dfrac{F_1(x,y)}{y^1}$. E, ainda que $n = -1 \therefore F_0(x,y) = ix \cdot F_{-1}(x,y) + y \cdot F_{-2}(x,y) \leftrightarrow y \cdot F_{-2}(x,y) = -ix \cdot F_{-1}(x,y) = -ix \cdot \dfrac{1}{y}$. E, ainda que $F_{-2}(x,y) = \dfrac{-ix}{y^2} = \dfrac{-F_2(x,y)}{y^2}$. No passo seguinte, verificamos que $n = -2 \therefore F_{-1}(x,y) = ix \cdot F_{-2}(x,y) + y \cdot F_{-3}(x,y) \leftrightarrow y \cdot F_{-3}(x,y) = F_{-1}(x,y) - ix \cdot F_{-2}(x,y)$. Assim, vem que $y \cdot F_{-3}(x,y) = \dfrac{1}{y} - ix \cdot \dfrac{-ix}{y^2} = \dfrac{y - x^2}{y^2} \therefore F_{-3}(x,y) = \dfrac{-x^2 + y}{y^3} = \dfrac{F_3(x,y)}{y^3}$. Vejamos mais um caso $n = -3 \therefore F_{-2}(x,y) = ix \cdot F_{-3}(x,y) + y \cdot F_{-4}(x,y) \leftrightarrow y \cdot F_{-4}(x,y) = F_{-2}(x,y) - ix \cdot F_{-3}(x,y) =$
$= \dfrac{-ix}{y^2} - ix \cdot \dfrac{(-x^2 + y)}{y^3} = \dfrac{-ix}{y^2} + \dfrac{x^3 i - xyi}{y^3} = \dfrac{-(-x^3 i + xyi)}{y^3}$. Segue a relação $F_{-4}(x,y) = \dfrac{-(-x^3 i + xyi)}{y^4} = \dfrac{-F_4(x,y)}{y^4}$.

Por outro lado, de imediato, já vimos nos parágrafos anteriores que, o caso geral também é válido.

Corolário: Para $n \geq 0$, teremos $Q^{-n}(x,y) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$.

Demonstração: Com efeito, sabemos que $Q^n(x,y) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$ e, assim, segue

$$Q^{-n}(x,y)=\begin{pmatrix} F_{-(n+1)}(x,y) & y\cdot F_{-n}(x,y) \\ F_{-n}(x,y) & y\cdot F_{-(n-1)}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{-F_{n+1}(x,y)}{(-y)^{n+1}} & y\cdot\dfrac{-F_n(x,y)}{(-y)^n} \\ \dfrac{-F_n(x,y)}{(-y)^n} & y\cdot\dfrac{-F_{n-1}(x,y)}{(-y)^{n-1}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{-F_{n+1}(x,y)}{(-y)^{n+1}} & y^2\cdot\dfrac{-F_n(x,y)}{(-y)^{n+1}} \\ y\dfrac{-F_n(x,y)}{(-y)^{n+1}} & y^3\cdot\dfrac{-F_{n-1}(x,y)}{(-y)^{n+1}}\end{pmatrix}=\frac{1}{(-y)^{n+1}}\begin{pmatrix} -F_{n+1}(x,y) & -y^2F_n(x,y) \\ -yF_n(x,y) & -y^3F_{n-1}(x,y)\end{pmatrix}=\frac{-1}{(-y)^{n+1}}\begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & y^2F_n(x,y) \\ yF_n(x,y) & y^3F_{n-1}(x,y)\end{pmatrix}.$$

No teorema seguinte, apresentamos uma versão polinomial da identidade de Cassini, inicialmente, abordada para valores (índices) inteiros e conhecida por $f_{n-1}f_{n+1}-f_n^{\,2}=(-1)^n$. Tal propriedade adquiriu relevância com o trabalho do astrônomo e matemático italiano Giovani Domenico Cassini (1625 – 1712), no estudo das propriedades da sequência de Fibonacci.

Teorema 5: (Identidade de Cassini) Para $n\geq 1$ vale que $F_{n-1}(x,y)F_{n+1}(x,y)-F_n(x,y)^2=(-1)^n y^{n-1}$.

Demonstração: Com efeito, por intermédio das matrizes discutidas há pouco, vemos $Q_1^{\,n}(x,y)=\begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y)\end{pmatrix}\therefore \det Q_1^{\,n}(x,y)=\det\begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y)\end{pmatrix}$. Todavia, sabemos que $\det Q_1^{\,n}(x,y)=\underbrace{\det Q_1(x,y)\cdots\det Q_1(x,y)}_{n\text{ vezes}}=(-y)^n=(-1)^n\cdot y^n$. Dessa forma, inferimos que $\det Q_1^{\,n}(x,y)=y\cdot F_{n-1}(x,y)F_{n+1}(x,y)-y\cdot F_n(x,y)^2=(-1)^n\cdot y^n$. Segue o resultado da igualdade $y\cdot(F_{n-1}(x,y)F_{n+1}(x,y)-F_n(x,y)^2)=(-1)^n\cdot y^n$.

A identidade do teorema 6 é conhecida na literatura fórmula de Honsberger (FALCÓN & PLAZA, 2009, p. 1009). A seguinte identidade $f_{m+n}=f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1}$ foi introduzida por Honsberger (1985, p, 102). Veremos que a mesma pode ser facilmente verificada por intermédio, também, da representação matricial.

Teorema 6: Para $m\geq 0, n\geq 0$ então $\mathrm{F}_{m+n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{F}_{m+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})+y\,\mathrm{F}_m(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

Demonstração: Para tanto, vamos considerar a seguinte representação matricial $Q^n(x,y)=\begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$, e observar a seguinte relação elementar $Q^{m+n}(x,y)=Q^m(x,y)\cdot Q^n(x,y)$. Logo em seguida, vejamos que ocorre na multiplicação:

$$Q^m(x,y)\cdot Q^n(x,y)=\begin{pmatrix} F_{m+1}(x,y) & yF_m(x,y) \\ F_m(x,y) & yF_{m-1}(x,y) \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} F_{m+1}(x,y)F_{n+1}(x,y)+yF_m(x,y)F_n(x,y) & yF_n(x,y)F_{m+1}(x,y)+yF_m(x,y)yF_{n-1}(x,y) \\ F_m(x,y)F_{n+1}(x,y)+yF_{m-1}(x,y)F_n(x,y) & F_m(x,y)yF_n(x,y)+yF_{m-1}(x,y)yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix} F_{m+n+1}(x,y) & yF_{m+n}(x,y) \\ F_{m+n}(x,y) & yF_{m+n-1}(x,y) \end{pmatrix}$. Da igualdade anterior, inferimos (na posição correspondente 1x1, isto é, linha 1 coluna 1) que $F_{m+n+1}(x,y)=F_{m+1}(x,y)F_{n+1}(x,y)+y\cdot F_m(x,y)F_n(x,y)$.

O próximo lema envolve um critério de divisibilidade entre determinados polinômios, quando consideramos o seguinte anel de polinomios, indicado por □$[x,y]$, nas variáveis 'x' e 'y'. Por exemplo, vimos nos parágrafos passados a seguinte função $f(t)=t^2-ix\cdot t-y$ que pode ser considerada, assumindo a indicação de Coutinho (2012, p. 82), um polinômio no anel □$[x,y,t]$, ou ainda, um polinômio na variável 't', cujos coeficientes pertencem ao anel □$[x,y]$. Sem mais delongas, vejamos nosso primeiro lema.

Lema: Admitindo que $mdc(\mathrm{x},\mathrm{y})=1, \mathrm{n}\geq 0$, então $mdc(\mathrm{y},\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}))=1$, para $\mathrm{n}\geq 0$.

Demonstração: Vamos empregar o modelo indutivo mais uma vez. De fato, para $n=1 \therefore mdc(\mathrm{y},\mathrm{F}_1(\mathrm{x},\mathrm{y}))=mdc(y,1)=1$. E, no caso de $n=2 \therefore mdc(\mathrm{y},\mathrm{F}_2(\mathrm{x},\mathrm{y}))=mdc(y,\mathrm{ix})=1$. Vejamos ainda que $n=3 \therefore mdc(\mathrm{y},\mathrm{F}_3(\mathrm{x},\mathrm{y}))=mdc(y,-\mathrm{x}^2+\mathrm{y})=d$. Assim, teríamos que $d\backslash y, d\backslash -\mathrm{x}^2+\mathrm{y}$ e, assim, levando em consideração uma combinação adequada dos polinômios y e $-\mathrm{x}^2+\mathrm{y}$, resulta que $d\backslash \mathrm{x}^2 \therefore d\backslash x$ o que concorre para uma contradição. No passo indutivo, assumiremos que $mdc(\mathrm{y},\mathrm{F}_{n-1}(\mathrm{x},\mathrm{y}))=1$. Em seguida, assumiremos provisoriamente que $mdc(\mathrm{y},\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}))=d \therefore d\backslash y, d\backslash ix\cdot F_{n-1}(x,y)+y\cdot F_{n-2}(x,y)$. Mais uma vez, deduziremos que 'd' deve dividir uma combinação dos elementos y e $y\cdot F_{n-2}(x,y)$. Segue que $d \setminus ix \cdot F_{n-1}(x,y)$. Reparemos que se ocorrer $d \setminus ix$ nossa demonstração finaliza, com o fato de que $mdc(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 1, \mathrm{n} \geq 0$. Por outro lado, caso $d \setminus F_{n-1}(x,y) = ix \cdot F_{n-2}(x,y) + y \cdot F_{n-3}(x,y)$ e o argumento poderá ser repetido (decrescendo a ordem) até o caso de que $d \setminus F_{n-2}(x,y), d \setminus F_{n-3}(x,y), \ldots, d \setminus F_2(x,y) = \mathrm{ix}$ e incorremos em outra contradição. Assim, resta a possibilidade única $mdc(\mathrm{y}, \mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y})) = 1$.

Teorema 7: Admitindo que $mdc(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 1, \mathrm{n} \geq 0$, então $mdc(\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})) = 1$, para $\mathrm{n} \geq 0$.

Demonstração: Vamos empregar o modelo indutivo. Reparemos que, no caso $n = 1 \therefore mdc(\mathrm{F}_1(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_2(\mathrm{x},\mathrm{y})) = mdc(1, \mathrm{ix}) = 1$. No passo seguinte, vejamos que $n = 2 \therefore mdc(\mathrm{F}_2(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_3(\mathrm{x},\mathrm{y})) = mdc(\mathrm{ix}, -\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}) = d$. Assim, teríamos que $d \setminus ix, d \setminus -x^2 + y \therefore d \setminus x, d \setminus -x^2 + y$ e, por meio de uma combinação dos elementos anteriores, acarreta que $d \setminus \mathrm{x}, \mathrm{d} \setminus \mathrm{y}$ o que contraria a hipótese preliminar. No passo indutivo, vejamos que $mdc(\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})) = 1$. Logo em seguida, vejamos que se ocorrer $mdc(\mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_{n+2}(\mathrm{x},\mathrm{y})) = d \leftrightarrow d \setminus \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y}), d \setminus \mathrm{F}_{n+2}(\mathrm{x},\mathrm{y})$. Não obstante, recordemos que $F_{n+2}(x,y) = ix \cdot F_{n+1}(x,y) + y \cdot F_n(x,y)$ e. a partir disso, obteríamos que $F_{n+2}(x,y) - ix \cdot F_{n+1}(x,y) = y \cdot F_n(x,y) \therefore \mathrm{d} \setminus y \cdot F_n(x,y)$. Portanto, podem ocorrer duas possibilidades: (i) $\mathrm{d} \setminus y$ ou (ii) $\mathrm{d} \setminus F_n(x,y)$. Ora, no caso (ii), obtivemos que $\mathrm{d} \setminus F_n(x,y)$ e ainda que $d \setminus \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ o que condiciona que $d \setminus mdc(\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})) = 1 \leftrightarrow d = 1$. Agora, no caso (i), se temos $\mathrm{d} \setminus y$ e $d \setminus \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ (pelo lema anterior). Segue o resultado.

Antes de enunciarmos e demonstrar o próximo teorema, com o auxílio do *CAS Maple*, podemos determinar que $F_4(x,\mathrm{y}) = -x^3 i + 2xyi = -xi(x^2 - 2y) = F_2(x,y) \cdot (2y - x^2)$. E, ainda, podemos encontrar $F_6(x,\mathrm{y}) = x^5 i - 4x^3 yi + 3xy^2 i = ix(3y - x^2)(-x^2 + y) = F_2(x,y) \cdot F_3(x,y) \cdot (3y - x^2)$, $F_8(x,\mathrm{y}) = -x^7 i + 6x^5 yi - 10x^3 y^2 i + 4xy^3 i = -ix(x^2 - 2y)(x^4 - 4x^2 y + 2y^2) = F_2(x,y) \cdot F_5(x,y) \cdot (2\mathrm{y} - x^2)$. Para compreendermos o extenso e laborioso trabalho que evitamos com o uso do software, trazemos ainda os seguintes casos de decomposição de funções polinomiais: $F_9(x,\mathrm{y}) = x^8 - 7x^6 y$

$+15x^4y^2-10x^2y^3+y^4=(x^2-y)(x^6-5x^4y+6x^2y^2-y^3)=(\text{y}-x^2)(-x^6+5x^4y-6x^2y^2+y^3)=F_7(x,\text{y})\cdot F_3(x,\text{y})$

$F_{12}(x,\text{y})=-x^{11}i+10x^9yi-36x^7y^2i+56x^5y^3i-35x^3y^4i+6xy^5i=-ix(x^2-2y)(x^2-3y)\cdot$ $(x^2-y)(x^4-4x^2y+y^2)=(-1)F_3(x,\text{y})\cdot F_4(x,\text{y})$; $F_{14}(x,\text{y})=x^{13}i-12x^{11}yi+55x^9y^2i-120x^7y^3i+126x^5y^4i$

$-56x^3y^5i+7xy^6i=ix(-x^6+7x^4y-14x^2y^2+7y^3)(-x^6+5x^4y-6x^2y^2+y^3)=F_2(x,\text{y})\cdot F_7(x,\text{y})$ $(-x^6+7x^4y-14x^2y^2+7y^3)$; $F_{18}(x,\text{y})=ix^{17}-16x^{15}y+105x^{13}y^2i-364x^{11}y^3i+715x^9y^4i-792x^7y^5i+$

$462x^5y^6i-120x^3y^7i+9xy^8i=ix(x^6-6x^4y+9x^2y^2-y^3)(x^2-y)(x^2-3y)(x^6-6x^4y+9x^2y^2-3y^3)=$

$=F_2(x,\text{y})\cdot F_3(x,\text{y})(x^6-6x^4y+9x^2y^2-y^3)(3\text{y}-x^2)(x^6-6x^4y+9x^2y^2-3y^3)$.

Diante dos casos de decomposição e fatoração das funções polinomiais sobre o anel fatorial $\square[x,y]$, poderemos observar propriedades básicas da divisibilidade de funções polinomiais, tais como: $\text{F}_3(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_9(\text{x},\text{y})$, $\text{F}_3(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{12}(\text{x},\text{y})$; $\text{F}_4(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{12}(\text{x},\text{y})$; $\text{F}_2(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{14}(\text{x},\text{y})$; $\text{F}_7(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{14}(\text{x},\text{y})$; $\text{F}_2(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{18}(\text{x},\text{y})$; $\text{F}_3(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{18}(\text{x},\text{y})$. De imediato, divisamos também uma característica marcante da divisão dos índices correspondentes nos elementos anteriores listados, tai como: $3\backslash 9, 3\backslash 12, 4\backslash 12, 2\backslash 14, 7\backslash 14, 2\backslash 18, 3\backslash 18$. Com origem nessa correlação introduzimos o seguinte teorema.

Teorema 8: Para $m\geq 2$, temos $m,n\geq 1$ $\text{F}_m(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_n(\text{x},\text{y})\Leftrightarrow \text{m}\backslash \text{n}$.

Demonstração: Provemos primeiramente a recíproca. Para tanto, vamos admitir que $n=k\cdot m$. No passo seguinte, provaremos que $\text{F}_m(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{k\cdot m}(\text{x},\text{y})$ por indução sobre 'k'. Obviamente, para $\text{k}=1\therefore \text{F}_m(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{1\cdot m}(\text{x},\text{y})$. No caso preliminar de $\text{k}=2\therefore \text{F}_m(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{m+1}(\text{x},\text{y})\text{F}_m(\text{x},\text{y})+y\text{F}_m(\text{x},\text{y})\text{F}_{(m-1)}(\text{x},\text{y})=\text{F}_{m+(m-1)+1}(\text{x},\text{y})=\text{F}_{2m}(\text{x},\text{y})$. Mais uma vez, aplicando o teorema 6, vem que $\text{k}=3\therefore \text{F}_m(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{3m}=\text{F}_{2m+(\text{m}-1)+1}=\text{F}_{2m+1}(\text{x},\text{y})\text{F}_m(\text{x},\text{y})+y\text{F}_{2m}(\text{x},\text{y})\text{F}_{(m-1)}(\text{x},\text{y})$. No passo seguinte, assumiremos a mesma propriedade por indução, isto é, que vale $\text{F}_m(\text{x},\text{y})\backslash \text{F}_{l\cdot m}(\text{x},\text{y})$, aonde $1\leq l\leq k$ e inspecionamos o comportamento da seguinte expressão $\text{F}_{(k+1)\cdot m}(\text{x},\text{y})=\text{F}_{mk+m}(x,y)=\text{F}_{\text{m}k+(m-1)+1}(x,y)=\text{F}_{\text{m}k+1}(x,y)\cdot \underline{\text{F}_m(x,y)}+y\cdot \underline{\text{F}_{\text{m}k}(x,y)}\cdot \text{F}_{(m-1)}(x,y)$. Notemos que os termos sublinhados são divisíveis por $F_m(x,y)$ (tendo em vista a hipótese de indução), por conseguinte $F_m(x,y) \backslash F_{(k+1)\cdot m}(x,y)$. Agora, vejamos a implicação direta.

Vamos admitir que para $F_m(x,y) \backslash F_n(x,y)$, com $m,n \geq 1$. E, ensejamos verificar que $m \backslash n$. Ora, caso admitimos a negação da propriedade, pelo Algoritmo da divisão, podemos determinar únicos $q,r \in IN$ de modo que $n = mq + r, 0 \leq r < m$. Por outro lado, cabe observar que $F_n(x,y) = F_{mq+(r-1)+1}(x,y) = F_{mq+1}(x,y)F_r(x,y) + y \cdot F_{mq}(x,y)F_{r-1}(x,y)$. Mas, agora, desde que $F_m(x,y) \backslash F_n(x,y) - F_{mq}(x,y)F_{r-1}(x,y) = F_{mq+1}(x,y) \cdot F_r(x,y)$, entretanto, sabemos ainda que $\mathrm{mdc}(F_{mq}(x,y), F_{mq+1}(x,y)) = 1$ o que acarreta que ocorre ainda $F_m(x,y) \backslash F_{mq+1}(x,y) \cdot F_r(x,y) \leftrightarrow F_m(x,y) \backslash F_r(x,y)$ o que conduz a uma contradição, posto que, pelo algoritmo anterior, o grau do polinômio $F_r(x,y)$ é menor, estritamente, do que o grau do polinômio $F_m(x,y)$.

Na figura 7, acentuamos que, por intermédio de alguns comandos do *CAS Maple*, podemos explorar e, portanto, proporcionar aos estudantes um acumulo de evidências particulares que concorrem para o caráter de veracidade da propriedade fundamental generalizada no teorema 8. Na figura abaixo, mostramos sua implementação para o cálculo do terminante de uma matriz de ordem 20x20.

Para concluir, o último resultado envolvendo propriedades de divisibilidades, Ronsberger (1985, p. 131) recorda que o matemático Glen Michel, em 1964, demonstrou o resultado particular para os números de Fibonacci, indicando por $mdc(f_m, f_n) = f_{mdc(m,n)}$. Logo em seguida, apreciaremos sua generalização para o caso da classe dos PBF.

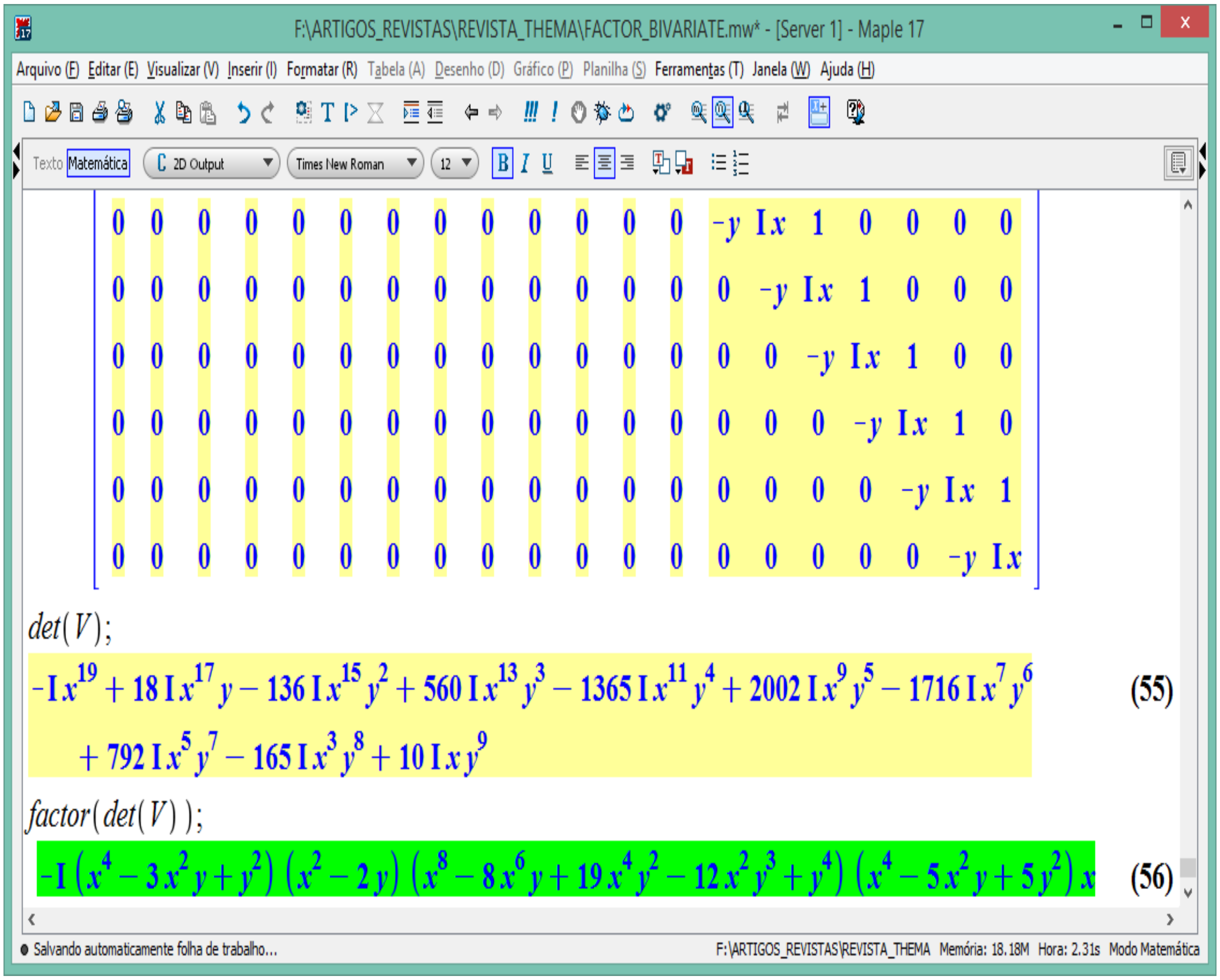

Figura 7. Com o CAS Maple podemos investigar o comportamento particular da fatorização de elementos dos polinômios bivariados de ordens elevadas.

Coralário 1: Supondo que $mdc(x,y)=1$ e $m,n \geq 1$ então $mdc(F_m(x,y), F_n(x,y)) = F_{mdc(m,n)}(x,y)$.

Demonstração: Vejamos considerar $d = mdc(m,n) \therefore F_{mdc(m,n)}(x,y) = F_d(x,y)$ e, por definição, sabemos que $d \backslash m \overset{teorema}{\leftrightarrow} F_d(x,y)\backslash F_m(x,y)$ e $d \backslash n \overset{teorema}{\leftrightarrow} F_d(x,y)\backslash F_n(x,y)$. Mas, por definição, deve incorrer no seguinte fato $F_d(x,y)\backslash mdc(F_m(x,y),F_n(x,y))$. Mostraremos que $mdc(F_m(x,y),F_n(x,y))\backslash F_d(x,y)$. Com efeito, sendo $d = mdc(m,n)$ então, existem únicos inteiros $r,s \in Z$ de modo que $r>0, s<0$ para $d = mdc(m,n) = r\cdot m + s\cdot n \leftrightarrow mdc(m,n) + (-s)\cdot n = r\cdot m$. Ademais, notamos que $F_{r\cdot m}(x,y) = F_{mdc(m,n)+(-s)\cdot n}(x,y) = F_{mdc(m,n)}(x,y)F_{-sn+1}(x,y) + y\cdot F_{mdc(m,n)-1}(x,y)F_{-s\cdot n}(x,y)$. Ou ainda, vemos que $\left(F_{r\cdot m}(x,y)\right) - y\cdot F_{mdc(m,n)-1}(x,y)\cdot\left(F_{-s\cdot n}(x,y)\right) = F_{mdc(m,n)}(x,y)\cdot F_{-sn+1}(x,y)$. Porém, vemos que

$d \backslash \mathrm{n} \overset{teorema}{\leftrightarrow} F_d(x,y) \backslash F_{-s\cdot m}(x,y)$ e $d \backslash \mathrm{m} \overset{teorema}{\leftrightarrow} F_d(x,y) \backslash F_{r\cdot m}(x,y)$. Assim sendo, inferimos que $F_d(x,y) \backslash F_{\mathrm{mdc(m,n)}}(x,y) \cdot F_{-sn+1}(x,y)$. Todavia, reparemos que $\boldsymbol{mdc(F_d(x,y), F_{-sn+1}(x,y)) = 1}$ pois, se ocorresse que $mdc(F_d(x,y), F_{-sn+1}(x,y)) = F_D(x,y) \leftrightarrow D \backslash d, D \backslash -sn+1$. Mas, desde que $d \backslash n$ e, dessa forma, por intermédio de uma combinação dos termos anteriores, vem que $D \backslash d, D \backslash -sn+1$, $d \backslash n$ portanto, $D \backslash \mathrm{n}, D \backslash -sn+1 \to D \backslash 1$. Com isso verificado, retornemos ao caso de $F_d(x,y) \backslash F_{\mathrm{mdc(m,n)}}(x,y) \cdot F_{-sn+1}(x,y) \therefore F_d(x,y) \backslash F_{\mathrm{mdc(m,n)}}(x,y) \leftrightarrow \mathrm{d} \backslash \mathrm{mdc(m,n)}$. Segue o resultado.

Mais uma vez, com auxílio computacional, podemos obter o comportamento dos seguintes casos particulares: $mdc(\mathrm{F_4(x,y), F_6(x,y)}) = ix = \mathrm{F_2(x,y)}$, $mdc(\mathrm{F_7(x,y), F_{14}(x,y)}) =$

$(-1)(x^6 - 5x^4y + 6x^2y^2 - y^3) = (-1)\,\mathrm{F_7(x,y)}$, $mdc(\mathrm{F_{16}(x,y), F_{20}(x,y)}) = x^3i - 2xyi = (-1)\,\mathrm{F_4(x,y)}$, $mdc(\mathrm{F_{12}(x,y), F_{18}(x,y)}) = x^5i - 4x^3yi + 3xy^2i = (-1)\,\mathrm{F_6(x,y)}$. Aqui, empregamos e avaliamos o máximo divisor comum das funções indicadas e, o valor correspondente, a menos de um constante, fornece um elemento, cujo índice satisfaz a propriedade indicada no corolário 1.

Para concluir, trazemos a seguinte definição: $\begin{cases} L_0(x,y) = 2, \mathrm{L_1}(x,y) = ix, n \geq 1 \\ L_{n+1}(x,y) = ix \cdot L_n(x,y) + y \cdot L_{n-1}(x,y) \end{cases}$ que é nomeada por Asci & Gurel (2012, p. 2) por Polinômios Bivariados de Lucas. De imediato, com amparo nos argumentos anteriores, podemos depreender que $L_n(x,y) = \alpha(\mathrm{x,y})^n + \beta(\mathrm{x,y})^n$, para $n \geq 0$ e, assim, vemos ainda que $F_{2n}(x,y) = \dfrac{\alpha^{2n}(x,y) - \beta^{2n}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} = (\alpha^n(x,y) + \beta^n(x,y)) \cdot \dfrac{\left(\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)\right)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)} = L_n(x,y) \cdot F_n(x,y)$. Ora, a relação anterior $L_n(x,y) = \dfrac{F_{2n}(x,y)}{F_n(x,y)}$ permitirá determinar todos os seus termos a partir da BFCP.

Antes de concluir, com base na relação algébrica $(-y)^n \cdot F_{-n}(x,y) = -F_n(x,y) \leftrightarrow F_{-n}(x,y) = -(-y)^{-n} F_n(x,y)$ e na última representação matricial indicada por $Q^n(x,y) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x,y) & yF_n(x,y) \\ F_n(x,y) & yF_{n-1}(x,y) \end{pmatrix}$ segue que

$Q^{-n}(x,y)=\begin{pmatrix} F_{-n+1}(x,y) & yF_{-n}(x,y) \\ F_{-n}(x,y) & yF_{-n-1}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(-y)^{-n+1}F_n(x,y) & (-y)^{-n+1}F_n(x,y) \\ -(-y)^{-n}F_n(x,y) & (-y)^{-n}F_{-n-1}(x,y) \end{pmatrix}$. E, a partir dessa matriz, poderemos determinar expressão semelhante ao que indicamos no teorema 4.

Para concluir, pelo teorema 1, vimos $\dfrac{F_{n+1}(x,y)}{F_n(x,y)}=\dfrac{\dfrac{\left(\alpha^{n+1}(x,y)-\beta^{n+1}(x,y)\right)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}}{\dfrac{\left(\alpha^{n}(x,y)-\beta^{n}(x,y)\right)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}}==\dfrac{\alpha^{n+1}(x,y)-\beta^{n+1}(x,y)}{\alpha^{n}(x,y)-\beta^{n}(x,y)}=$

$=\dfrac{1-\dfrac{\beta^{n+1}(x,y)}{\alpha^{n+1}(x,y)}}{\dfrac{1}{\alpha(x,y)}-\dfrac{1}{\alpha(x,y)}\cdot\left(\dfrac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}\right)^n}=\dfrac{1-\left(\dfrac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}\right)^n}{\dfrac{1}{\alpha(x,y)}-\dfrac{1}{\alpha(x,y)}\cdot\left(\dfrac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}\right)^n}$. Não obstante, observemos que $\dfrac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}=\dfrac{-2y}{-x^2+2y+ix\sqrt{4y-x^2}}$.

Para concluir, trazemos ao leitor a definição abaixo, dada por recorrência e estudada no âmbito da Teoria dos Nós, cujo um dos representantes foi o norte americano James Waddell Alexander (1888 – 1921) e, posteriormente, contou com subsequentes implicações do seu trabalho na investigação desenvolvida por John Horton Conway (1937 - ?), no ano de 1969 (TASKÖPRÜ & ALTINTAS, 2015, p. 2). E, a partir desta abordagem, apresentamos nossa última definição que registramos no trabalho recente de Tasköprü & Altintas (2015)

Definição 4: A sequência generalizada polinomial $\{F_n(a,z)\}_{n=0}^{\infty}$, nas variáveis 'a' e 'z', dada por $F_n(a,z)=\mathrm{a}\cdot\mathrm{z}\cdot F_{n-1}(a,z)+\mathrm{a}^2\cdot F_{n-2}(a,z),\mathrm{n}\geq 2$, com as condições iniciais $F_0(a,z)=0,F_1(a,z)=1$. (TASKÖPRÜ & ALTINTAS, 2015).

Com origem na definição anterior, podemos determinar que (caso a=1): , $f_2(z)=\mathrm{z}$ $f_3(z)=\mathrm{z}^2+1$, $f_4(z)=\mathrm{z}^3+2z$, $f_5(z)=\mathrm{z}^4+3\mathrm{z}^3+1$, $f_6(z)=\mathrm{z}^5+3\mathrm{z}^4+\mathrm{z}^3+3z$, etc. Tal definição envolve a generalização da PBCF e evidencia um campo de aplicação fractal com a área de pesquisa nominada de Teoria dos Nós. Antes de concluir, abordamos um teorema recentemente introduzido no âmbito da pesquisa científica o que indica a persistência do caráter de proficuidade da noção de função geradora.

Teorema 9: A função geradora da família $\left\{F_n(a,z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ é descrita por intermédio da seguinte função geradora indicada por $g_{F_n(a,z)}(a,z)=\dfrac{\lambda}{1-az\cdot\lambda-a^2\cdot\lambda^2}$. (TASKÖPRÜ & ALTINTAS, 2015, p. 5).

Para concluir, assinalamos que Panwar & Singh (2014, p. 3) comentam a introdução na literatura da família de polinômios bivariados por Mario Catalani, em 2004. Usando a abordagem matricial, "Catallani obteve uma coleção de identidades envolvendo os polinômios bivariados de Fibonacci e de Lucas" (PANWAR & SINGH, 2014, p. 3). Todavia, em 2006, são derivadas propriedades da divisibilidade no trabalho de Jacob; Reutenauer & Sakarovitch (2006) e que foram discutidas ao longo do texto e, resumidamente, apresentamos na tabela 1 (linhas 6 e 7). Algumas dessas propriedades, no caso particular, são discutidas por alguns compêndios de História da Matemática.

Tabela 1: Quadro esquemático comparativo da SF com o modelo matemático da PBF.

Descrição histórica	Propriedades dos polinomios bivariados de Fibonacci
$f_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ Fórmula fornecida por Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786 – 1856).	$F_n(x,y)=\dfrac{\left(\alpha^n(x,y)-\beta^n(x,y)\right)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}$ Fórmula variante de Binnet
$g(\mathrm{t})=\dfrac{t}{1-t-t^2}$ Abraham De Moivre (1667–1754) empregou a noção de função geradora ao modelo de Fibonacci.	$g(\mathrm{t})=\dfrac{t}{1-ix\cdot t-y\cdot t^2}$ Função geradora do modelo PBF
$Q=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ Representação matricial estudada em 1960, por Charles King (GOULD, 1981)	$Q(x,y)=\begin{pmatrix}ix&y\\1&0\end{pmatrix}$ Representação matricial introduzida por Asci & Gurel (2013).
$f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n$ Processo de extensão da SF ao campo dos índices inteiros discutida por Broussseau (1963)	$F_{-n}(x,y)=\dfrac{-F_n(x,y)}{\left(-y\right)^n}$ Processo de extensão da SPF ao campo dos índices inteiros
$f_{n-1}f_{n+1}-f_n^{\ 2}=(-1)^n$ Identidade formulada por Domênico Cassini (1625 – 1712)	$F_{n-1}(x,y)F_{n+1}(x,y)-F_n(x,y)^2=(-1)^n y^{n-1}$ Fórmula variante de Cassini fornecida por Asci & Gurel (2013).
$f_m\setminus f_n\Leftrightarrow \mathrm{m}\setminus \mathrm{n}$ Caso de divisibilidade relacionadas com a SF	$\mathrm{F}_m(\mathrm{x},\mathrm{y})\setminus\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y})\Leftrightarrow \mathrm{m}\setminus\mathrm{n}$ Divisibilidade dos PBF introduzidas por Jacob; Reutenauer & Sakarovitch (2006)
$(\mathrm{f}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}),\mathrm{f}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y}))=1$ Caso de divisibilidade relacionadas com a SF	$mdc(\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}),\mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y}))=1$ Divisibilidade dos PBF introduzidas por Jacob;

	Reutenauer & Sakarovitch (2006)
$\begin{cases} H_0(x,y) = a_0, \mathrm{H}_1(x,y) = a_1, \\ H_{n+1}(x,y) = x \cdot H_n(x,y) + y \cdot H_{n-1}(x,y) \end{cases}$ Polinômios bivariados introduzidos por Catalani em 2004.	$\begin{cases} F_0(x,y) = 0, \mathrm{F}_1(x,y) = 1, \\ F_{n+1}(x,y) = ix \cdot F_n(x,y) + y \cdot F_{n-1}(x,y) \end{cases}$ Forma complexa dos PBF introduzidos por Asci & Gurel (2012; 2013)

Fonte: Elaboração do autor.

Enfim, com arrimo da tabela 1, o leitor poderá ser estimulado a desenvolver um entendimento sobre o processo matemático evolutivo e epistemológico, cujas origens remontam a contribuição de Leonardo Pisano mas, que todavia, ainda preserva seu vigor científico e estimula o interesse hodierno de estudiosos e especialistas que trabalham com Matemática Pura e Aplicada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho discutimos, de modo pormenorizado, determinados resultados e propriedades, sobretudo teoremas que, de modo geral, recebem pouca divulgação e publicização num ambiente de formação inicial e continuada de professores de Matemática. A assunto nominado Funções Polinomiais Bivariados de Fibonacci possui um apelo inexoravelmente histórico e epistemológico, posto que, revela uma dimensão evolutiva constante de um modelo propugnado, em 1202, por intermédio de um singelo problema que se apoia na produção de pares de coelhos mas, que, hodiernamente, revela o entusiasmo e produção ininterrupta de artigos científicos indicadores do estádio atual em termos de invetigação.

Desse modo, trazemos ao leitor alguns elementos discutidos por Asci & Gurel (2102), cujo tirocínio pode ser vislumbrado em outros de seus trabalhos (ASCI & GUREl, 2013) para o caso dos Polinômios Gaussianos de Jacobsthal e os Polinômios Gaussianos de Jacobsthal-Lucas que revelam elementos invariantes, ressignificados a partir de um outro modelo aritmético-algébrico que possuiu seu marco histórico inicial inspirador na Sequência de Fibonacci e pode ser vislumbrado seus desdobramentos (ver figura 3).

De modo prosaico, a classe das Funções Bivariadas de Fibonacci que discutimos aqui constitui uma especialização da classe de funções polinomiais de Fibonacci que admitem um processo generalizador e revelam uma pesquisa atual sobre o assunto (BILGICI, 2014; HARNE & BADSHAH, 2014; SINGH et all. 2014). Por fim, no presente escrito, estabelecemos um contraponto que propugna uma perspectiva de investigação histórica que não se exime da responsabilidade e o zelo no trato (epistêmico) do próprio modelo matemático.

E, num sentido contrário ao que perseguimos envidar, registramos um pensamento (perspectivas) que transforma(m) os conteúdos de História da Matemática numa apreciação meramente retórica, esvaziada e destituída, pasmem, de uma apreciação do próprio modelo matemático que, em maior ou em menor substancia, produzem uma concepção míope do conhecimento matemático (ALVES, 2015; 2016c), posto que tendem enfatizar elementos secundários ou terciários, embora acentuem uma aparência de investigação sistemática. Na figura 8, acentuamos um elemento que constitui para nós o "fio de Ariadne" para o entendimento do progresso matemático. Na mesma, acentuamos o elemento catalizador a balizador do progresso que indicamos pela definição formal. Assim, acompanhando o período temporal que concorreu para o estabelecimento de definições formais e propriedades, adquirimos uma perspectiva para a generalidade atual do modelo, exclusivamente para a nossa classe particular de funções polinomiais.

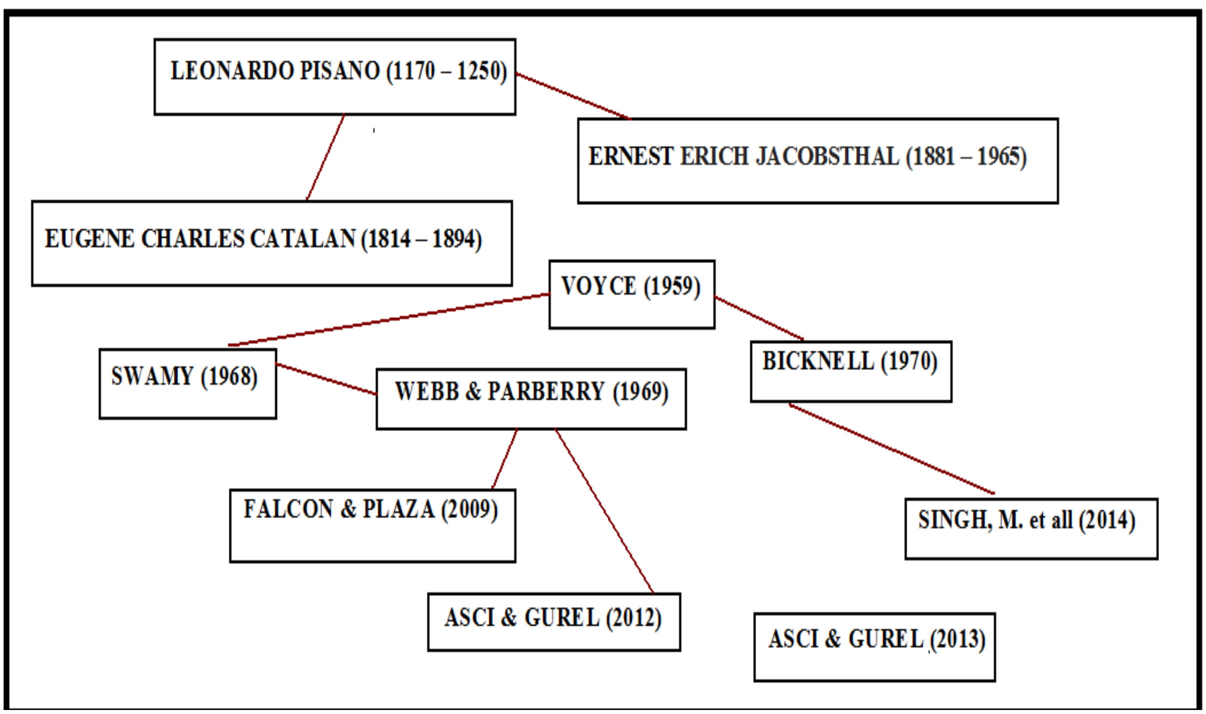

Figura 8. Fluxograma indicativo dos estudiosos do modelo da Funções Polinomiais de Fibonacci e seu processo evolutivo (elaboração do autor)

Finalmente, diante de propriedades intricadas e a forma sincopada, costumeiramente enfatizado no discurso científico, trazemos para a discussão determinadas propriedades algébricas e numéricas fornecidas pelo *CAS Maple*, afim de proporcionar um pensamento analógico e intuitivo acerca de características intrínsecas da classe PBF e que, com arrimo dos teoremas elencados ao decurso do trabalho, produzem uma compreensão de um roteiro particular evolutivo e, portanto, progresso irrefreável do modelo de Fibonacci.

REFERÊNCIAS

ALVES, Francisco. R. V. Sequência de Pell Generalizada – SGP: aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista THEMA**, v. 13, nº 1, 1 – 25, 2016a.

ALVES, Francisco. R. V. Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. **BOLETIM GEPEM**, nº 69, 1 – 7, 2016b.

ALVES, Francisco. R. V. Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa**. v, 18, nº 1, 61 – 93, 2016c.

ALVES, Francisco. R. V. Sequência Generalizada de Pell (SGP): aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista THEMA**. v. 13, nº 2, 27 – 41, 2016d.

ALVES, Francisco. R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci – FHF. **VYDIA Educação**. v. 35, nº 1, 133 – 147, 2015.

ALVES, Francisco. R. V. & Borges Neto, H. A existência da Sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação nos pressupostos da Sequência Fedathi. **BOLETIM GEPEM**, nº 59, 1 – 7, 2011.

ASCI, M. & GUREL, E. 2012. On bivariate complex Fibonacci and Lucas Polynomials, **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 18, nº 1, 1 – 25.

ASCI, M. & GUREL, E. 2013. Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 19, nº 1, 25 – 36.

BICKNELL, Marjorie. 1970. A primer for the fibonacci numbers: part vii. **The Fibonacci Quarterly**, v. 8, nº 4, 135 – 140.

BILGICI, Goksa. 2014. New Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequences. **Applied Mathematical Sciences**, v. 8, nº 29, 1429 – 1437.

BODAS, Medha. A. 2001. **Fibonacci sequences and Golden Section** (master thesis). San Jose: San Jose State University, 110f.

BROUSSEAU, Alfred. B. (1963). Exploring Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 1, nº 1, February, 57 – 64.

COUTINHO, S. C. 2012. **Polinômios e Computação Algébrica**. Rio de Janeiro: Coleção Matemática e Aplicações.

FALCON, Sergio. & PLAZA, Angel. 2009, On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives. **Chaos, Solutions and Fractals**. v. 39, 1005 – 1019.

GOULD, H. W. 1981. A history of the fibonacci q-matrix and a higher-dimensional problem. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, nº 3, 251 – 257.

HARNE, Sanjay. & BADSHAH, V. H. 2014. Some Identities Involving Fibonacci Polynomials. **Applied Mathematical Sciences**, v. 8, nº 142, 7059 – 7064.

HONSBERGER, Ross. 1985. Mathematical Gems III. **The Dolciani Matematical Exposition**. Number nine.

JACOB, G; REUTENAUER C & SAKAROVITCH J, 2006. On a divisibility property of Fibonacci polynomials. 1 – 6. Disponível em: http://perso.telecomparistech.fr/~jsaka/PUB/Files/DPFP.pdf, 2006. Acessado em: 12/12/2016.

KILIC, Emrah. 2008. The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci p-numbers. **European Journal of Combinatorics**, v. 29, nº 1, April, 701 – 711.

LIVIO, Mario. **The Golden Ratio: the history of Phi**. New York: Broadway Books, 2002.

MAYNARD, Philip. 2008. Generalized Binnet Formulae. In: **Applied Probability Trust**. v. 25, nº 1, 104 – 105.

PANWAR, Yashwant K. & SINGH, Mamta. 2014. Generalized Bivariate Fibonacci-Like Polynomials. **International Journal of Pure Mathematics**. v. 1, 8 – 13.

POSAMENTIER, Alfred, S. & LEHMANN, Ingmar. **The Fabulous Fibonacci Numbers**. New York: Prometheus Books, 2007.

SINGH, M. et all. 2014. Generalized Fibonacci-Lucas Polynomials. **International Journal of Advanced Mathematical Sciences**. v. 2, nº 1, 81 – 87.

SIGLER, L. E. **Fibonacci´s Liber Abaci: Leonardo Pisano´s book of calculation**. (translation). New York: Springer, 2003.

SWAMY, M. N. Futher properties of Morgan Voyce Polynomials. **The Fibonacci Quarterly**, v. 6, nº 2, April, 167 – 176, 1968.

TASKÖPRÜ, Kemal. & ALTINTAS, Ismet. Homfly of torus as links generalized Fibonacci Polynomials. **The Eletronic Journal of Combinatorics**. v. 22, nº 4, 4 –8, 2015.

VAJDA, S. **Fibonacci & Lucas numbers, and Golden Section**. New York: Ellis Horwood Limited, 1989.

VOYCE, Morgan, M. 1959. Ladder network analysis using Fibonacci Numbers, **Transaction Circuit Theory**, v. 6, Setember, 321 – 331.

WEBB, W. A. & PARBERRY, E. A. 1969, Divisibility properties of Fibonacci Polynomials, **The Fibonacci Quartely**, v. 7, nº 6, December, 457 – 463.

WITFORD, A. K. 1977. Binet´s formula generalized. **The Fibonacci Quarterly**, v. 15, nº 1, February, 21 - 22.