



CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Um estudo à luz da Teoria dos Campos Conceituais envolvendo o uso de materiais concretos em problemas de contagem.

A study in the light of the theory of conceptual fields involving the concrete use of materials in counting problems.

Rodrigo Sychocki da Silva¹; Carla Fabiane Bonatto²; Michelsch João da Silva³

RESUMO

No ano de 2014, enquanto docente em uma turma regular de ensino médio, ocorreu o ensino das técnicas de contagem com o uso de fórmulas e algoritmos, sendo que os resultados observados mostraram-se insuficientes em termos de aprendizagem e construção dos conceitos matemáticos. Este artigo tem como objetivo relatar um estudo de caso realizado com estudantes do Ensino Médio de uma escola da rede pública de ensino da cidade de Caxias do Sul, no ano de 2015, onde foram utilizados materiais concretos na investigação de problemas. A partir das produções dos estudantes usou-se a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud para analisar o desenvolvimento dos sujeitos participantes da sequência de atividades. As reflexões a partir da pesquisa mostraram que ao utilizar materiais concretos na investigação de problemas envolvendo contagem além de viabilizar uma construção significativa de conceitos, explicita o papel do estudante enquanto agente ativo no processo de construção dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: *Aprendizagem Matemática, Campos Conceituais, Contagem, Material Concreto.*

ABSTRACT

In 2014, while teaching in a regular class of high school, it was the teaching of counting techniques using formulas and algorithms, and the observed results were insufficient in terms of learning and construction of mathematical concepts. This article aims to report a case study of high school students in a public school schools in the city of Caxias do Sul, in 2015, where concrete materials research problems were used. In all, developed and implemented five activities with the students, all making use of concrete material. From the productions of the students used the Theory of Vergnaud's Conceptual Fields to analyze the development of the subjects participating in the sequence of activities. The reflections from the research showed that when using concrete materials research problems involving counting as well as providing a significant building concepts, explains the role of the student as an active agent in the construction of mathematical concepts process.

Keywords: *Learning Mathematics, Conceptual Fields, Score, Concrete material.*

¹ IME/UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS – Brasil.

² Secretaria de Educação do Estado do Rio Grande do Sul, Caxias do Sul/RS – Brasil.

³ IFRS – Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Canoas/RS – Brasil.

1. INTRODUÇÃO: FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

O presente artigo, resultado de uma pesquisa de trabalho de conclusão no curso de Licenciatura em Matemática, tem por objetivo apresentar um estudo de caso à luz da teoria dos campos conceituais realizado com estudantes do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de ensino da cidade de Caxias do Sul.

Visualizou-se como possibilidade a inserção e uso de materiais concretos no ensino de Análise Combinatória⁴, visando contribuir na construção dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes envolvidos. A partir disso, elaborou-se a seguinte questão norteadora para a pesquisa: À luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, como a utilização de material concreto em uma sequência de atividades contribui na construção e aprendizagem dos conceitos referentes à contagem?

A motivação para este trabalho surgiu a partir de uma experiência vivenciada no terceiro trimestre do ano de 2014, quando Carla Fabiane Bonatto, um dos autores deste artigo, apresentou aos estudantes de uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino, no município de Caxias do Sul (RS), o conceito matemático de contagem por meio da aplicação de fórmulas. Na ocasião os estudantes relataram algumas dificuldades na leitura, interpretação, desenvolvimento e compreensão dos problemas que envolviam conceitos de arranjo, permutação e combinação.

Ao verificar as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) sobre o ensino de contagem constata-se a importância da discussão da mesma, uma vez que:

"[...] O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias." (BRASIL, 2006, p.78-79)

A partir disso, questionou-se sobre a possibilidade de outra forma de abordagem deste conteúdo objetivando qualificar o desenvolvimento das formas de pensamento por parte dos estudantes. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000) deve-se dar atenção especial ao método de abordagem no ensino de contagem, oportunizando aos estudantes momentos que eles possam desenvolver estratégias de descrever e analisar as informações dispostas nos problemas.

Com base nos fatos apresentados, este texto reflete como o assunto contagem possa ser introduzido por meio do uso de materiais concretos, observando-se o processo de raciocínio dos estudantes envolvidos. Cardoso e Guirado (2007) contribuem:

"A resolução de um problema de Análise Combinatória, sem o compromisso de utilização de fórmulas, promove o pensar, de forma criativa e crítica, num ambiente lúdico. Assim, este conteúdo passa a ser visto, não mais como algo que inspira receio, mas configura-se como algo atraente e estimulante,

⁴Ao longo do texto preferiu-se utilizar a expressão "contagem" para designar "Análise Combinatória", uma vez que se entende que a primeira expressão representa um conjunto de situações mais amplo que o segundo.

*despertando a atenção e o raciocínio, conduzindo o aluno à autonomia.”
(CARDOSO E GUIRADO, 2007, p.1)*

O material concreto foi o ponto de partida para a abordagem do objeto matemático contagem. Durante a execução da atividade os estudantes foram incentivados a manipular os materiais, participando ativamente da proposta. Levando-se em consideração as construções feitas pelos estudantes, e considerando que o processo aconteceu gradativamente, a atividade permitiu a construção dos conceitos dando sentido e significado aos mesmos. Deste modo, procurou-se descentralizar o assunto da simples apresentação de fórmulas matemáticas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção são apresentadas e analisadas pesquisas sobre o assunto e que vem ao encontro da proposta. Verificou-se na literatura que ao fazer uso de materiais concretos e problemas no ensino da contagem, as reflexões dos autores contribuem nas discussões teórico–metodológicas sobre o ensino e aprendizagem deste conteúdo na educação básica.

Carvalho (2007) reflete que a utilização de materiais concretos no ensino de contagem por meio da abordagem de problemas relacionados tanto à educação quanto às práticas pedagógicas do professor, contribuem na aprendizagem dos estudantes. A autora conclui que o professor deve desenvolver seu trabalho de forma aplicada e direcionada para a realidade e vivências no qual os estudantes estão inseridos. Na concepção da autora a utilização de materiais concretos contribui na obtenção de resultados satisfatórios, pois possibilitam envolvimento e participação ativa dos estudantes nas atividades, contribuindo para diminuir as dificuldades observadas no processo de compreensão dos conceitos matemáticos.

Neste sentido Dias e Moreira (2010), em sua pesquisa, constataram em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental que a utilização de diferentes materiais possibilitou que os estudantes desenvolvessem a capacidade de sistematizar e construir conhecimentos a partir da investigação de diversas situações. Contatou-se na ocasião que à medida que os estudantes avançavam para atingir um objetivo comum, os mesmos ampliavam o leque de possíveis representações sobre os problemas de contagem, tornando o ambiente de sala de aula mais participativo.

Na pesquisa de Silva (2010), no qual consiste um estudo de caso com estudantes do Ensino Médio, foi aplicada uma oficina com dois jogos, o jogo da senha e do Bicolorido, ambos envolvendo contagem. A partir desta oficina a autora avaliou o desenvolvimento do raciocínio combinatório manifestado pelos estudantes constatando que o ensino direcionado à aplicação de fórmulas não possibilitou o desenvolvimento do pensamento combinatório. Ressalta-se que na visão da autora, é importante oportunizar aos estudantes conhecer e agir sobre diferentes formas e situações que envolvam problemas, para que assim o estudante seja capaz de desenvolver formas de construir e argumentar sobre soluções propostas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Plus (PCN+) para o Ensino Médio, também expõe que a resolução de problemas contribua para o desenvolvimento dos estudantes:

"A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos

e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.” (BRASIL, 2002, p.112-113)

Esse aspecto foi observado na pesquisa de Gonçalves (2014). A autora concluiu que o ensino de contagem no Ensino Médio deva ocorrer a partir de problemas. Ela destaca ser importante e necessário tratar dos conceitos básicos de contagem desde as séries iniciais do ensino fundamental, a fim de contribuir para uma melhor compreensão. Nesta linha de pensamento, Santana & Oliveira (2015) refletem sobre o uso de problemas e o desenvolvimento do pensamento combinatório:

“Para resolver as situações-problema de combinatória é preciso que se tenha compreensão plena da situação apresentada e, nesta perspectiva, não é possível apenas focar o uso de fórmulas de forma mecânica sem envolver o estudante numa análise detalhada da situação de modo a trabalhar o raciocínio combinatório.” (SANDRA & OLIVEIRA, 2015, p. 4)

Segundo Duro (2012), no momento em que o estudante está diante de uma determinada situação ou problema, o mesmo se sente provocado. O conflito cognitivo estabelece uma ligação com o campo do significado dando sentido ao mesmo. A teoria usada pela autora (construtivismo piagetiano) permitiu que autora destacasse que “a construção da combinatória passa por patamares de equilíbrio que independem da idade ou série do aluno.” (DURO, 2012, p.100). Para a autora, é a partir da ação do sujeito que se dá a aprendizagem e por meio da interação entre sujeito e os objetos (físicos ou mentais) que é possível construir conhecimentos.

Outro aspecto sobre o ensino e aprendizagem de contagem é sobre o uso de material concreto como um recurso didático. Tal aspecto foi observado no trabalho de Costa (2013), o qual a autora propõe uma sequência de oito atividades-problemas. Na elaboração das atividades a autora fez uso de materiais concretos e problemas que relacionavam o dia-a-dia dos estudantes. Com isso, Costa (2013) acredita que a aprendizagem se torna significativa quando se faz uso de estratégias de investigação, discussão e trabalho em grupo.

Converge-se neste aspecto a pesquisa de Vazquez (2011), na qual a autora faz uso de material concreto e problemas inseridos no cotidiano para o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes em contagem. A autora pôde constatar que por meio da utilização dos materiais concretos nas aulas de contagem, em relação aos anos anteriores, ocorreu um ganho qualitativo em termos da aprendizagem dos estudantes.

Percebe-se, dessa forma, que há consenso entre os autores consultados e citados que o ensino de contagem deva ocorrer a partir de problemas direcionados para a contextualização. E que também a utilização de material concreto, possa contribuir no processo de construção do raciocínio combinatório, no qual os estudantes participam ativamente, por meio da manipulação, discussão e elaboração de estratégias na resolução.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: CAMPOS CONCEITUAIS DE G. VERGNAUD

A partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud⁵ constrói-se a segunda parte da fundamentação teórica do presente artigo. Acredita-se que tal teoria proporcionará meios para que se possa fazer uma análise da produção dos estudantes ao longo das atividades propostas.

Segundo Moreira (2002, p. 8) a definição de campo conceitual para Vergnaud é “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição”. A construção do conhecimento para Vergnaud (1996) ocorre com o passar do tempo, sendo um processo gradativo e evolutivo relacionando experiência e aprendizagem.

Na Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1996) chama de esquema a organização invariante da conduta para uma dada classe de situações. Diante dos esquemas devem-se mobilizar os conhecimentos em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitam operacionalização sobre os objetos. No momento em que os estudantes estão diante de uma situação nova, é que o esquema se transforma e se reformula, aperfeiçoando as relações pré-existentes, isto é, aprimorando as existentes que dão lugar às novas relações e esquemas melhorados.

São os esquemas que oportunizam aos estudantes terem ou não condições de solucionarem determinadas situações. Quando o estudante faz uso de um esquema ineficiente o insucesso leva-o a mudá-lo ou reformulá-lo, e é por meio da utilização e da reformulação de esquemas que se processa um possível desenvolvimento cognitivo. Isto influencia diretamente os conceitos em ação e teoremas em ação, os quais são os conhecimentos organizados diante de uma situação específica. Como componentes de constituição do esquema, pode-se ter: objetivo, subobjetivos e antecipações; regras de ação, tomada de informações e controle; invariantes operacionais e possibilidade de inferências em situações.

A partir da definição exposta antes se observa que um esquema possa ser entendido como uma classe de situações e não a partir de uma produção isolada. Os esquemas podem mudar de acordo com a mudança da situação. O que se altera em uma situação não são as condutas observáveis e sim a organização. Portanto, uma possível função do esquema seria organizar as atividades de pensamentos envolvidas nos problemas.

O objetivo e suas divisões em subcategorias desempenham funções importantes, pois são estes que permitem diferenciar as condutas durante a construção da solução para o problema. As regras de ação e tomada de informações são responsáveis pela geração do esquema, pois a conduta não é constituída apenas de ações e sim da coleta e seleção de informações, assim como os controles que permitem o sujeito refletir sobre o que está fazendo.

Considera-se importante que o professor observe e reflita sobre os procedimentos, algoritmos e esquemas produzidos pelos estudantes nas situações as quais estão inseridos na sala de aula. Os registros produzidos nesses processos são imagens parciais de processos mais amplos e abstratos, onde tais registros, geralmente, não traduzem as atividades em sua totalidade, apenas em parte. Portanto, na teoria dos campos conceituais de Vergnaud o conceito de esquema desempenha função

⁵Gérard Vergnaud, matemático, filósofo e psicólogo francês, diretor emérito de estudos do Centro Nacional de Pesquisas Científicas (CNRS), em Paris. Disponível em: <https://www.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/7149/a-matematica-alem-dos-numeros.aspx>. Acesso em: 06 outubro de 2016.

importante no processo de apropriação dos conceitos matemáticos pelos estudantes, pois permite que eles reflitam e tomem consciência dos caminhos que percorreram durante a reflexão sobre os problemas.

Neste contexto, a escola passa a ser considerado um local de produção do conhecimento matemático e não somente de reprodução, que valoriza a produção feita pelos estudantes. Ao reconhecer as produções dos estudantes, ocorre uma desestabilização do professor, que descobre em cada sujeito uma nova forma de pensar sobre situações que envolvam matemática, onde ao construir o método de resolução, oportuniza-se aos mesmos que sejam capazes de registrar e argumentar logicamente em uma determinada situação.

Ainda na Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1996 p.166) propõe que um conceito é constituído de três conjuntos, a saber: referência, significado e significante. Propõe-se a seguir explicar, de modo resumido, cada um dos conjuntos definidos por Vergnaud.

- Referência: é o conjunto de situações que darão sentido ao conceito. Para Vergnaud (1996) a construção do conhecimento só tem validade se for exposto por meio de diferentes situações provendo base no qual permita que os estudantes façam correspondências entre as situações e o conceito. Com essa ideia, torna-se aceitável que um conceito não seja válido a partir da investigação de uma única situação.

- Significado: conjunto dos invariantes operatórios (conceito em ação e teorema em ação), relacionados ao conceito. São os conhecimentos que o estudante faz uso para agir com as situações do primeiro conjunto.

Os conceitos em ação são atitudes que permitem ao sujeito selecionar as informações relevantes para a produção de uma solução de acordo com os seus objetivos. Os conceitos também permitem que o sujeito determine as propriedades e relações que o auxiliem na resolução de um problema, ou seja, o conceito em ação ainda pode ser considerado uma ação pertinente no contexto de um problema.

Vergnaud (1996) diferencia dois tipos de invariantes operatórios: os teoremas em ação e os conceitos em ação, os quais orientam os estudantes diante das situações-problema. Os teoremas em ação norteiam-se em torno das situações específicas que orientam a atividade, admitida pelo estudante como verdadeira, desta forma pode-se dizer que é válida apenas para um determinado conjunto de situações e nem sempre são generalizáveis. Na disciplina de matemática, pode-se relacionar um teorema em ação como sendo o conjunto das operações ou procedimentos utilizados em uma determinada situação.

– Significante: conjunto das formas de representação simbólica (linguística ou não) do conceito, de suas propriedades, das situações e dos procedimentos utilizados para o tratamento das situações. É o conjunto que engloba as diferentes formas de representação de um conceito.

Segundo Carvalho (2007) a teoria dos campos conceituais afirma que o ponto fundamental da cognição é o processo de conceitualização do real, atividade psicológica interna ao sujeito que não pode ser reduzida nem a operações lógicas gerais, tampouco às operações puramente linguísticas. Nota-se que diante de uma nova situação o sujeito mobiliza os seus esquemas na direção da assimilação do problema. Trata-se de um complexo jogo de construções e reconstruções das

estruturas cognitivas, onde uma parte do sujeito acredita que ele já tenha condições ou conhecimentos para resolver tal impasse e a outra parte do sujeito acredita que ele pode com sua carga de conhecimento manipular conceitos e teoremas que por meio da sua ação são capazes de conduzi-lo na direção da construção da solução. Conclui-se que em ambas as situações o sujeito vivencia um processo de (re)construções de conhecimentos que são capazes de colaborar na elaboração do significado dos conceitos.

Para Moreira (2002) há uma relação dialética entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Conceitos em ação são elementos necessários na construção de proposições. Porém, para o autor, conceitos não são teoremas, pois não permitem derivações (inferências ou computações); derivações requerem proposições. Proposições podem ser verdadeiras ou falsas; conceitos podem ser apenas relevantes ou irrelevantes. Deste modo não é possível que existam proposições sem conceitos.

O autor ainda considera que para Vergnaud que não há conceito sem proposição, pois a partir da necessidade de representar o mundo e de ter concepções verdadeiras do mundo que tornam necessários os conceitos. Para o autor, um modelo computável do conhecimento intuitivo deve compreender conceitos-em-ação e teoremas-em-ação como elementos dos esquemas. Portanto, entende-se que os esquemas sejam essenciais porque geram ações, incluindo operações intelectuais, mas podem também gerá-las porque contêm invariantes operatórios, teoremas e conceitos-em-ação, os quais constituem o núcleo da representação. A partir das ideias e conceitos explanados na presente seção, a seguir discute-se os procedimentos metodológicos e os caminhos para o desenvolvimento da pesquisa.

4. OS CAMINHOS DA PESQUISA: FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

Diante da construção teórica do problema de pesquisa optou-se pela pesquisa exploratória. Segundo Gil (2010, p.27):

"As pesquisas exploratórias têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Seu planejamento tende a ser bem flexível, pois interessa considerar os mais variados aspectos relativos ao fato ou fenômeno estudado."

Na pesquisa exploratória desenvolvem-se métodos para esclarecer conceitos e ideias, visando que por meio de situações-problema seja possível analisar os dados e informações. Além disso, outra característica da pesquisa exploratória é que a mesma ocorre no ambiente onde o caso será analisado. De acordo com Marconi e Lakatos (2003, p.188):

"São investigações de pesquisa empírica cujo objetivo é a formulação de questões ou de um problema, com tripla finalidade: desenvolver hipóteses, aumentar a familiaridade do pesquisador com um ambiente, fato ou fenômeno, para a realização de uma pesquisa futura mais precisa ou modificar e clarificar conceitos."

Por nossa pesquisa ser específica dentro de um contexto mais amplo, a saber, o ensino de técnicas de contagem, e com o público alvo definido, acredita-se que ela possa ser caracterizada como um estudo de caso. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p.110),

"O estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando as interpretações ou a análise do objeto, no contexto onde ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização."

A pesquisa caracterizou-se por ser de natureza qualitativa, visto que se utilizou do método descritivo, possibilitando desta forma uma análise detalhada das relações estabelecidas entre o objeto matemático e os estudantes envolvidos. O estudo de caso tem como uma de suas características o fato do estudo ocorrer diretamente no ambiente pesquisado. Nesse contexto, este estudo se preocupa em conhecer mais especificamente como e porque os fatos acontecem no ambiente analisado.

Yin (2001, p. 32) define estudo de caso como "uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos". Em suma, é um método que consiste em investigar na prática e na observação um determinado caso, denotando-se assim como uma pesquisa de campo.

O estudo de caso pode ser de caráter exploratório, visando adquirir informações sobre as relações entre os estudantes e o conteúdo explorado. Segundo Ponte (1994, p.10) usa-se o estudo de caso para:

"[...] compreender a especificidade de uma dada situação ou fenômeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas. O seu objetivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico."

Optou-se por este tipo de estudo, pois, na execução do projeto buscou-se analisar e refletir como o estudante do Ensino Médio compreende contagem fazendo uso de material concreto na resolução de problemas. As atividades foram organizadas, inicialmente, com a apresentação da situação-problema e entrega dos materiais concretos.

A pesquisa ocorreu na instituição Estadual de Ensino Médio Melvin Jones. Esta é uma instituição da rede pública de ensino do estado do Rio Grande do Sul, situada no município de Caxias de Sul. A escolha desta referida escola se deu em função da autora do presente artigo ser integrante do corpo docente da respectiva instituição. A turma escolhida para realizar esta pesquisa foi uma turma do segundo ano do Ensino Médio do turno manhã, constituída por 25 estudantes.

Estimou-se que o tempo para a execução da sequência de atividades propostas fosse de cinco semanas, nas aulas regulares da disciplina de Matemática. No decorrer das atividades, foram disponibilizados papel e caneta para os grupos registrarem os procedimentos utilizados na resolução dos problemas. Também por meio desse material, foi possível coletar as informações que seriam utilizadas posteriormente nas análises dos dados.

Os estudantes foram divididos em cinco grupos. Cada grupo foi constituído de cinco estudantes, os grupos foram respectivamente identificados como A, B, C, D e E para preservar a identificação e o anonimato. Os registros que os grupos fizeram em cada atividade serviram de dados para a análise no desenvolvimento do pensamento e estratégias na resolução dos problemas. Após a execução das atividades os estudantes foram estimulados a fazer uma reflexão sobre o que aprenderam e qual a estratégia que desenvolveram na resolução das situações-problema.

A partir de agora esboçamos quais foram as cinco atividades planejadas e executadas, bem como qual o material concreto que foi produzido e utilizado com os estudantes. Os problemas que englobam cada atividade percorrem de forma gradativa e evolutiva o pensamento combinatório com o uso de material concreto.

Primeira atividade: Começou com a exposição de imagens sobre registros e uma sucinta explicação sobre a história da contagem percorrendo desde a pré-história até os tempos atuais, enfatizando o significado e a importância do estudo de contagem. O material concreto usado nesta atividade foi confeccionado em E.V.A. (Espuma Vinílica Acetinada), sendo composto de: boneco, cinco camisas, três bermudas e dois pares de sapatos. A situação-problema consistia em analisar de quantas formas tal boneco poderia ser vestido usando as roupas e sapatos disponíveis.

Figura 1: Material concreto da primeira atividade.



Fonte: Arquivo pessoal.

Segunda atividade: Consistiu em analisar de quantas formas poderia ser preenchido um porta-retrato dispondo-se de imagens. O material concreto utilizado foi imagens impressas e portas retratos confeccionados de E.V.A.

Figura 2: Material concreto da segunda atividade.



Fonte: Arquivo pessoal.

Terceira atividade: Composta de seis imagens distintas impressas em papel, os estudantes deveriam analisar a seguinte situação: Em uma escola foi realizado um concurso para eleger quatro melhores desenhos que os estudantes criaram na disciplina de Artes para a confecção da agenda do ano seguinte. Um dos desenhos será a capa e o outro a contracapa da respectiva agenda. De quantas formas podemos montar essa agenda?

Figura 3: Material concreto da terceira atividade.



Fonte: Arquivo pessoal.

Quarta atividade: O material concreto desta atividade foi constituído de cartelas contendo letras impressas. A proposta era analisar quantas reorganizações das letras possivelmente poderiam ser feitas com as letras das palavras AZUL e CINZA. A reorganização poderia resultar em palavras com ou sem significado.

Figura 4: Material concreto da quarta atividade.



Fonte: Arquivo pessoal.

Quinta atividade: A quinta e última atividade elaborada para trabalhar contagem consistiu no problema de permutação circular. O material concreto foi confeccionado com tecidos de cores e estampas diferentes, algodão, linha, lã, fita mimososa, cola quente, caneta permanente, E.V.A. e isopor. A situação consistia em analisar a seguinte situação: Uma família é composta por seis pessoas (o pai, a mãe e quatro filhos). Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa?

Figura 5: Material concreto da quinta atividade.



Fonte: Arquivo pessoal.

É importante mencionar que pela organização dos estudantes, as atividades ocorreram em grupos (A, B, C, D, E). Logo, o material concreto produzido pela professora e pesquisadora foi organizado na forma de *kits* e disponibilizado aos grupos durante as aulas em que a pesquisa ocorreu. Ao final da pesquisa todo o material concreto foi doado ao Laboratório de Matemática da Instituição de Ensino Superior⁶, a qual a professora estava vinculada na graduação.

5. OS ACHADOS DA PESQUISA: UM RECORTE E ANÁLISE SOBRE A PRODUÇÃO DOS ESTUDANTES.

Nesta seção procura-se analisar e refletir sobre a construção do conhecimento pelos grupos em cada atividade realizada. A análise se concentrará nas diferentes formas de resolução que os grupos apresentaram em cada atividade, e os grupos continuaram a serem identificados como A, B, C, D e E relacionando com aspectos da Teoria dos Campos Conceituais. As atividades com o material concreto seguem uma ordenação em termos de raciocínio e complexidade, iniciando-se com as atividades que envolveram combinações e arranjo simples até permutação, finalizando-se com permutação circular. Buscou-se analisar como a partir de um problema os grupos de estudantes mobilizaram seus esquemas, agindo na direção de resolução para a questão. Tenta-se refletir como os teoremas em ação e conceitos em ação influenciaram o grupo de estudantes durante as possíveis tomadas de decisão.

GRUPO "A": Na primeira atividade pode-se observar que o grupo percebeu que o problema tratava-se de uma organização básica dos elementos. Notou-se que inicialmente que o grupo recorreu à ideia de enumeração para descrever todas as possibilidades de situações do primeiro problema e num segundo momento o grupo utilizou o conceito de adição. Ao se adicionar dois pares de sapatos ao problema, o grupo a partir da construção da solução previamente construída faz uso do Princípio

⁶ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Caxias do Sul.

Multiplicativo. Esta evolução mostra um possível aperfeiçoamento nos esquemas utilizados pelo grupo na resolução da primeira atividade.

No momento da segunda atividade o grupo utilizou representações simbólicas na resolução do problema, isto é, utilizando-se de códigos para organizar e enumerar as imagens. Em relação ao primeiro problema onde os estudantes enumeraram e descreveram por meio de símbolos as possíveis organizações, na segunda situação há um considerável avanço no esquema utilizado pelos sujeitos, os quais fixaram uma imagem e modificaram as posições das demais formando diferentes possibilidades associadas à imagem original, e a seguir utilizaram o Princípio Multiplicativo. Tal organização de pensamento nos faz inferir que o grupo talvez tenha implicitamente usado uma disposição usualmente conhecida por diagrama de árvore para a resolução do problema. Aliado a isto, há novamente a ocorrência do teorema em ação do Princípio Multiplicativo, usado pelos estudantes na construção da solução.

No que se refere à terceira atividade o grupo fez uso do Princípio Multiplicativo para resolver todas as situações propostas, tal como fez nas duas atividades anteriores. A partir da resolução apresentada pelo grupo, constata-se que eles tenham conjecturado que todas as situações propostas poderiam eventualmente ser resolvidas fazendo-se uso da multiplicação. Porém o grupo esqueceu-se de considerar, na terceira atividade, que apenas dois desenhos deveriam ser escolhidos dentre os quatro a fim de compor a capa e a contracapa da agenda.

Este mesmo fato ocorreu para a segunda e terceira situação apresentadas. Percebe-se que o grupo não conseguiu interpretar a tarefa numa possível totalidade. Isso pode indicar que o grupo não tenha conseguido construir satisfatoriamente o conceito de arranjo simples de p elementos quando escolhidos do n elementos.

Quanto à quarta atividade o grupo fez uso do Princípio Multiplicativo em todas as três situações exploradas, concluindo com êxito a construção das soluções. Na quinta atividade o grupo manipulou o material concreto da mesma forma que o fez nas duas primeiras situações exploradas. Na tentativa de adaptar o esquema para esta nova situação notou-se que o grupo não percebeu que uma disposição circular de elementos difere de uma organização linear. Isto fez com que eles construíssem uma solução equivocada para este problema, como se o problema fosse da mesma natureza do problema anterior.

Em linhas gerais, o grupo A manifestou diversos e diferentes esquemas diante das atividades, os quais foram utilizados por eles na resolução dos problemas. Pode-se dizer que conceitos em ação e teoremas em ação também foram utilizados pelo grupo A ao longo das atividades, em especial nas tentativas de replicar um conhecimento construído previamente diante de uma nova situação. Notou-se que a partir de uma reorganização/reconstrução de conceitos o grupo avaliou possibilidades e construiu soluções, apesar de não totalmente satisfatórias, para os problemas. Quanto ao uso do material concreto pode-se inferir que para este grupo a percepção e modificação das possibilidades em cada situação investigada tenham contribuído para uma compreensão, mesmo que parcial sobre as diferenças entre cada possibilidade. Para finalizar, os conceitos e teoremas em ação utilizados pelo grupo mesmo que de forma limitada expressam a construção de algum conhecimento matemático, manifestado principalmente pelo uso, adaptação, reformulação dos esquemas diante das situações impostas.

GRUPO "B": Diante da primeira atividade pode-se observar que o grupo percebeu que o problema consistia de uma organização básica dos elementos. Notou-se que inicialmente que o grupo fixou a primeira blusa e assim, foi substituindo as bermudas, a fim de descrever todas as possibilidades de combinações. O grupo percebeu que este fato também ocorreria com as demais blusas, a partir deste momento o grupo utilizou o conceito da adição. Para o segundo problema, ao se adicionar dois pares de sapatos, o grupo utiliza-se da primeira construção elaborada fazendo uso do Princípio Multiplicativo para encontrar a solução. E no terceiro problema o grupo utilizou o Princípio Multiplicativo para construir as diversas possibilidades. Podemos constatar que tais organizações de pensamento inferem que o grupo tenha usado de maneira implícita primeiramente uma disposição usualmente conhecida por diagrama de árvore para a resolução do problema. Associado a este fato, pode-se notar a ocorrência do teorema em ação do Princípio Multiplicativo, utilizado pelos estudantes para a construção da possível solução. Esta transição mostra um possível melhoramento dos esquemas utilizados pelo grupo na resolução da primeira atividade.

No que se refere à segunda atividade em todas as situações propostas pode-se perceber que o grupo não conseguiu compreender o problema na totalidade, e nem encontrar uma maneira de desenvolver o raciocínio para resolver os problemas propostos, de forma que atingisse o objetivo. O grupo não inferiu que a partir do momento em que se designava a primeira imagem no porta-retrato restaria as demais para permutar, sendo assim, é possível avaliar que não tenha ocorrido uma manifestação dos esquemas necessários para a construção desta atividade.

No que se refere à terceira atividade o grupo fez uso do Princípio Multiplicativo para resolver todas as situações estabelecidas, da mesma forma que fez nas duas atividades anteriores. A partir da desenvoltura do grupo nas atividades, possivelmente pode-se verificar que eles tenham concluído que todas as situações propostas poderiam eventualmente ser resolvidas fazendo-se uso da multiplicação. Entretanto, o grupo em algum momento na terceira atividade desconsiderou que apenas dois desenhos deveriam ser escolhidos dentre os quatros a fim de compor a capa e a contracapa da agenda.

Esta mesma conjectura ocorreu para a segunda e terceira situação apresentada. Nota-se que o grupo não conseguiu interpretar a tarefa na sua totalidade. Isso pode indicar que o grupo não tenha conseguido construir satisfatoriamente o conceito de arranjo simples de p elementos quando escolhidos de n elementos.

No desempenho da quarta atividade o grupo utilizou o Princípio Multiplicativo em todas as três situações exploradas, inferindo com êxito a construção das soluções. Na quinta atividade o grupo manipulou o material concreto da mesma forma que o fez nas duas primeiras situações exploradas. Na tentativa de adaptar o esquema para esta nova situação notou-se que o grupo não percebeu que uma disposição circular de elementos difere de uma organização linear. Isto fez com que eles construíssem uma solução para este problema de forma idêntica ao que tinham proposto nas atividades iniciais.

Em resumo, o grupo B manifestou diversos e diferentes esquemas diante das atividades, os quais foram utilizados por eles na resolução dos problemas. Pode-se dizer que conceitos em ação e teoremas em ação também foram utilizados pelo grupo B ao longo das atividades, em especial nas tentativas de replicar um conhecimento construído previamente diante de uma nova situação. Notou-se que a partir de uma reorganização/reconstrução de conceitos o grupo avaliou possibilidades e

construiu soluções, apesar de não totalmente satisfatórias, para os problemas. Quanto ao uso do material concreto pode-se inferir que para este grupo a percepção e modificação das possibilidades em cada situação investigada tenham contribuído para uma compreensão, mesmo que parcial sobre as diferenças entre cada possibilidade. Para finalizar, os conceitos e teoremas em ação utilizados pelo grupo mesmo que de forma limitada expressam a construção de algum conhecimento matemático, manifestado principalmente pelo uso, adaptação, reformulação dos esquemas diante das situações impostas.

GRUPO "C": Na primeira atividade o grupo percebeu que se tratava de uma organização básica dos elementos. Inicialmente o grupo recorreu à ideia de enumeração para descrever todas as possibilidades de situações no primeiro problema. A partir do segundo e do terceiro momento da atividade fizeram uso da multiplicação, isto descreve que o grupo desenvolveu o raciocínio combinatório para compreender e resolver os problemas propostos, utilizando-se do Princípio Multiplicativo. Verifica-se nas resoluções apresentadas que ocorreu uma evolução e aperfeiçoamento dos esquemas utilizados pelo grupo.

Na segunda atividade pode-se perceber que o grupo não conseguiu compreender e nem obteve uma maneira de desenvolver o raciocínio lógico adequado para resolver as questões, em todas as situações o grupo utiliza-se do Princípio Multiplicativo. Pode-se destacar um possível equívoco que o grupo apresentou em mobilizar um esquema, o grupo multiplicou n imagens com n espaços no porta-retrato, com isso, o grupo não obteve êxito nos resultados, pois não percebeu que no momento em que colocava a primeira imagem no porta-retrato restaria apenas as demais para permutar. Apurou-se que o grupo deduziu que todas as situações deveriam ser resolvidas através da multiplicação.

Diante da terceira atividade o grupo observou que se escolhessem um dos desenhos para ser a capa da agenda apenas restaria $(n-1)$ desenhos para serem a contracapa. Assim, o grupo inferiu que poderia utilizar do Princípio Multiplicativo para resolver todas as situações que envolvia esta atividade. Certifica-se que o grupo desenvolveu adequadamente o pensamento combinatório no que se referem a arranjos simples de n elementos tomados p a p .

Na quarta atividade o grupo fez uso do Princípio Multiplicativo em todas as três situações, desta forma, concluindo com êxito o resultado esperado. Na quinta atividade o grupo manipulou os integrantes da família concluindo que se a família fosse composta de n integrantes teriam que multiplicar por $(n+1)$ maneiras distintas, pode-se destacar que o grupo não conseguiu desenvolver o raciocínio lógico esperado para tal atividade. Na tentativa de adaptar o esquema para esta nova situação notou-se que o grupo não percebeu que uma disposição circular de elementos deferia de uma organização linear. Isto fez com que eles construíssem uma solução para este problema de forma idêntica ao que tinham proposto nas atividades iniciais.

De um modo geral, o grupo C demonstrou uma série de diferentes e variados esquemas diante das atividades. Pode-se dizer que o grupo C fez uso no decorrer das atividades dos conceitos em ação e teoremas em ação, principalmente nas atividades que se referiam ao conhecimento construído previamente diante de uma nova situação. Observou-se que a partir de uma reorganização/reconstrução de conceitos o grupo analisou possibilidades e elaborou soluções, apesar de não totalmente satisfatórias, para os problemas. Quanto ao uso do material concreto pode-se inferir que para este grupo a percepção e modificação das possibilidades em cada situação investigada tenham contribuído para uma compreensão, mesmo que parcial sobre as diferenças entre cada

possibilidade. Para finalizar, os conceitos e teoremas em ação utilizados pelo grupo mesmo que de forma limitada expressam a construção de algum conhecimento matemático, manifestado principalmente pelo uso, adaptação, reformulação dos esquemas diante das situações propostas.

GRUPO "D": Na primeira atividade o grupo D utilizou-se do conceito da multiplicação, fazendo-se uso do Princípio multiplicativo em todas as situações. Podemos inferir que o grupo desenvolveu com êxito o pensamento combinatório esperado em todas as situações que envolviam esta atividade.

Perante a segunda atividade o grupo manipulou o material concreto e tentou construir um pensamento matemático o qual fosse possível obter o compatível com o raciocínio desenvolvido ao longo da manipulação. O pensamento matemático que o grupo elaborou para chegar ao resultado da manipulação foi através da regra de três. Vale observar que nas duas primeiras situações conseguiram obter o resultado que foi obtido na manipulação e na terceira situação desta atividade, os mesmos não conseguiram adaptar adequadamente a regra de três para chegar ao resultado, uma vez que este não era o objeto matemático adequado para se obter a solução do problema. Observou-se que em algum momento durante a mobilização do esquema ocorreu uma decisão quanto à escolha e a mobilização do esquema eficaz. Constata-se que o grupo não conseguiu interpretar a tarefa numa possível totalidade.

No desenvolvimento da terceira atividade constata-se que o grupo compreendeu e desenvolveu o raciocínio necessário para as atividades propostas, mobilizando o conceito de multiplicação e utilizando implicitamente o Princípio Multiplicativo.

Na quarta atividade o grupo faz uso da multiplicação em todas as situações apresentadas. Notou-se que o grupo desenvolveu o raciocínio adequado para a construção dos anagramas percebendo que se tratava de arranjos simples.

Em permutação circular verificou-se que o grupo concluiu que se a família for composta por n integrantes então esses n integrantes podem sentar-se em n espaços distintos, porém o grupo não manipulou a mesa circular o que possivelmente os conduziu ao erro. Na quinta atividade o grupo manipulou o material concreto da mesma forma que o fez nas duas primeiras situações exploradas. Na tentativa de adaptar o esquema para esta nova situação notou-se que o grupo não percebeu que uma disposição circular de elementos difere de uma organização linear. Isto fez com que eles construíssem uma solução equivocada para este problema.

Em última análise do grupo D, destaca-se que os mesmos manifestaram diversos e diferentes esquemas durante as atividades, os quais foram utilizados por eles na resolução dos problemas. Pode-se dizer que conceitos em ação e teoremas em ação também foram utilizados pelo grupo D ao longo das atividades, em especial nas tentativas de replicar um conhecimento construído previamente diante de uma nova situação. Notou-se que a partir de uma reorganização/reconstrução de conceitos o grupo avaliou possibilidades e construiu soluções, ressaltamos que este grupo obteve o maior índice de desenvolvimento dos demais. Quanto ao uso do material concreto pode-se inferir que para este grupo a percepção e modificação das possibilidades em cada situação investigada tenham contribuído para uma compreensão, mesmo que parcial sobre as diferenças entre cada possibilidade. Por fim, os conceitos e teoremas em ação utilizados pelo grupo mesmo que de alguma forma limitada expressam a construção de alguns conhecimentos matemáticos, manifestados principalmente pelo uso, adaptação, reformulação dos esquemas diante das situações impostas.

GRUPO "E": Diante da primeira atividade pode-se verificar que o grupo E fez uso do conceito da multiplicação em todas as situações propostas. Percebendo que se tratava de uma organização básica dos elementos faz uso do Princípio Multiplicativo, com isso, denotamos que o grupo mobilizou o esquema eficaz para a resolução das atividades.

Na segunda atividade pode-se perceber que o grupo E procedeu de maneira semelhante ao grupo C não conseguindo compreender e nem mobilizar um esquema adequado para resolver as situações propostas, em todas as situações o grupo deduziu que deveria utilizar do conceito da multiplicação, desta forma, multiplicou n imagens com n espaços no porta-retrato, com isso não percebeu que no momento em que colocava a primeira imagem no porta-retrato restaria apenas as demais para permutar. Constata-se a ocorrência do teorema em ação do Princípio Multiplicativo, usado pelos estudantes em busca da solução.

Na análise da terceira atividade notamos que o grupo compreendeu e desenvolveu o raciocínio lógico esperado para as atividades, o grupo percebe que ao escolher um dos desenhos para a capa restariam apenas $(n-1)$ desenhos para permutar. Concluindo com sucesso todos os problemas.

Nas situações que englobam a quarta atividade que se refere a anagramas, o grupo fez uso do princípio multiplicativo em todas as três situações exploradas, multiplicando o número de letras em n fatores. Observa-se que nesta atividade o grupo não obteve resultado satisfatório, pois não compreendeu e interpretou adequadamente as situações.

No que se refere à quinta atividade, na primeira situação o grupo faz uso do conceito da multiplicação de n elementos por seus antecessores (sendo n elementos naturais), porém cometem um equívoco ao calcular a multiplicação dos n elementos. No segundo e terceiro problema da atividade acima o grupo utiliza do mesmo raciocínio desenvolvido chegando ao resultado correto. Porém vale destacar, que como ocorrido com os demais grupos, este grupo também não manipulou a mesa circular.

No geral, o grupo E manifestou alguns esquemas diante das atividades, os quais foram utilizados por eles na resolução dos problemas. Pode-se dizer que conceitos em ação e teoremas em ação também foram utilizados pelo grupo E no decorrer da sequência de atividades. Vale destacar, que na formação do grupo havia um integrante que já havia tido contato com contagem só que através de fórmulas matemáticas, e isto fez com que o grupo em alguns momentos durante as atividades mesmo com sugestões não justificadas optassem pela resolução deste integrante. Por fim, os conceitos e teoremas em ação utilizados pelo grupo, mesmo que limitados, expressaram a construção de algum conhecimento matemático diante das situações propostas.

6. REFLEXÕES FINAIS E APRENDIZADOS.

Planejou-se realizar atividades com estudantes do segundo ano do Ensino Médio, com o objetivo de abordar o Princípio Fundamental da contagem e que os estudantes fizessem uso de material manipulativo. Fazendo-se uso de materiais concretos, nosso interesse concentrou-se em avaliar a construção do conhecimento pelos estudantes à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud durante a sequência de atividades. Nesta perspectiva, optou-se por desenvolver cinco atividades com níveis diferentes de dificuldades. Cada atividade desenvolvida foi planejada para ser realizada nas aulas regulares de matemática.

O trabalho de pesquisa aqui relatado neste artigo científico teve por objetivo principal validar o uso do material concreto no processo de ensino de contagem, o qual se pode afirmar que o foi satisfatório, respaldado nos resultados e reflexões produzidas ao final da pesquisa. Todo o material concreto construído e utilizado na presente pesquisa está disponível no Laboratório de Matemática da instituição.

Ao se propor as cinco atividades aos estudantes objetivou-se oportunizar de forma investigativa, gradativa e evolutiva a construção das estruturas multiplicativas e aditivas necessárias no estudo de problemas de contagem. Após a aplicação das atividades com o material concreto foi possível perceber que a turma de estudantes fez uso, na medida do possível, de esquemas previamente elaborados, adequando-os a cada novo problema a ser enfrentado.

Constatou-se também, que em determinados momentos durante as atividades os grupos estabeleciam relações com os conceitos já adquiridos, sendo estes conceitos lembrados e utilizados em outros momentos durante as atividades, potencializando-se o desenvolvimento do pensamento no decorrer das atividades propostas. Notou-se que o raciocínio combinatório evoluiu de forma qualitativamente positiva com a utilização do material concreto juntamente com os problemas apresentados em cada atividade. Percebeu-se que durante a manipulação dos materiais ocorreu a construção dos conceitos matemáticos de forma investigativa, lúdica e participativa.

Por meio das observações realizadas e analisadas, pode-se concluir que os cinco grupos de estudantes conseguiram resolver os problemas que envolveram contagem, exceto a quinta atividade (permutação circular). Desta forma, conclui-se que o material concreto desempenhou um papel importante no processo de aprendizagem, oportunizando ao longo do trabalho momentos de discussões e reflexões entre os estudantes.

Os resultados alcançados neste trabalho de pesquisa oportunizam uma construção e aprendizagem dos conceitos referentes à contagem, no que se refere ao uso de materiais concretos para tal ensino na Educação Básica. Nossa conclusão é de que a proposta é válida, reafirmando as conclusões dos autores estudados na revisão de literatura. Constatou-se que os estudantes ampliaram a capacidade de se organizar, analisar, compreender e resolver os problemas propostos, fazendo uso do material concreto.

E para encerrar, acredita-se que na utilização desse material nas aulas regulares de matemática, as mesmas tornaram-se significativas, dinâmicas e participativas por parte dos estudantes. As fórmulas matemáticas “prontas e acabadas” em momento algum foram utilizadas, oportunizando-se aos estudantes serem agentes de sua própria aprendizagem. Este processo, certamente ocasionou momentos nos quais os estudantes foram capazes de criar e desenvolver estratégias próprias de resolução para os problemas, e que certamente são elementos importantes para o professor de matemática refletir sobre o ensino desse conteúdo na escola básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/Semtec, 2000.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. In: **Orientações curriculares para o ensino médio**; volume 2. Brasília: MEC/SEB, 2006. 135p.

CARDOSO, Evelyn Rosana; GUIRADO, João Cesar. Análise Combinatória: Da Manipulação à Formalização de Conceitos. In: **IX ERPEM**, 2007, Assis Chateaubriand. IX ERPEM, 2007.

CARVALHO, Adriana Oliveira P. de. **A utilização de Materiais Concretos no Estudo de Análise Combinatória**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade do Estado da Bahia, Senhor do Bonfim - BA, 2007.

COSTA, Elisângela Riberio Silva. **Uma proposta de ensino de Análise Combinatória para alunos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Matemática – Universidade Federal de Lavras. Lavras: UFLA, 2013.

DIAS, Vanessa Moreira; MOREIRA, Denise da Silva Costa. **A Importância dos Jogos e dos Materiais Concretos na Resolução de Problemas de Contagem no Ensino Fundamental**. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Faculdade Pedro II – Belo Horizonte, 2010.

DURO, Mariana Lima; **Análise Combinatória e Construção de Possibilidades o Raciocínio Formal no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul: UFRGS, 2012.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. **Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2003.

MOREIRA, Marco Antônio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências** – v. 7, n.1, p. 7- 29, 2002.

PONTE, João Pedro da. **Estudos de caso em educação matemática**.1994.

SILVA, Carla Soares. **Estudo de caso sobre o pensamento combinatório de alunos do Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre- RS, 2010.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque. **O ensino de Análise Combinatória no ensino médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos: UFSCAR, 2011.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques. 1990. p. 144.

_____. **Qu'est-ce que l'apenséé? Dans les actes du Colloque: Qu'est-ce que l'apenséé?** Suresne, Laboratoire De Psychologie Cognitive et Activités Finalisées, Université Paris VIII. 1998. p. 1-28.

YIN, Robert. **Planejamento e métodos**. Tradução de Daniel Grassi. 2. ed. Porto Alegre, RS: Editora Bookman, 2001.