2017 | Volume 14 | Nº 1 | Pág. 91 a 111

DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.14.2017.91-111.403

REVISTA THEMA

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Sobre a evolução matemática, histórico-epistemológica do modelo de Fibonacci: a abordagem matricial

On the mathematical, historical and epistemological evolution pf the fibonacci´s model: the matrix approach

Francisco Regis Vieira Alves[1]

RESUMO

Este artigo aborda uma temática que proporciona uma perspectiva epistemológica não estática, atinente a um tópico ou ramo específico em Matemática, que representa uma das tendências que consubstanciam a evolução, generalização e sistematização do modelo proposto por Leonardo de Fibonacci, em 1202. Seu escopo principal consiste em demarcar elementos que caracterizam o emprego do modelo matricial, tendo em vista e resolução de problemas antigos e outros mais recentes. Dentre as inúmeras vertentes da Teoria dos Números de Fibonacci, a abordagem matricial permite a descrição de propriedades inesperadas. Por fim, o escrito busca proporcionar elementos que permitem uma ação investigativa, de ordem histórico-epistemológica, num contexto de formação inicial de professores de Matemática. Ademais, decerto que os elementos de ordem histórico-matemático-epistemológicas apresentados, ao decurso do escrito, se mostram imprescindíveis num âmbito da formação inicial.

Palavras Chave: *Sequência de Fibonacci. Investigação histórica. Abordagem matricial. Formação de Professores*.

ABSTRACT

This article discusses a theme that provides a non-static epistemological perspective relating to a specific topic or a mathematical branch that represents one particular approach that characterize the evolution, the generalization and the sistematization of a model proposed by Leonardo Fibonacci, in 1202. Its main scope is demarcate some elements that characterize the use of matrix model in order and resolution of old and recentes problems. Among the many aspects of the Theory of Fibonacci Numbers, the matrix approach allows the description of unexpected properties. Finally, the writting seeks to provide elements that allow for a investigative action, historical and epistemological order, in a initial training context of mathematics teacher. Moreover, surely the elements of historical and mathematical epistemological order are presented, troughout the text, in order to show contitute an essential part of initial teacher training formation.

Key-words: *Fibonacci Sequence. Historical investigation. Matricial approach. Teacher trainning.*

[1]IFC - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza/CE – Brasil. UFC – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza/CE – Brasil.

1. INTRODUÇÃO

Torna-se imprescindível um conhecimento acerca da evolução e generalização de um modelo matemático de caráter ubíquo, popularmente conhecido como uma descrição biológica da produção de coelhos, proposto por Leonardo Pisano, em 1202. Dessa forma, tendo em vista uma profusão de derivações e especializações do mesmo, sobretudo identificadas mesmo no século XX, restringir-nos-emos ao modelo estrutural de emprego da abordagem matricial, sob a influência das ideias originadas da Álgebra Linear.

Por outro lado, diante de uma espécie de "hiato histórico" (ALVES & BORGES NETO, 2011; ALVES, 2015; 2016a; 2016b; ALVES & SANTOS, 2016) proporcionado pela apreciação/consideração da abordagem tradicional, por parte dos compêndios de História da Matemática – HM que, de modo recorrente, costuma enfatizar o caráter lúdico do episódio da produção de coelhos, todavia, acentuaremos a abordagem matricial para os números de Fibonacci. Nesse sentido, vale recordar que Stakhov (2005a, p. 36) explica o desenvolvimento da Teoria dos Números de Fibonacci, a partir de uma vertente particular, chamada em inglês por *Q-matrix*. E, ao fazer menção aos criadores de um periódico divulgador da Teoria dos Números de Fibonacci, intitulado *The Fibonacci Quarterly*, publicado pela primeira vez em 1963, acentua que Verner E. Hoggat (1921 – 1981) contribuiu decisivamente para a evolução do abordagem matricial e sua intensa publicização no *locus* científico e no âmbito da pesquisa em torno do modelo de Fibonacci (BICKNELL, 1987).

Dessa forma, com o escopo de delinear um período histórico que constitui a evolução de outro ramo particular e específico originado da Sequência de Fibonacci – SF (ALVES, 2015; 2016a; 2016b), mostraremos várias propriedades inferidas e a correspondente validez garantida pelo modelo matricial, recorrentemente desconsiderado pelos livros de HM (BOLL, 1968; ESTRADA et all, 2000; EVES, 1969; GULLBERG, 1997; HERZ, 1998; HUNTLEY, 1970). Ademais, nossa perspectiva, de ordem histórico-epistemológico se coaduna com o ponto de vista de Nobre (2003) e assume o processo de investigação histórico-epistemológica imprescindível na formação inicial de professores de Matemática (BARONI; TEIXEIRA & NOBRE, 2011).

Com origem nesses argumentos preliminares, estabelecemos a seguinte questão de investigação: que elementos podem ser promovidos, num contexto de investigação histórica, afim de proporcionar aos estudantes e futuros professores de Matemática, concepções não estáticas e em evolução constante a respeito do modelo da Sequência de Fibonacci e sua correspondente generalização?

Dessa forma, perseguiremos responder, pelo menos, provisoriamente tal questionamento, por intermédio da escolha de elementos pertencentes ao âmbito da Álgebra Linear, no sentido de indicar a generalização da sequência numérica original, apresentada nos livros de HM, como:

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : (1\,;1\,;2\,;3\,;5\,;8\,;13\,;21\,;34\,;....)$$

$$(f_n)_{n\in Z} : (\ldots -21;13;-8;5;-3;2;1;-1;0;1\,;1\,;2\,;3\,;5\,;8\,;13\,;21\,;34\,;....)$$

E, diante da profusão de formas de introdução dos conteúdos de HM em sala de aula, optamos por enfatizar seu uso didático e aprimoramento profissional dos professores (MOREY, 2013, p. 80), bem como o entendimento das maneiras idiossincrásicas implementadas por matemáticos profissionais no sentido de erigir suas teorias (ARCAVI & ISODA, 2007; FAUVEL & VAN MAANEN, 2000).

Na próxima seção, abordamos elementos hodiernos e de profundo interesse pelos pesquisadores, no que concerne às potencialidades da aplicação de matrizes, estabelecendo, de modo concomitante, um contraponto com outros trabalhos acadêmicos relacionados com o modelo de Fibonacci, e que apresentam produção e divulgação há algumas décadas atrás.

2. SOBRE A EVOLUÇÃO DO MODELO DE FIBONACCI

In primu impetu, comentaremos o procedimento do cálculo do determinante da seguinte matriz $\begin{pmatrix} f_n-1 & f_{n+1}-1 & f_{n+2}-1 \\ f_{n+1}-1 & f_{n+2}-1 & f_{n+3}-1 \\ f_{n+2}-1 & f_{n+3}-1 & f_{n+4}-1 \end{pmatrix}$, para $n\geq 0$. Ora, sem maiores delongas, seu desenvolvimento é indicado, por meio de operações elementares entre as linhas da matriz correspondente. Com efeito, vemos

$$\det\begin{pmatrix} f_n-1 & f_{n+1}-1 & f_{n+2}-1 \\ f_{n+1}-1 & f_{n+2}-1 & f_{n+3}-1 \\ f_{n+2}-1 & f_{n+3}-1 & f_{n+4}-1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_n-1 & f_{n+1}-1 & f_{n+2}-1 \\ f_{n+1}-1 & f_{n+2}-1 & f_{n+3}-1 \\ (f_n+f_{n+1})-1 & (f_{n+1}+f_{n+2})-1 & (f_{n+2}+f_{n+3})-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} f_n - 1 & f_{n+1} - 1 & f_n + f_{n+1} - 1 \\ f_{n+1} - 1 & f_{n+2} - 1 & f_{n+1} + f_{n+2} - 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_n - 1 & f_{n+1} - 1 & +1 \\ f_{n+1} - 1 & f_{n+2} - 1 & +1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = d\,\mathrm{et}\begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} & 0 \\ f_{n+1} & f_{n+2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -f_n f_{n+2} + 0 + 0 - 0 - 0 + 0 - f_{n+1}^2 = \left(f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 \right) = (-1)^n, n \geq 0 .$$

Ou seja, empregando a identidade de Cassini, verificamos uma propriedade relacionada com a forma matricial, cuja descrição pormenorizada por ser apreciada em Martinjak & Urbiha (2015). O elemento inesperado aqui diz respeito da obtenção da respectiva identidade, a partir de um determinante 3x3.

Doravante, nossa perspectiva, consiste em contrastar resultados indubitavelmente recentes, e que ainda preservam o interesse atual de especialistas, como outros elementos constituintes da abordagem matricial mas, que, observamos seus rudimentos nas décadas de 60 e 70 (GOULD, 1981). Antes, porém, cabe assinalar que a identidade usada anteriormente, indicada por $\left(f_{n+1} f_{n-1} - f_{n+1}^2 \right) = (-1)^n$ demonstrada de modo aparentemente independente, cuja autoria é atribuída a Robert Simson (1687 – 1768), em 1753, enquanto que, por outros autores, recebe o epíteto de identidade de Cassini, em homenagem ao matemático Geovani Domênico Cassini (1625 – 1712), como sublinha Koshy (2007, p. 134), e que demonstrou-a em 1680. Outrossim, a mesma identidade pode ser generalizada, no caso em que lidamos com a k-Sequências dos números de Fibonacci (BOLAT & KÖSE, 2010) e ainda outras versões podem ser encontradas (VOLL, 2010).

3. ASPECTOS HISTÓRICOS E EPISTEMOLÓGICOS RELACIONADOS COM A ABORDAGEM MATRICIAL

Apesar de não receber uma atenção e publicização adequada no contexto acadêmico, na medida em que direcionamos um olhar para a formação inicial de professores, a evolução do modelo da sequência de Fibonacci admite variadas especializações (ALVES, 2015), posto que, temos registrado que matemáticos profissionais, sobretudo, depois dos anos 60, que buscaram intensificar esforços, com o emprego de diversificados instrumentos de ordem teórico-conceitual, tendo em vista tanto a identificação, formulação, bem como a resolução de problemas originados na referida generalização.

Na vertente de nosso interesse, no presente escrito, trazemos o emprego do instrumento conceitual de natureza matricial. Constatamos, assim, discussões de propriedades das décadas passadas (BASIN &

HOGGAT, 1972; BICKNELL & HOGGATT, Jr., 1963; BICKNELL, 1965; ERCOLANO, 1976; HOGGAT. Jr. & BICKNELL, 1973; WALTON & HORADAM, 1971), como outras, de ordem bastantes atuais (BASU & DAS, 2014; NALLI, 2006; NALLI & HAUKKANEN, 2009; PRASAD, 2014), que indicam um vigor preservado do modelo de reprodução de pares de coelhos.

Por exemplo, num manuscrito da década de 70, Basin & Hoggat (1972, p. 19), consideram as seguintes matrizes $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$ e $Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$. Observam que seu determinante vale exatamente -1, e que podemos depreender que $Q^{n+1} = Q^n \cdot Q$, identidade matricial que permite inferir, por indução matemática, que $Q^{(n)} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ e, nesse último caso, podemos encontrar que

$$\det \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \det Q^n = \det Q \cdot \det Q \cdots \det Q = (-1)^n$$

$= \underbrace{(-1)(-1)(-1)\cdots(-1)}_{n \text{ vezes}} = (-1)^n$ (LIMA, 2011, p. 262).

Em Bicknell & Hoggat (1972, p. 19) comentam que, com origem na identidade matricial acima que indicamos por $Q^{n+1} = Q^n \cdot Q$, podem escrever a igualdade: $Q^{(n)} \cdot Q^{(n+1)} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} f_{n+2} + f_n f_{n+1} & {f_{n+1}}^2 + f_n^2 \\ f_n f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+1} & f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_n \end{pmatrix}$. E, ainda que $Q^{(n)} \cdot Q^{(n+1)} = Q^{(2n+1)} = \begin{pmatrix} f_{2n+2} & f_{2n+1} \\ f_{2n+1} & f_{2n} \end{pmatrix}$, Bicknell & Hoggat concluem, empregando a igualdade entre matrizes, que $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$. Indicam outras identidades, oriundas da mesma propriedade, descritas pelas seguintes identidades: $f_{2n+2} = f_{n+1} f_{n+2} + f_n f_{n+1}$, $f_{2n+1} = f_n f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+1}$, $f_{2n} = f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_n$, com índice inteiro positivo.

Pouco mais adiante, Bicknell & Hoggat (1972, p. 20) recordam a equação $x^2 = x + 1$, com $x \in IR$. Ora, com origem nos argumentos de Álgebra Linear, estabelecemos $Q^{(2)} = Q + I$ ou $Q \cdot (Q - I) = I$ e, por indução, segue que $Q^{(n+2)} = Q^{(n+1)} + Q^{(n)}$. Bicknell & Hoggat expressam a seguinte identidade

$Q^{(n)} = Q \cdot f_n + I \cdot f_{n-1}$ que pode ser verificada também por indução. Com efeito, vejamos que $Q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 0 = Q \cdot f_1 + I \cdot f_0$. E, ao assumirmos o passo de indução matemática obteremos, então que: $Q^{(n+1)} = Q^{(n)} + Q^{(n-1)} =$

$= (Q \cdot f_n + I \cdot f_{n-1}) + (Q \cdot f_{n-1} + I \cdot f_{n-2}) = Q \cdot (f_n + f_{n-1}) + I \cdot (f_{n-1} + f_{n-2}) = Q \cdot f_{n+1} + I \cdot f_n$. Assim, podemos escrever a seguinte combinação de matrizes $Q^{(n+1)} = Q \cdot f_{n+1} + I \cdot f_n$.

Vale comentar ainda que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_{-1} \end{pmatrix}$, aonde, usamos que $Q^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q^{-n} = \left(Q^n\right)^{-1}$. No caso particular, podemos determinar ainda que $Q^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q^{-3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $Q^{-4} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $Q^{-5} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, etc.

Ora, da igualdade anterior, imediatamente, estabelecemos a seguinte igualdade $\begin{pmatrix} f_{-n+1} & f_{-n} \\ f_{-n} & f_{-n-1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det Q^n} \begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(-1)^n} \begin{pmatrix} f_{n-1} & -f_n \\ -f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$. E, assim, comparando os termos correspondentes da 1ª linha e 1ª coluna, inferimos que $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n = (-1)^{n-1} \cdot f_n$, para todo inteiro positivo $n > 0$ e, agora, poderemos denotar $\left(f_n\right)_{n \in Z}$ que constitui uma extensão da SF (ALVES & BORGES NETO, 2011; ALVES, 2016b).

Bicknell & Hoggat (1972, p. 29) estabelecem por indução que $(I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots + Q^n) \cdot (Q - I) = Q^{n+1} - I$. Ora, desde que, a expressão $(Q - I)$ admite a seguinte matriz inversa, que indicaremos por $(Q - I)^{-1} \therefore (I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots + Q^n)$

$=(Q^{n+1}-I)\cdot(Q-I)^{-1}$. Reparemos, todavia, que $(Q-I)^{-1}=Q$, ainda ocorre que $I+(Q+Q^2+Q^3+\cdots+Q^n)=(Q^{n+1}-I)\cdot Q=Q^{n+2}-Q$. Ora, decorre, imediatamente, a seguinte identidade matricial $(Q+Q^2+Q^3+\cdots+Q^n)=Q^{n+2}-(Q+I)=Q^{n+2}-Q^2$.

Mas, com arrimo na igualdade $(Q+Q^2+Q^3+\cdots+Q^n)=Q^{n+2}-Q^2=\begin{pmatrix} f_{n+3} & f_{n+2} \\ f_{n+2} & f_{n+1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} f_{n+3}-2 & f_{n+2}-1 \\ f_{n+2}-1 & f_{n+1}-1\end{pmatrix}$. Enquanto que, ao inspecionarmos o comportamento da seguinte soma de matrizes

$$\sum_{i=1}^{n} Q^i=(Q^1+Q^2+Q^3+\cdots+Q^n)=\begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f_4 & f_3 \\ f_3 & f_2\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{n+1} f_i & \sum_{i=1}^{n} f_i \\ \sum_{i=1}^{n} f_i & \sum_{i=0}^{n-1} f_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{n+3}-2 & f_{n+2}-1 \\ f_{n+2}-1 & f_{n+1}-1\end{pmatrix}$ podemos ver que, nas posições correspondentes à 2ª linha e 1ª coluna, ou 1ª linha e 2ª coluna, ocorrerá a seguinte igualdade $f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n=f_{n+2}-f_2=f_{n+2}-1$, discutidas em poucos livros de HM (HUNTLEY, 1970), todavia, com outra forma de abordagem, distinta da anterior. Outras identidades comentadas por Koshy (2001) e que foram descobertas pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891) como, por exemplo: $\sum_{i=0}^{n} f_{2i}=f_{2n+1}-1$, para $n\in\mathrm{IN}$; $\sum_{i=0}^{n} f_{2i+1}=f_{2n}$, para $n\in\mathrm{IN}$; $\sum_{i=1}^{n} f_i^2=f_n\cdot f_{n+1}$, para $n\in\mathrm{IN}$. Podem ser derivadas empregando-se o mesmo argumento.

E, ainda com auxílio das expressões que indicamos nos parágrafos anteriores, notamos que $Q^{2n}=\left(Q^2\right)^n=\left(Q+I\right)^n\underset{\substack{\exp ansão\\ binomial}}{\overset{teorema}{=}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot Q^i\cdot I^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot Q^i$. Por outro lado, recordando que $Q^{(2n)}=\begin{pmatrix} f_{2n+1} & f_{2n} \\ f_{2n} & f_{2n-1}\end{pmatrix}$, concluiremos que $f_{2n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot f_i$. E, logo em seguida, usando que $Q^p\cdot Q^{2n}=Q^p\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot Q^i=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot Q^{i+p}, n\geq 0$ e p inteiro, Bicknell & Hoggat (1972, p. 30) indicam a descrição, em termos de coeficientes binomiais, do termo de Fibonacci $f_{2n+p}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot f_{i+p}$, e 'p' inteiro qualquer.

Mas, antes de prosseguirmos, vale comentar que Huntley (1970) coloca um problema de ordem histórica que consiste em determinar uma sequência numérica $(a_n)_{\in IN}$, que é tanto geométrica como aditiva. Huntley demonstra resposta afirmativa para o problema, ao fornecer a seguinte sequência: $(1,\phi,\phi^2,\phi^3,\dots,\phi^n,\cdots)$, aonde $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ou seja, o problema admite uma única solução. Não obstante, quando levamos em conta a abordagem matricial e, empregando algumas propriedades elementares utilizadas por Bicknell & Hoggat (1972), podemos verificar que existem infinitas soluções!

Com efeito, na linguagem matricial Ercolano (1976), busca determinar as matrizes $A=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, de modo que $A^2=A+I \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. E, pouco mais adiante, Ercolano (1976, p. 419) desenvolveu pormenorizada análise dos sistemas $\begin{cases}(x+y-1)u=0 \\ v^2-v-1+yu=0\end{cases}, \begin{cases}x^2-x-1+yu=0 \\ (x+v-1)y=0\end{cases}$. Não nos deteremos aqui em seus resultados, entretanto, no caso particular de $y=0$, Ercolano encontrou, como possíveis soluções do problema anterior, o conjunto das seguintes soluções dadas por: $\{\phi_0,\phi_1,\phi_2,\phi_3\}=\left\{\begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \phi' & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \phi' & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix}\right\}$, aonde $\phi'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Por outro lado, o modelo matricial permitiu a obtenção de resultados distinguidos e extensões do próprio conceito de sequência numérica de Fibonacci, originalmente concebido no campo do inteiros positivos mas, que, vale para todos os inteiros. Com efeito, em Hoggat & Bicknell (1973) definem $\begin{cases} f_0(x)=0,\ f_1(x)=1,\ f_2(x)=x \\ f_{n+2}(x)=x\cdot f_{n+1}(x)+f_n(x), \mathrm{n}\geq 0 \end{cases}$, nomeada de Sequência Polinomial de Fibonacci – SPF. Semelhantemente ao caso anterior, empregam a representação matricial $Q_2=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_2(x) & f_1(x) \\ f_1(x) & f_0(x) \end{pmatrix}$, responsável por gerar todos os elementos que listaremos em seguida: $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x),\ldots,\ldots, f_n(x),\ldots$.

Ora, vemos que $Q_2^{\,2} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3(x) & f_2(x) \\ f_2(x) & f_1(x) \end{pmatrix}$. Ora, ao indicar que $Q_2^{\,n} = \begin{pmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ (passo indutivo) e, repetindo um raciocínio passado, constatamos também $Q_2^{\,n+1} = Q_2^{\,n} \cdot Q_2^{\,1} = \begin{pmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xf_{n+1}(x)+f_n(x) & f_{n+1}(x) \\ xf_n(x)+f_{n-1}(x) & f_n(x) \end{pmatrix} \overset{\text{definição}}{\underset{SPF}{=}} \begin{pmatrix} f_{n+2}(x) & f_{n+1}(x) \\ f_{n+1}(x) & f_n(x) \end{pmatrix}$, $n \geq 0$ e decorre semelhante ao caso anterior.

Hoggat & Bicknell (1973) observam ainda que $Q_2^{\,m+n} = \begin{pmatrix} f_{m+n+1}(x) & f_{m+n}(x) \\ f_{m+n}(x) & f_{m+n-1}(x) \end{pmatrix} = Q_2^{\,m} Q_2^{\,n} = \begin{pmatrix} f_{n+1}(x)f_{m+1}(x)+f_n(x)f_m(x) & f_{n+1}(x)f_m(x)+f_n(x)f_{m-1}(x) \\ f_n(x)f_{m+1}(x)+f_{n-1}(x)f_m(x) & f_n(x)f_m(x)+f_{n-1}(x)f_{m-1}(x) \end{pmatrix}$, tal igualdade é suficiente para garantir que $f_{m+n}(x) = f_{n+1}(x)f_m(x)+f_n(x)f_{m-1}(x)$, para $\forall x \in IR$. Para concluir esta seção, recordamos a seguinte descrição matricial $A = \begin{pmatrix} p+q & p \\ p & q \end{pmatrix}$, cujo determinante possui o seguinte comportamento $\det A = \det A = (p+q)q - p^2 = q^2 + pq - p^2 = -(p^2 - pq - q^2) = -d = (-1)^1 \cdot d$, em que $\mathrm{d} = (p^2 - pq - q^2)$, da maneira assumida por Walton & Horadam (1971, p. 265). Ora, é fácil verificar que, no caso de $p = f_1, q = f_0$, estabeleceremos que $A = \begin{pmatrix} p+q & p \\ p & q \end{pmatrix} = Q$. Mas, Walton & Horadam consideram a seguinte relação recursiva: $\begin{cases} H_{n+2} - H_{n+1} - H_n = 0 \\ H_0 = q, H_1 = p, n \in Z \end{cases}$. Decerto que $A^2 = \begin{pmatrix} 2p^2+2pq+q^2 & p^2+2pq \\ p^2+2pq & p^2+q^2 \end{pmatrix}$ e $A^3 = \begin{pmatrix} p^3+3pq^2+q^3 & 3p^2q+3pq^2+2q^3 \\ 3p^2q+3pq^2+2q^3 & p^3+3p^2q+6pq^2+3q^3 \end{pmatrix}$, etc.

Acentuamos que o caso anterior, mencionado por Walton & Horadam, constituem um caso particular de sequências recorrentes. Com efeito, conhecemos a generalização matemática da noção de Sequências Homogêneas Recorrentes Lineares – SHRL e que, quando munimos o conjunto de todas as sequências, de uma certa ordem, produzimos um espaço vetorial (KAUERS & PAULE, 2011, p. 67). Com arrimo de um sistema notacional moderno, escrevemos $a_{n+r} + c_{r-1}a_{n+r-1} + c_{r-1}a_{n+r-1} + \cdots + c_1 a_{n-1} + c_0 a_n = 0$, com

$c_i\text{´}s \in IR$ e $n \geq 0$, $c_0 \neq 0$. Com sustentação desse modelo, poderemos conceber sequências Tribonacci, Tetrabonacci, Pentanacci, Hexanaccci, etc. (ALVES, 2013; 2015; BROUSSEAU, 1967; PARKER, 1964).

Na próxima seção, empregamos um caso particular, na medida em que escrevemos $t_{n+3} - t_{n+2} - t_{n+1} - t_n = 0$, chamada de Sequência Tribonacci - ST. E, com esta temática, Hoggat, Jr. & Bicknell (1973) discutem a versão polinomial da ST, propugnando que: $\begin{cases} t_{-1}(x) = t_0(x) = 0, t_1(x) = 1, t_2(x) = x^2 \\ t_{n+3}(x) = x^2 \cdot t_{n+2}(x) + x \cdot t_{n+1}(x) + t_n(x) \end{cases}$. Nomeada por Sequência Tribonacci Polinomial – STP. Ora, os autores fornecem a seguinte matriz $Q_3(x) = \begin{pmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ geradora dos elementos que indicamos, de modo recursivo, na definição passada, enquanto que, Stakhov (2005a, p. 275) assinala que a matriz $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ permite descrever os elementos da Sequência Numérica de Tribonacci que, em termos numéricos, é indicada por Feinberg (1963, p. 71), logo abaixo, para seus valores iniciais.

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504 ···

Figura 1. Feinberg (1963) discute propriedades da Sequência Tribonacci

No próximo segmento, discutiremos alguns resultados recentes discutidos em artigos especializados da área, envolvendo as representações matriciais de ordem 3x3.

4. ALGUNS RESULTADOS E PROPRIEDADES RECENTES DISCUTIDAS NA LITERATURA

Nessa seção evidenciaremos resultados recentes e intimamente relacionados com alguns elementos discutidos nas seções anteriores. Com efeito, contatamos muitos escritos acadêmicos da década de 70 e 80 (BROUSSEAU, 1974; GOULD, 1981; MOZINGO, 1974), que propugnam as potencialidades da descrição e evolução de instrumentos matriciais para o ataque de antigos e históricos problemas relacionados com o modelo de Fibonacci. Por outro lado, em outros artigos (BASU & DAS, 2014; NALLI, 2006; PRASAD, 20014; STAKHOV, 2005b), constatamos implicações e desdobramentos de tal abordagem em outros ramos do conhecimento matemático (PRASAD, 2014; WANG, 2010).

Por exemplo, podemos formular questionamentos sobre algumas propriedades, num contexto matricial. Nesses termos, Basu & Das (2014, p. 2) escrevem $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_3 & t_2 + t_1 & t_2 \\ t_2 & t_1 + t_0 & t_1 \\ t_1 & t_0 + t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$ e, decerto que, podemos determinar $\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Ora, podemos ainda inferir o comportamento particular de sua matriz inversa que indicam $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\;2} - t_{-1}t_1 & t_{-1}t_2 - t_0t_1 & t_1^{\;2} - t_0t_2 \\ t_1^{\;2} - t_0t_2 & t_0t_3 - t_1t_2 & t_2^{\;2} - t_1t_3 \\ t_0t_2 + t_{-1}t_2 - t_1^2 - t_0t_1 & t_1^{\;2} + t_1t_2 - t_0t_3 - t_{-1}t_3 & t_1t_3 + t_0t_3 - t_2^2 - t_1t_2 \end{pmatrix}$ (BASU & DAS, 2014, p. 4). E, verificamos, ainda, que $\det M^{-1} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$. Agora, poderemos investigar e compreender o comportamento do modelo matricial, na medida em que, aumentamos as potências das matrizes que determinam o modelo da Tribonacci, isto é, sequências recorrentes definidas a partir de três termos antecessores, que indicamos na seção passada por $t_{n+3} - t_{n+2} - t_{n+1} - t_n = 0$, com $n \geq 0$.

Com efeito, podemos verificar, de modo semelhante, que $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_4 & t_3 + t_2 & t_3 \\ t_3 & t_2 + t_1 & t_2 \\ t_2 & t_1 + t_0 & t_1 \end{pmatrix} \therefore \det M^2 = 1$. E, no caso da sua matriz inversa, podemos perceber o que ocorre com o aumento de suas potências

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} t_2^{\;2} - t_0t_2 & t_0t_3 - t_1t_2 & t_2^{\;2} - t_1t_3 \\ t_2^{\;2} - t_1t_3 & t_1t_4 - t_2t_3 & t_3^{\;2} - t_2t_4 \\ t_1t_3 + t_0t_3 - t_2^2 - t_1t_2 & t_2^{\;2} + t_2t_3 - t_1t_4 - t_0t_4 & t_2t_4 + t_1t_4 - t_3^2 - t_2t_3 \end{pmatrix} \therefore \det M^2 = 1$$

Com origem nos resultados preliminares, vejamos o seguinte teorema.

Teorema: Sendo $(t_n)_{n\in IN}$, podemos ver que

(i) $$M^n = \begin{pmatrix} t_{n+2} & t_{n+1}+t_n & t_{n+1} \\ t_{n+1} & t_n+t_{n-1} & t_n \\ t_n & t_{n-1}+t_{n-2} & t_{n-1} \end{pmatrix},$$ aonde $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$ (ii)

$$M^{-n} = \begin{pmatrix} t_{n-1}{}^2 - t_{n-2}t_n & t_{n-2}t_{n+1} - t_{n-1}t_n & t_n{}^2 - t_{n-1}t_{n+1} \\ t_n{}^2 - t_{n-1}t_{n+1} & t_{n-1}t_{n+2} - t_nt_{n+1} & t_{n+1}{}^2 - t_nt_{n+2} \\ t_{n-1}t_{n+1} + t_{n-2}t_{n+1} - t_n^2 - t_{n-1}t_n & t_n{}^2 + t_nt_{n+1} - t_{n-1}t_{n+2} - t_{n-2}t_{n+2} & t_nt_{n+2} + t_{n-1}t_{n+2} - t_{n+1}^2 - t_nt_{n+1} \end{pmatrix},$$ aonde

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ e $n \geq 0$.

Demonstração: Pelo que vimo há pouco, o resultado ocorre para $n=1$ e $n=2$. Logo, assumindo o passo indutivo, vemos que $M^{n+1} = M^nM = \begin{pmatrix} t_{n+2} & t_{n+1}+t_n & t_{n+1} \\ t_{n+1} & t_n+t_{n-1} & t_n \\ t_n & t_{n-1}+t_{n-2} & t_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} t_{n+2}+t_{n+1}+t_n & t_{n+1}+t_n & t_{n+1} \\ t_{n+1} & t_{n+1}+t_n & t_{n+1} \\ t_n+t_{n-1}+t_{n-2} & t_n+t_{n-1}+t_{n-2} & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+3} & t_{n+2}+t_{n+1} & t_{n+2} \\ t_{n+2} & t_{n+1}+t_n & t_{n+1} \\ t_{n+1} & t_n+t_{n-1} & t_n \end{pmatrix}, n \geq 1.$$

E, relativo ao item (ii), já vimos que $n=-1$ e $n=-2$. Mais uma vez, Basu & Das (2014, p. 7) recorrem ao passo indutivo, e escrevem:

$$M^{-(n+1)} = M^{-n}M^{-1} = \begin{pmatrix} t_{n-1}{}^2 - t_{n-2}t_n & t_{n-2}t_{n+1} - t_{n-1}t_n & t_n{}^2 - t_{n-1}t_{n+1} \\ t_n{}^2 - t_{n-1}t_{n+1} & t_{n-1}t_{n+2} - t_nt_{n+1} & t_{n+1}{}^2 - t_nt_{n+2} \\ t_{n-1}t_{n+1} + t_{n-2}t_{n+1} - t_n^2 - t_{n-1}t_n & t_n{}^2 + t_nt_{n+1} - t_{n-1}t_{n+2} - t_{n-2}t_{n+2} & t_nt_{n+2} + t_{n-1}t_{n+2} - t_{n+1}^2 - t_nt_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_n{}^2 - t_{n-1}t_{n+1} & t_{n-1}t_{n+2} - t_nt_{n+1} & t_{n+1}{}^2 - t_nt_{n+2} \\ t_{n+1}{}^2 - t_nt_{n+2} & t_nt_{n+3} - t_{n+1}t_{n+2} & t_{n+2}{}^2 - t_{n+1}t_{n+3} \\ t_nt_{n+2} + t_{n-1}t_{n+2} - t_{n+1}^2 - t_nt_{n+1} & t_{n+1}{}^2 + t_{n+1}t_{n+2} - t_nt_{n+3} - t_{n-1}t_{n+3} & t_{n+1}t_{n+3} + t_nt_{n+3} - t_{n+2}^2 - t_{n+1}t_{n+2} \end{pmatrix}, n > 0.$$

Por fim, Basu & Das (2014, p. 9) enunciam o seguinte lema.

Lema: (1) $M^n = M^{n-1} + M^{n-2} + M^{n-3}$; (2) $M^kM^l = M^lM^k = M^{k+l}$; (3) $\det(M^k) = 1$.

Demonstração: No caso do item (1), vemos que $M^n = \begin{pmatrix} t_{n+2} & t_{n+1}+t_n & t_{n+1} \\ t_{n+1} & t_n+t_{n-1} & t_n \\ t_n & t_{n-1}+t_{n-2} & t_{n-1} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} t_{n+1}+t_k+t_{k-1} & (t_n+t_{k-1}+t_{k-2})+(t_{n-1}+t_{k-2}+t_{k-3}) & t_n+t_{k-1}+t_{k-2} \\ t_n+t_{k-1}+t_{k-2} & (t_{n-1}+t_{k-2}+t_{k-3})+(t_{n-2}+t_{k-3}+t_{k-4}) & t_{n-1}+t_{k-2}+t_{k-3} \\ t_{n-1}+t_{k-2}+t_{k-3} & (t_{n-2}+t_{k-3}+t_{k-4})+(t_{n-3}+t_{k-4}+t_{k-5}) & t_{n-2}+t_{k-3}+t_{k-4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{n+1}+t_k+t_{k-1} & (t_n+t_{k-1})+(t_{k-2}+t_{n-1})+(t_{k-2}+t_{k-3}) & t_n+t_{k-1}+t_{k-2} \\ t_n+t_{k-1}+t_{k-2} & (t_{n-1}+t_{k-2})+(t_{k-3}+t_{n-2})+(t_{k-3}+t_{k-4}) & t_{n-1}+t_{k-2}+t_{k-3} \\ t_{n-1}+t_{k-2}+t_{k-3} & (t_{n-2}+t_{k-3})+(t_{k-4}+t_{n-3})+(t_{k-4}+t_{k-5}) & t_{n-2}+t_{k-3}+t_{k-4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{n+1} & (t_n+t_{k-1}) & t_n \\ t_n & (t_{n-1}+t_{k-2}) & t_{n-1} \\ t_{n-1} & (t_{n-2}+t_{k-3}) & t_{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_k & t_{k-1}+t_{n-2} & t_{k-1} \\ t_{k-1} & t_{k-2}+t_{n-3} & t_{k-2} \\ t_{k-2} & t_{k-3}+t_{n-4} & t_{k-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_{k-1} & t_{k-2}+t_{n-3} & t_{k-2} \\ t_{k-2} & t_{k-3}+t_{n-4} & t_{k-3} \\ t_{k-3} & t_{k-4}+t_{n-5} & t_{k-4} \end{pmatrix} =$$

$= M^{n-1}+M^{n-2}+M^{n-3}$, para todo $n \geq 1$.

No caso do item (3), recordamos que $\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$ e, assim, quando desejamos avaliar $\det M^k = \det\Big(\underbrace{M \cdot M \cdots M}_{k \text{ vezes}}\Big) = \det M \cdots \det M = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$. E, deixamos para o leitor a verificação do item (2), com origem nos argumentos matriciais discutidos na seção anterior. Os resultados anteriores podem ser relacionados com um manuscrito da década de 90, em que Reiter (1993) discute fórmulas de redução e de identidades matriciais.

Mas, retomando a definição da forma matricial relacionada com a SPF, poderemos instigar um exercício investigativo ao avaliar que: ${Q_3}^2 = \begin{pmatrix} x^4+x & x^2 & 1 \\ x^3+1 & x & 0 \\ x^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ${Q_3}^2 = \begin{pmatrix} x^6+2x^3+1 & x^4+x & x^2 \\ x^5+2x^2 & x^3+1 & x \\ x^4+x & x^2 & 1 \end{pmatrix}$, ...E, de modo similar, podemos avaliar a lista: ${Q_3}^2, {Q_3}^3, {Q_3}^4, {Q_3}^5, \ldots, {Q_3}^n, \ldots$. e compreenderemos suas formas de obtenção observando a fig. 2.

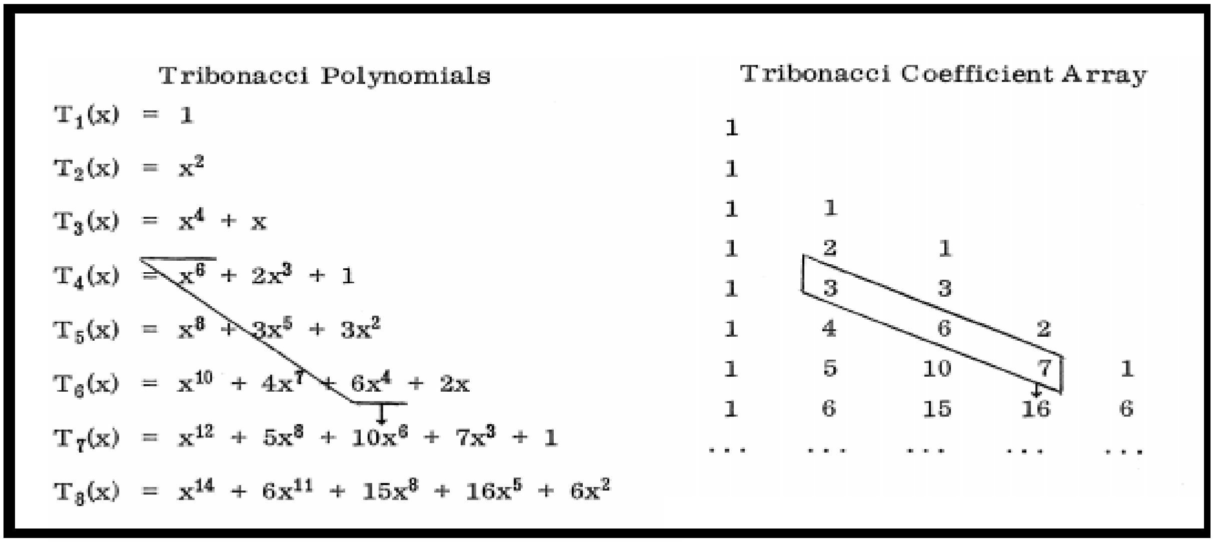

Figura 2. Hoggat & Bicknell (1973) discutem a generalização matricial dos números da Sequência Tribonacci Polinomial – STP

Por outro lado, retomando a definição de STP, elaborada por Hoggat &Bicknell (1973), deparamos a seguinte matriz de ordem '3', indicada por $Q_3^{(n)} = \begin{pmatrix} T_{n+1}(x) & T_n(x) & T_{n-1}(x) \\ x \cdot T_n(x) + T_{n-1}(x) & x \cdot T_{n-1}(x) + T_{n-2}(x) & x \cdot T_{n-2}(x) + T_{n-3}(x) \\ T_n(x) & T_{n-1}(x) & T_{n-2}(x) \end{pmatrix}$, que pode ser verificada, de modo semelhante, por indução matemática.

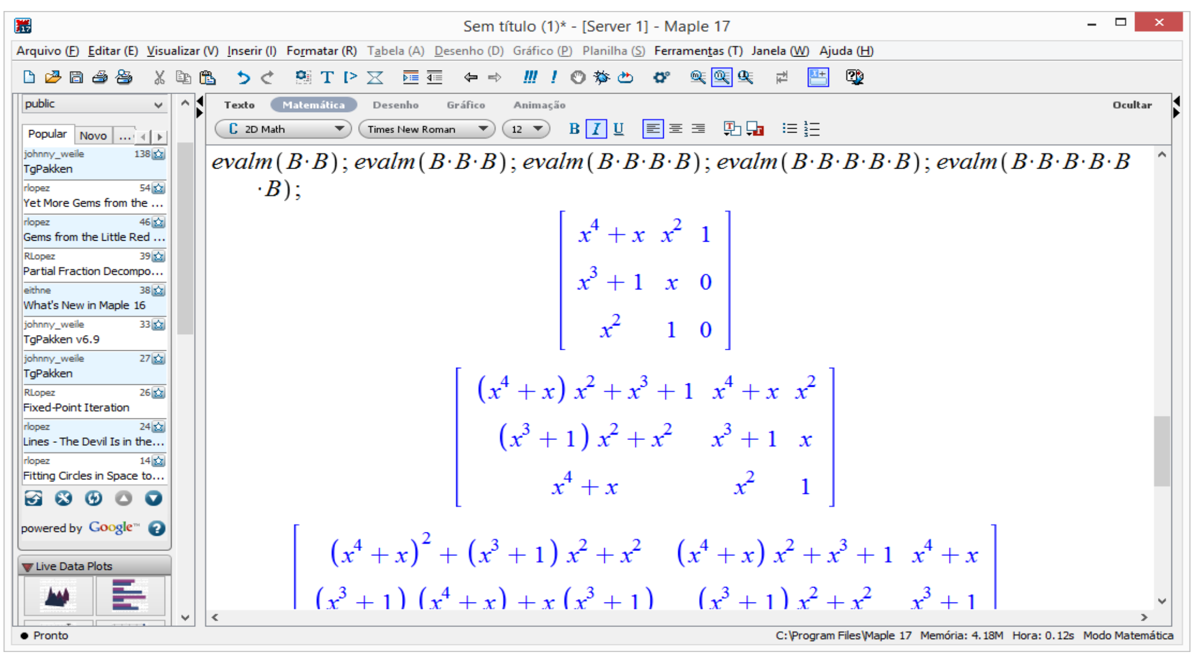

Figura 3. Com o CAS Maple podemos obter potências elevadas da matriz geradora da STP (elaboração do autor)

Enfim, semelhantemente ao entendimento empregado por Alves (2014, p. 47), a tecnologia proporciona um entendimento heurístico da evolução dos conceitos científicos matemáticos e, de modo particular, com o domínio de uma sintaxe introdutória do *CAS Maple* (ver figura 3), poderemos instigar os desdobramentos dos resultados discutidos nas seções passadas no contexto computacional (ALVES, 2014) e a testagem no caso de outras SHRL´s. E, na figura 4, divisamos a extensão e descrição da Sequência Tribonacci para o campo dos números inteiros, isto é, os termos presentes em $\left(t_n\right)_{n\in Z}$. Em termos matriciais, podemos investigar a descrição de matrizes do tipo $Q_3^{-(n)}(x)$, todavia, com o suporte computacional.

k	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_k	7	5	-8	4	1	-3	2	0	-1	1	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81

Figura 4. Basu & Das comenta a evolução dos processos matriciais e indica propriedades relacionadas com a sequência Tribonacci, para índices inteiros

Concluindo, defendemos posição veemente de que os elementos discutidos até aqui permitem estimular concepções adequadas para os nossos estudantes, num âmbito da formação inicial. Assim, respondemos, embora provisoriamente, a nossa questão de investigação, declarada na introdução.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas seções passadas, constatamos as potencialidades da abordagem matricial, no sentido de obter/demonstrar resultados clássicos, que constituem elementos derivados do modelo, originalmente concebido por Leonardo de Fibonacci e significado a partir de um modelo biológico de reprodução de coelhos imortais (ALVES & BORGES NETO, 2011; GULLBERG, 1997). Por outro lado, a observância de elementos relativamente atuais, no âmbito da abordagem matricial, bem como outras abordagens, revelam que seu vigor científico de evolução se mostra indene ao passar dos séculos.

Propugnamos, ao decorrer do escrito, a constatação da verificação/demonstração do alguns resultados clássicos, no que Koshy (2011) e Stakhov (2005a; 2009) denominam de Teoria dos Números de Fibonacci, bem como, roteiros alternativos de demonstração, com o emprego de propriedades, relativamente básicas e acessíveis num contexto de formação inicial de professores, tendo como escopo a sua generalização e abstração.

Por outro lado, os manuscritos explorados no decurso do presente escrito podem assumir o papel de fontes históricas, na perspectiva de Morey (2013) e, dessa forma, auxiliar os processos de ensino e aprendizagem, num ambiente de formação inicial de professores de Matemática, posto que, são instigados e discernir/compreender o caráter ubíquo da Sequência de Fibonacci e a generalização deste modelo em vários outros ramos da Matemática abordada na academia, sobretudo a Teoria da Matrizes, que se mostra ainda atual (STAKHOV, 2009).

Por fim, ainda com o intento de responder ao questionamento formulado na introdução, indicamos aqui alguns elementos teóricos que detêm o potencial de impulsionar um ambiente científico afetado pelo interesse histórico-matemático-epistemológico em foco, a saber (ver fig. 5)

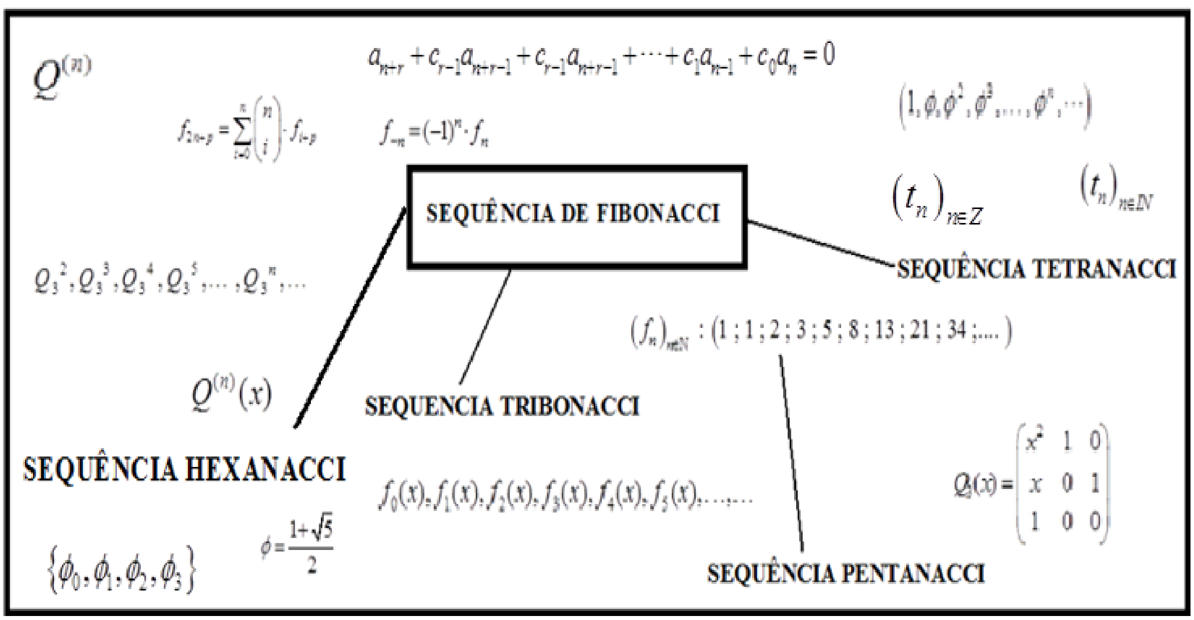

Figura 5. Relações teórico-notacionais proporcionadas com a generalização do modelo (elaboração do autor)

(i) o entendimento da evolução constante do modelo de Fibonacci condicionado pela evolução de um sistema notacional e simbólico;

(ii) o entendimento das imbricações com outros ramos especializados em Matemática Pura (Álgebra Linear, Teoria Combinatória, Teoria dos Números, Teoria dos Números de Fibonacci, Sistemas Dinâmicos, etc);

(iii) descrições e ressignificações do modelo histórico com o arrimo na tecnologia atual (ALVES, 2013; 2014; 2016a; 2016b; 2016c);

(iv) adaptações metodológicas de modelos matemático-formais que extrapolam um contexto de formação inicial de professores de Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Francisco. R. V. & BORGES NETO, H. A existência da Sequência de Fibonacci no campo dos Inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. *Boletim GEPEM*. vol. 1, nº 53. 135 – 140, 2011.

ALVES, Francisco. R. V. & SANTOS, Arlem, A. O estudo e o ensino da Sequência de Fibonacci numa abordagem atualizada. *Revista THEMA,* v. 13, nº 2, 42 – 53, 2016.

ALVES, Francisco, R. V. Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci na disciplina de História da Matemática: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 18, nº 1, 61 – 93, 2016a.

ALVES, Francisco, R. V. Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da Sequência Generalizada de Fibonacci. *Boletim GEPEM*, nº 68, 1 – 5, 2016b.

ALVES, Francisco, R. V. Sequência Generalizada de Pell – SGP: aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. *Revista THEMA*. v. 13, nº 2, 27 – 41, 2016c.

ALVES, Francisco. R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. *VYDIA Educação*. v. 35, nº 1, 133 – 146, 2015.

ALVES, Francisco. R. V. Exploração didática no ensino de Séries: o caso dos softwares Geogebra e do CAS Maple. *Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista*, v. 4, nº 1, 33 – 49, 2014.

ALVES, Francisco. R. V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de Fibonacci apoiada na tecnologia. *Anais do VI HTEM – Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, 1 – 12, 2013. Disponível em: http://htem2013.dm.ufscar.br/. Acessado em: 12/10/2015.

ARCAVI, Abraham. & ISODA, Masami. Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educarional Studies in Mathematics*, nº 66, 111 – 129, 2007.

BARONI, Rosa, L. S; TEIXEIRA, M. V. & NOBRE, Sergio. História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. *Boletim de Educação Matemática*, v. 25, nº 41, 153 – 171, 2011.

BASU, Manjusri. & DAS, Monogit. Tribonacci matrices and a new coding theory. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*. v. 6, nº 1, 1 – 17, 2014.

BASIN, S. L. & HOGGAT, Vernner. Jr. A Matrix Which Generates Fibonacci Identities. In: BICKNELL, Marjorie. & HOGGAT, Vernner. Jr. (1972). *A Primer for the Fibonacci Numbers*. San Clara: Santa Clara California, 18 – 23, 1972.

BICKNELL, Marjorie. Fibonacci Fantasy: The Square Root of the Q Matrix. *The Fibonacci Quarterly*, v. 3, nº 1, 67 – 71, 1965.

BICKNELL, Marjorie. A short history of the Fibonacci Quarterly. *The Fibonacci Quarterly*, v. 25, nº 1, 1 – 6, 1987.

BICKNELL, Marjorie. & HOGGATT, Jr. E. Fibonacci Matrices and Lambda Functions. *The Fibonacci Quarterly*, v. 1, nº 2, 47 – 52, 1963.

BICKNELL, Marjorie. & HOGGATT, Jr. E. *A primer for the Fibonacci Numbers*. Santa Clara: Santa Clara University, 11972.

BICKNELL, Marjorie. A Short History of The Fibonacci Quarterly. *The Fibonacci Quarterly*, v. 25, nº 1, 2 - 6, 1987.

BOLAT, Cennet. & KÖSE, Hasan. On the Properties of k-Fibonacci Numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, v. 5, nº 2, p. 1097 – 1105, 2010.

BOLL, Marcel. *Histoire de Mathematiques*. Onzième édition. Paris: Presses Universitaire de France, 1968.

BROUSSEAU, Brother. A. A Fibonacci generalization. *The Fibonacci Quarterly*. **v. 5, nº 2**, April, 171 – 175, 1967.

BROUSSEAU, Brother. A. 1974. Algorithms for Third-Order Recursion Sequences. *The Fibonacci Quarterly*. v. 12, nº 2, April, 167 – 175, 1974.

ERCOLANO, Jospeph. Golden sequences of Matrices with applications to Fibonacci Algebra. *The Fibonacci Quarterly*, v. 14, nº 5, 419 – 427, 1976.

ESTRADA, et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EVES, Howard. *An introduction to the History of Mathematics*. Third edition. New York: Holt, Hinehart and Winston, 1969.

FAUVEL, John. & VAN MAANEN, Jan. *History of Mathematics Education*. New York: Klumer Academic Publishers, 2000.

FEINBERG, Mark. Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*, v. 1, nº 3,71 – 74, 1963.

GOULD, H. W. A History of the Fibonacci Q-Matrix. *The Fibonacci Quarterly*, v. 19, nº 3, 250 – 257, 1981.

GULLBERG, Jan. *Mathematics: from the birth of numbers*. New York: W. W. Norton & Company, 1997.

HOGGAT, Jr. V. E. & BICKNELL, Marjorie. Generalized Fibonacci Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, v. 11, nº 5, December, 457 – 466, 1973

HERZ, Fischler, R. *A mathematical history of Golden Number*. New York: Dover Publications Inc., 1998

HUNTLEY, H. E. *The divine proportion: a study in mathematical beauty*. New York: Dover Publications Inc., 1970.

KAUERS, Manuel. & PAULE, Peter. *The Concrete Tetrahedron: symbolic sums, Recurrence equations, Generating Functions, Assymptotic Estimates*. Nova York: Springer. Texts & Monographs in Symbolic Compations, 2011.

KOSHY. Thomas. *Elementary Number Theory and Applications*. Second Edition. New York: Elsevier, 2007.

KOSHY, Thomas. *Fibonacci and Lucas Numbers with Appllications*. New York: Wiley and Sons publications, 2001.

LIMA, Elon. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MARTINJAK, Ivica. & URBIHA, Igor. A new Generalized Cassini Determinant. *ARXIV*, Cornell: Cornell Univesity Library, 1 – 10, 2015.

MOREY, Bernadete. Fontes históricas nas salas de aula de Matemática: o que dizem os estudos internacionais. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 13, nº 26, 73 – 83, 2013.

MOZINGO, M. G. On Extending the Fibonacci Numbers to the Negative Integers. *The Fibonacci Quarterly*. v. 12, nº 3, October, 292 – 293, 1974.

NALLI, Ayse. On the Hadamard Product of Fibonacci $Q^{(n)}$ matrix and Fibonacci $Q^{-(n)}$ matrix. *International Journal Contemporary Mathematics Sciences*. v. 1, nº 16, 753 – 761, 2006.

NALLI, Ayse. & HAUKKANEN, Pentti. On generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Chaos, Solitions and Fractals*, v. 42, 3179 – 3186, 2009.

NOBRE, Sergio. Leitura crítica da História: reflexões sobre a história da matemática. *Ciência e Educação*, v. 10, nº 3, 531 – 543, 2003.

PARKER, Francis. D. On The General Term of A Recursive Sequence. *The Fibonacci Quarterly*. v. 2, nº 1, February, 67 – 72, 1964.

PRASAD, Bandhu. Fibonacci Matrices and Hybrid Matrix Cryptpgraphy. *Discrete Mathematics*, Algorithms and Applications. v. 6, nº 1, 1 – 10, 2014.

REITER, Clifford, A. Fibonacci Numbers: Reduction Formulas and Short Periods. *The Fibonacci Quarterly*. v. 31, nº 4, November, 315 – 325, 1993.

STAKHOV, Alexey. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in Mathematics, Science and Engineering. *Chaos, Solitions and Fractals*, v. 26, 263 – 289, 2005a.

STAKHOV, Alexey. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in Mathematics, Science and Engineering. In: Chaos, Solitions and Fractals, v. 26, 263 – 289, 2005b.

STAKHOV, Alexey. *The mathematics of harmony: from Euclid to contemporary mathematics and computer science*. London: World Scientific Publishers, 2009.

VOLL, Nils, G. The Cassini Identity and Its Relatives. *The Fibonacci Quartely*, v. 48, nº 3, 197 – 202.

WALTON, J. E. & HORADAM, A. F. Some Properties of Certain Generalized Fibonacci Matrices. *The Fibonacci Quarterly*, v. 9, nº 3, 264 – 277, 1971.

WANG, Xing-Yuang. & GE, Feng-Dan. The Quase-Sine Fibonacci Hyperbolic Dynamic System. *FRACTALS*, v. 18, nº 1, 45 – 51, 2010.