2016 | Volume 13 | Nº 2 | Pág. 42 a 53

REVISTA THEMA

CIÊNCIAS HUMANAS

O estudo e o ensino da Sequência de Fibonacci numa abordagem atualizada

Study and teaching Fibonacci sequence an approach updated

Arlem Atanazio dos Santos[1]; Francisco Régis Vieira Alves[2]

RESUMO

O presente relato apresenta certas concepções relativas ao estudo e ensino da História da Matemática-HM que evidenciam um caráter de proficuidade para o professor que pretende explorar a dimensão histórica da Sequência de Fibonacci, em sala de aula. Assim, apresenta as etapas de seleção, organização e aplicação de atividades voltadas à sala de aula, afetado por um enfoque histórico, epistemológico e matemático. Finaliza, pois, apresentando uma proposta teórica de atividade histórica, destacando como esta foi organizada de acordo com seus objetivos, procedimentos de execução, bem como eventuais discussões; numa visão de integração dos elementos históricos, epistemológicos e matemáticos.

Palavras-chave: *Estudo e ensino de Matemática; sequência de Fibonacci; atividades históricas.*

ABSTRACT

In this report we present some concepts related to the study and teaching of History of Mathematics (HM) useful to the teacher that it intends to use such knowledge in their classes. Thus, we present the stages of selection, organization and implementation of activities geared to the classroom in a historical perspective, epistemological and mathematical, and the whole process based on an updated perspective of study and teaching of HM. We finish presenting a proposal for historical activity, highlighting how this was organized according to their objectives, implementation procedures and the planned discussions; an integrated view of historical, epistemological and mathematical elements in order, driving to an investigation of mathematics present in the notes.

Keywords: *Study and teaching of mathematics; Fibonacci sequence; historical activities.*

DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.13.2016.42-53.357

[1;2]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza/CE – Brasil.

1. SOBRE A ABORDAGEM ATUALIZADA NO ESTUDO E ENSINO DE MATEMÁTICA

Sobre o papel da História da Matemática-HM no ensino, seu conhecimento é "[...] fundamental para se perceber como as teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas [...]" D´Ambrósio (2009, p.29). Na visão de Saito (2015) esta tem sua participação valorizada no ensino, "[...] porquê da acesso a diferentes ideias, argumentos, temas e outras questões que foram esquecidas (ou abandonadas), incentivando novas reflexões sobre a construção do conhecimento [...]" (SAITO,2015, p.21)

Assim, pelas concepções suscitadas dos argumentos D´Ambrósio (2009) e Saito (2015) a História da Matemática assume um caráter importante na formação do professor de matemática. Nesse sentido, sua utilização em sala de aula, pode ser considerada um instrumento útil ao professor, em sua prática, que lhe permitirá o conhecimento das teorias que envolvem o contexto matemático, bem como uma compreensão do desenvolvimento da matemática e orientação ao seu aprendizado.

Outro elemento importante destacado por Saito (2015) é que devemos ter cuidado na exploração dos tópicos da HM, não dando-lhes uma conotação biográfica, de curiosidade ou anedótica. Além de que, os fatos históricos não podem ser tratados como um repositório de informações, transparecendo uma visão estática e imutável. E caso, ocorra tal prática, esta pode omitir outros elementos importantes do processo de origem e evolução da matemática, dentro de determinado contexto.

Sobre as percepções anteriores, de estudo e ensino da História da Matemática, D´Ambrósio (2009) destaca que estas são uma das características que um bom professor de matemática deva ter, especificamente, na questão do conhecimento do conteúdo específico, no caso a História da Matemática, a fim de estabelecer suas inter-relações, com outros conteúdos e contextos.

Dando continuidade, destacamos o que Saito (2015) apresenta sobre a abordagem historiográfica dos livros de HM, no qual afirma que esta é desatualizada, e que tal contexto tem influência direta na abordagem de ensino adotada pelo professor, em sala de aula. Abordagem que segundo Saito (2015) é direcionada por duas concepções: uma *vertente histórica tradicional* e uma *vertente histórica atualizada*. Ademais, é salutar observarmos o que propõe cada uma dessas concepções e suas implicações, ao estudo e ensino da HM. Elementos que destacaremos a seguir:

Assim, numa visão *tradicional*, a HM apresenta uma organização dos fatos e acontecimentos históricos, de maneira linear e progressiva. Sendo uma abordagem que privilegia a vida e as obras dos matemáticos, organizada com fins, a estruturação da matemática atual (moderna). A questão fundamental deste tipo de historiografia é que deixa a margem outros fatos relevantes, tais como: a complexidade do fazer matemática, os debates, os embates, as questões sociais, políticas e econômicas; constituintes de um cenário extra matemático, influente na organização e desenvolvimento da matemática à época.

Outro modo de perceber a HM, em termos de estudo e ensino, é numa visão *atualizada*, que contrariamente a tradicional discute os fatos e acontecimentos históricos, não numa sequência lógica e definida. Tal concepção, percebe os fatos históricos a seu tempo, ou seja, estes devem ser contextualizados em sua época; levando-se em conta nessa organização os constituintes extra matemáticos, que como destacamos são as influências sociais, culturais, políticas, econômicas e as questões inerentes a própria matemática.

Sobre tal abordagem, é válido destacar também, que esta fundamenta-se numa reconstrução histórica dos fatos através de uma investigação das técnicas, dos conteúdos e das circunstâncias de sua elaboração. Percebendo o processo de construção e desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, numa abordagem histórico-epistemológica, numa perspectiva de compreensão do passado para entender o presente, e não o contrário.

Ainda, no âmbito da abordagem de estudo da HM, vale sublinhar a concepção de Alves (2012) sobre "[...] a relevância do estudo da Matemática, por meio de sua História e Epistemologia [...]" (ALVES, 2012, p. 54), considerações que coadunam com a perspectiva *histórica atualizada* discutida por Saito (2015), sendo assim, uma perspectiva de estudo da História da Matemática como ciência de caráter evolutivo irrefreável.

Apreciamos nos argumentos de Saito (2015) e Alves (2012) a sinalização da importância do estudo da HM, fundamentado em seus aspectos históricos e epistemológicos. Desse contexto, suscitamos o seguinte questionamento: *como podemos realizar uma atividade voltada a sala de aula referendada numa perspectiva de estudo e ensino da HM com uma visão atualizada acerca da Sequência de Fibonacci - SF?*

Com o escopo de proporcionar, pelo menos, elementos de ordem provisória para responder o questionamento anterior, no próximo segmento, demarcaremos o campo de interesse vinculado ao modelo da SF.

2. SOBRE O ESTUDO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Assim, iniciamos nossa discussão tratando de que maneira podemos organizar um estudo, tendo como referências os elementos históricos e epistemológicos, relativos a determinado tópico da HM. Nesse sentido, focamos nossas ações na realização de uma análise dos livros tradicionais de HM, tais como: Boyer (1996), Eves (2004), Estrada (2000) e Struik (1992). Como critérios ou categorias de análise, tomamos os elementos históricos (contexto social, cultural, econômico e político) e epistemológicos (investigação das técnicas e dos conteúdos), sendo estes relativos ao seguinte tópico de referência, a sequência de Fibonacci. A seguir apresentamos as discussões relativas a essas análises.

A partir do referencial e dos critérios estabelecidos realizamos uma análise da *abordagem histórica*, destacando os aspectos sociais, culturais, políticos e econômicos, do período, no caso, a Europa do século XIII. Nesse sentido, destacamos Eves (2004) e Struik (1992) como referências mais completas, por trazerem tal contextualização histórica, social, política e econômica, de maneira satisfatória.

Destacando que a Europa do sec. XIII estava no período feudal, caracterizado pelo modelo econômico agrícola, de subsistência, e de grande influência cultural e religiosa da Igreja, instituição que detinha o conhecimento, restringindo-o a poucos abastados.

Apesar desse período de estagnação cultural, em termos de divulgação do conhecimento; o comércio, entre algumas regiões da Europa, principalmente, as cidades mediterrâneas (Piza, Veneza, Nápoles, dentre outras), o norte da África e o Oriente; viria a ser a atividade propulsora de uma nova ordem social, econômica e cultural, o Renascimento.

Sobre tal contextualização histórica, econômica, social e cultural, tal preocupação não é observada em Boyer (1996) e Estrada (2000). Ainda na vertente histórica constatamos que as obras, em destaque, apresentam uma biografia adequada de Leonardo de Pisano, destacando sua origem, formação e obras, com destaque para o Líber Abacci (1202).

Quanto a *vertente epistemológica* podemos destacar que as obras analisadas trazem elementos que permitem uma compreensão pontual sobre a evolução da sequência de Fibonacci. Com destaque, para sua origem a partir da solução do problema dos coelhos proposto no Líber Abacci. Quanto ao *aspecto matemático* apenas em Eves (2004) e Boyer (1996) encontramos algumas propriedades da sequência, também baseadas numa pontualidade de informações, sem nenhuma alusão a suas origens e evolução.

Pelo destacado, observamos que a abordagem dada a sequência de Fibonacci em Eves (2004), Estrada (2000), Struik (1992) e Boyer (1996), é estruturada segundo uma conformidade histórica, em consonância dos argumentos indesejados já discutidos em Saito (2015). Contudo, é oportuno acentuar que, em relação aos aspectos históricos da sequência de Fibonacci, as obras apresentam um conjunto de informações suficientes, a uma compreensão do contexto histórico que envolve a sequência, em destaque, o sec. XIII. No entanto, os aspectos matemáticos são, recorrentemente frágeis e deficientes, não pelo fato de uma apresentação fundamentada na narrativa dos problemas dos coelhos, e de sua solução, a obtenção da sequência. Mas, todavia, com origem em uma apresentação pontual e restrita, de algumas de suas propriedades matemáticas, sem uma devida caracterização.

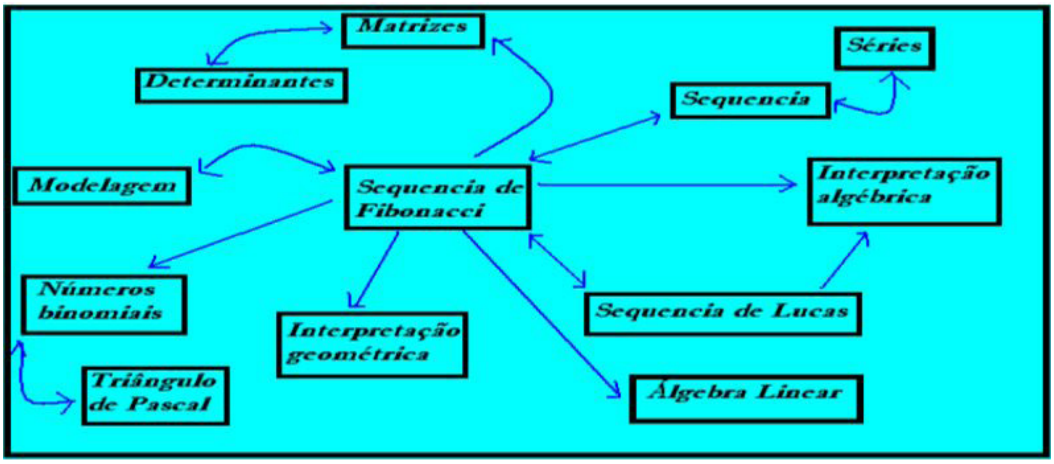
Assim, percebemos a necessidade de discutirmos os aspectos matemáticos relativos a sequência de Fibonacci. Nesse sentido, buscamos outras referências, em destaque Alfred (1965), Huntley (1985), Hoggatt (1969) e Vorobiov (1974), literatura que trata da sequência de Fibonacci, numa abordagem histórica e matemática. Quanto a análise dessas obras podemos destacar que em Huntley (1985) a sequência de Fibonacci é ilustrada em diversos contextos, tais como: sua relação com o número de ouro, com o triângulo de Pascal, com as Progressões, com a Trigonometria e com as Geometrias Plana e Analítica, dentre outros contextos.

O fato relevante de tal abordagem é que apresenta a sequência de Fibonacci dentro de determinado contexto histórico ou prático, não deixando de apresentar os aspectos matemáticos inerentes a estes contextos. Ademais, em Alfred (1965), Hoggatt (1969) e Vorobiov (1974) encontramos um estudo da sequência de Fibonacci, essencialmente matemático, os quais são discutidas algumas de suas propriedades elementares, bem como suas relações com outros conteúdos matemáticos, tanto do ensino médio, tais como: triângulo de Pascal, matrizes, determinantes e polinômios; quanto do nível superior, tais como: sequências recorrentes, funções geradoras, teoria dos números, frações contínuas, dentre outros.

Destacamos até o momento, como o professor deve realizar o estudo de determinado conteúdo ou tópico da História da Matemática, centrando a discussão na análise de sua abordagem nos livros de HM, sendo esta, orientada pelos aspectos históricos e epistemológicos, numa perspectiva de estudo semelhante a Alves (2012) e Saito (2015).

3. SOBRE O ENSINO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.

Contudo, também é de nosso interesse elaborarmos atividades voltadas ao ensino da sequência de Fibonacci, atividades que sejam estruturadas em seus aspectos históricos e epistemológicos. Nesse sentido, tomamos como referência, as considerações de Alves (2010) sobre a abordagem no ensino da sequência de Fibonacci, que segundo o autor deve ser numa perspectiva inter-relacional, por ser "[...] um assunto que possibilita uma ampla ligação conceitual interna à própria Matemática. Tal ligação precisa ser compreendida de modo local e global por parte do professor interessado em seu ensino [...]" (ALVES, 2010, p.5). Ligações conceituais que apresentamos na figura, a seguir:



Concepção inter-relacional de ALVES(2010) de ensino da Sequência de Fibonacci.

Como atentamos, Alves (2010) discutiu que o ensino da sequência de Fibonacci deve ser organizado, no sentido, de relacionarmos esta a outros tópicos matemáticos. Assim, "[...] ao observarmos as conexões e implicações possíveis e conhecendo a natureza da complexidade dos conceitos envolvidos, podemos prever os momentos didáticos em que cada noção pode ser explorada e antever os possíveis obstáculos ao aprendizado [...] " (ALVES,2010, p.5).

Vale alertar que a abordagem de ensino proposta por Alves (2010) vem ao encontro das abordagens apresentadas nos estudos de Alfred (1965), Huntley (1985), Hoggatt (1969) e Vorobiov (1974), sendo estes estudos complementares, no sentido de trazer uma abordagem de ensino da sequência de Fibonacci, numa perspectiva histórica, epistemológica e matemática.

Dando continuidade, focamos nossos argumentos na elaboração de atividades históricas, com a sequência de Fibonacci. Nesse sentido, tomamos por referência os estudos de Mendes (2008), o qual destaca que o ensino/aprendizagem de matemática através de atividades históricas permite outra significação a matemática escolar. Devido ocorrer um resgate do processo de construção do tópico abordado.

Com isto, o aluno pode compreender o significado das ideias abordadas e sua importância para o desenvolvimento da matemática, a partir dos seus significados histórico e cultural. Destacando ainda, que as atividades históricas no ensino pressupõe uma participação ativo-reflexiva do aluno na construção do conhecimento, ocasionada pelo conjunto de relações interativas entre o professor/ estudante e estudantes/estudantes. Sendo estas interações possíveis, a partir da exploração de atividades construtivas, com etapas de desenvolvimento, associação e simbolização, sobre a forma de atividades manipulativas, que como destaca Mendes (2010) podem ser extraídas diretamente da História da Matemática ou adaptadas desse contexto.

Segundo o modelo proposto por Mendes (2008) essas atividades históricas devem ser elaboradas numa sequência de ensino, ou seja, o professor deve organizar no planejamento didático todas as etapas de ensino. Nesse sentido, este deve definir: os objetivos, procedimentos de execução e as discussões previstas (relatos orais e escritos previstas em cada atividade); sendo estes organizados para conduzir o processo de investigação da matemática presente nas informações históricas, sendo uma matemática cotidiana, escolar e acadêmica.

Mendes (2008) registra que as atividades históricas devem ser elaboradas, com o seguinte o roteiro:

I) Nome da atividade: o professor evidencia o tema ou conteúdo a ser explorado nas atividades. Cabe ao professor usar da criatividade e escolher um nome atrativo. A apresentação do tema evidencia o objetivo da atividade, bem como os aspectos do cotidiano, escolar e científico, do conteúdo matemático a ser apresentado;

II) Objetivos da atividade: o professor ao definir os objetivos deixa claro as finalidades da atividade, com fins a construção dos conhecimentos matemáticos de interesse. Os objetivos devem apresentar uma linguagem clara e concisa expressando quais aspectos matemáticos e extra matemáticos serão apresentados na atividade;

III) Conteúdo histórico: se caracteriza como o elemento motivador e gerador da matemática escolar, tendo por finalidade esclarecer as questões matemáticas relativas ao conteúdo em estudo. Como destaca Mendes (2008) nestas informações históricas estão contidos os aspectos cotidiano, escolar e científico, da matemática a ser reconstruída, nas atividades pelos estudantes;

IV) O material: são os recursos que serão utilizados na realização da atividade;

V)Operacionalização: procedimentos metodológicos que orientam os estudantes no desenvolvimento das atividades históricas; segundo Mendes (2008) esta etapa deve conter as seguintes fases:

1) Manipulação /Experimentação: através de experiências manipulativas ou visuais, os alunos, durante a realização da atividade histórica devem manifestar seus conhecimentos através das interações sujeitos-objeto, vivenciadas no saber fazer da atividade;

2) Verbalização/Comunicação oral: os alunos devem ser capazes de verbalizar seus conhecimentos, sendo suas expressões orais provocadas pelas discussões com os colegas, havendo uma socialização das ideias apresentadas;

3) Simbolização/Abstração: Mendes (2008) destaca que as fases anteriores, ocorrem de um processo de ação-reflexão dos alunos, e estes devem ser capazes de expressar suas aprendizagens, por meio de uma simbolização, sendo uma representação de caráter intuitivo, algoritmo ou formal, que evidencie o grau de abstração do aluno, relativo aos conhecimentos envolvidos na atividade;

VI) Os desafios propostos nas atividades: sobre tal etapa Mendes (2008) destaca que estas atividades devem ser atrativas, desafiadoras e provocar curiosidade nos alunos. Sobre a abordagem de ensino Mendes (2008) destaca que estes conhecimentos históricos podem ser abordados de maneira *implícita*, referendados nos problemas históricos ou de maneira *explícita* retirados de textos históricos, documentos, artefatos (fontes primárias) ou de livros de HM, paradidáticos, dentre outros (fontes secundárias).

4. PROPOSTA DE ATIVIDADE HISTÓRICA COM A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.

Como estamos estabelecendo um percurso direcionado a realização de atividades com elementos históricos, numa abordagem de estudo e ensino atualizada, e com aplicabilidade em sala de aula. A seguir apresentamos uma proposta de atividade voltada ao estudo da sequência de Fibonacci e sua relação com o triângulo de Pascal, suscitando algumas discussões *históricas, epistemológicas e matemáticas.*

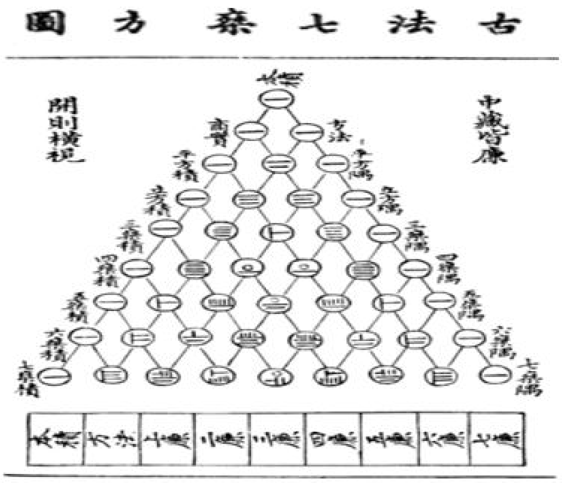
A atividade proposta foi elaborada seguindo os pressupostos de Alves (2011) sobre o ensino inter-relacionada com a sequência de Fibonacci; e como passos de elaboração da atividade histórica seguimos as etapas discutidas por Mendes (2008), e de forma complementar a etapa de operacionalização utilizamos como metodologia de ensino, as fases da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau, presentes no estudo de Teixeira & Passos (2013); em destaque, sua tipologia das situações didáticas, no qual elenca as principais atividades voltadas ao ensino de matemática, classificando as situações didáticas, em situações (momentos) de: ação, formulação, validação e institucionalização.

5. ATIVIDADE PROPOSTA

Nome: o triângulo de Pascal e os números de Fibonacci.

Objetivo: a atividade tem como objetivo apresentar e discutir relações da sequência de Fibonacci com outros conteúdos matemáticos, no caso, a triângulo chinês, aritmético ou de Pascal, bem como estabelecer algumas propriedades relativas ao triângulo de Pascal.

Conteúdo Histórico: o triângulo de Pascal é talvez o mais famoso de todos os padrões numéricos. Ele é muito antigo, datando provavelmente de mais de mil anos. Suas *propriedades ocultas* foram revelando-se cada vez mais à medida que desenvolveu-se a matemática através dos séculos. O certo é que o padrão já era conhecido dos chineses no século XIII – e que Tartaglia, nascido em Brescia, em 1500, utilizou-se para determinar os coeficientes de x no desenvolvimento (1+x)n em um número limitada de casos. Pascal fez uso mais completo do triângulo em seu *Traité du Triangle Arithmétique*, que escreveu por volta de 1653.Uma outra característica do triângulo de Pascal é que ele contém a série de Fibonacci, embora não pareça haver registro demonstrando que Pascal notou o fato. É possível que Leonardo de Fibonacci tenha topado com a série hoje conhecida pelo seu nome através de um exame do triângulo chinês (HUNTLEY,1985, p.129-132). A seguir apresentamos o triângulo chinês e triângulo de Pascal, com base nas figuras, responda:



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Desafios Propostos:

a) No texto introdutório, falamos de um conjunto de propriedades ocultas do triângulo aritmético. Como podemos caracterizar algumas dessas propriedades, utilizando o contexto histórico descrito, em destaque Tartaglia.

Operacionalização:

Situação de Ação: nesta fase da TSD, cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários a solução da situação proposta; que se processam por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução, caracterizando-se como uma fase de *manipulação* e *experimentação*. Assim, os alunos devem perceber que partindo do contexto histórico descrito podem obter algumas propriedades relativas ao triângulo de Pascal.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016) os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes, elementos invariantes na situação.

Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento, já se permiti a utilização de uma linguagem adequada, mas sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis, num processo de verbalização e comunicação oral entre os alunos. Nesse sentido, os alunos devem observar o contexto histórico focando suas ações nos procedimentos de Tartaglia, e ao realizarem os desenvolvimentos de $(1+x)^n$ para n=0,1,2,3,4,.., devem obter os seguintes resultados:

$$
\begin{array}{rl}
(1+x)^0 = 1 & 1 \\
(1+x)^1 = 1+x & 1 \quad 1 \\
(1+x)^2 = 1+2x+x^2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismo de prova, num processo de *simbolização* e *abstração*. Após a caracterização de uma maneira de obtenção do triângulo de Pascal, na fase anterior, a partir do triângulo obtido os alunos devem ser instigados à observação e caraterização de outras propriedades, tais como: que as linhas do triângulo iniciam e terminam com um; e que a partir da terceira linha, cada elemento, exceto os extremos, é obtido pela soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto é revelada. Segundo Alves (2016) é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Após a identificação das propriedades, na fase anterior, o professor pode apresentar e discutir as seguintes formalizações, de Hoggatt (1969, p.49).

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{1} = 1, \forall n \in N \, e \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}, \, para \quad n \geq m \geq 1$$

b) Que resultados obteremos ao somarmos os elementos das diagonais ascendentes? Você conhece esse resultado? Explique suas escolhas, indicando uma simbologia conveniente para o primeiro termo, para o segundo termo, para o terceiro termo, e assim, sucessivamente. Podemos representar os resultados anteriores em temos de números binomiais? Podemos estabelecer relações entre os resultados anteriores e os números de Fibonacci?

Operacionalização:

Situação de Ação: nesta fase da TSD, cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários a solução da situação proposta; que se processam por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução, caracterizando-se como uma fase de *manipulação* e *experimentação*, destacado em Mendes (2008). Assim, os alunos tendo por base o texto de referência, devem relacionar o triângulo de Pascal com os números de Fibonacci.Neste caso, os alunos devem notar que a listagem de números obtidos no canto superior direito, ao traçarem as diagonais ascendentes do triângulo de Pascal são os números de Fibonacci.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016) os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes, elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento, já se permiti a utilização de uma linguagem adequada, mais sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis, num processo de *verbalização* e *comunicação oral* entre os alunos. Posteriomente, as observações realizadas na fase anterior, e a identificação dos números de fibonacci a partir do triângulo de Pascal, os alunos devem ser instigados a obtenção da seguinte listagem que expressam essa relação:

$$f_1=1,\ f_2=1,\ f_3=1+1=2,\ f_4=1+2=3,\ f_5=1+3+1=5,\ f_6=1+4+3=8,$$
$$f_7=1+5+6+1=13,\ etc.$$

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismo de prova, num processo de simbolização e abstração. A partir da análise de alguns resultados anteriores, os alunos devem ser capazes de expressá-los, em termos de números binomiais, sendo estes organizados da seguinte maneira:

$$\binom{0}{0} = 1 = f_1$$
$$\binom{1}{0} = 1 = f_2$$
$$\binom{2}{0} + \binom{1}{0} = 2 = f_3$$
$$\binom{3}{0} + \binom{1}{0} = 3 = f_4$$
$$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5 = f_5$$
$$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 = f_6$$

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto é revelada. Segundo Alves (2016) é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Após a representação, em termos de números binomiais, dos resultados anteriores. Os alunos podem ser incentivados a buscarem um resultado geral para a propriedade observada, que se expressa da seguinte maneira:

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+.....+\binom{n-i}{i}, com 0 \le i \le \frac{n}{2}$$

, resultado que pode ser expresso, em forma de somatório: $\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n-i}{i}, n \ge 0$, com $[n/2]$ indicando o maior inteiro não superior a $n/2$. Sobre o mesmo, vale destacar, que em (HOGGATT,1969, p.50) encontramos, expresso da seguinte forma: $f_{n+1}=\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n-i}{i}, n \ge 0$, e em (ALFRED,1965, p.43) na forma $f_k=\sum_{k=1}^{[\,k+1)/2]}\binom{n-k}{k-1}$. Relações que nos dão os *números de Fibonacci em termos binomiais.*

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como caracterizamos o estudo e o ensino de determinado conteúdo ou tópico da HM, deve ser estruturado num conjunto de etapas. Assim, dos argumentos de D`Ambrósio (2009), Saito (2015) e Alves (2012) temos que na fase relativa ao estudo de tal tópico ou conteúdo, o professor deve ser capaz de realizar uma análise crítica do livro de HM, seja ele de abordagem tradicional ou específica; tendo como critério desta análise os aspectos: históricos, epistemológicos e matemáticos. E que tal caracterização permita uma compilação das informações históricas mais relevantes, e potencialmente exploráveis, em atividades de sala de aula.

Sobre essa exploração, destacamos sua relação intrínseca com a fase de ensino do conteúdo ou tópico, que segundo Alves (2010) deve ser estruturada numa perspectiva de abordagem matemática inter-relacional, ou seja, que se possa fazer o maior número de conexões do conteúdo em estudo, com outros conceitos matemáticos. No entanto, a estruturação destas atividades precisa fundamentar-se em alguns critérios de organização, que segundo Mendes (2008) passam pelas seguintes definições: do tema, dos objetivos, dos procedimentos de execução e as discussões previstas, relativas ao tópico em estudo. Além da utilização de uma metodologia de ensino, em destaque, a tipologia das situações didáticas de Brousseau.

Tais perspectivas, nos proporcionam uma trajetória de pesquisa e elaboração, de uma atividade histórica, no caso, com a sequência de Fibonacci; não somente, numa abordagem histórica, mais que contemplasse elementos epistemológicos e matemáticos, discutidos através da relação da sequência de Fibonacci com o triângulo de Pascal. Assim, esperamos que a percurso descrito, em termos da seleção do conteúdo e organização da atividade histórica, a fim de sua aplicação em sala de aula; possa ser uma referência aos professores de matemática, como um viés de abordar em suas aulas, tópicos da História da Matemática numa visão atualizada de estudo e ensino.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFRED, Brother U. **An introduction to Fibonacci Discovery.** Santa Clara: The Fibonacci Association, 1965. Disponível em: http://www.fq.math.ca/Books/Complete/discovery.pdf . Acessado em 04 de Março de 2016.

ALVES, Francisco Régis Vieira; BORGES NETO, Hermínio. **Sequencias de Fibonacci e de Lucas: uma aplicação da sequência fedathi.** In: Anais do V HTEM- Colóquio de História e Tecnologia na Ensino da Matemática, Recife, p.1-10, 2010.

ALVES, Francisco Régis Vieira; BORGES NETO, Hermínio; MAIA, José A. D. **História da matemática: os números figurais em 2D e 3D.** Revista Conexões Ciência e Tecnologia. v. 6, n. 2, p. 40-56, 2012. Disponível em: http://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/477/324 . Acessado em 18 de Março de 2016.

ALVES, Francisco Régis Vieira. **Engenharia Didática para a generalização da noção de sequência de Fibonacci na disciplina de história da matemática: uma experiência num curso de licenciatura.** Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.18, n.1, p.61-93, 2016.Disponível em:

http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20879/pdf . Acessado em 18 de Março de 2016.

BOYER, Carl. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

D`AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 2009.

ESTRADA, Maria Fernanda et.al. **História da Matemática.** Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

HOGGAT, Verner E. **Fibonacci and Lucas numbers.** Santa Clara: The Fibonacci Association, 1969. Disponível em: http://www.fq.math.ca/Books/Complete/fibonacci-lucas.pdf . Acessado em 04 de Março de 2016.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

HUNTLEY, H.E. **A divina proporção.** Tradução de Luis C. A. Nunes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985

MENDES. Iran Abreu. **Tendências metodológicas no ensino de matemática.** Belém: EdUFPA, 2008

MENDES. Iran Abreu. **A investigação histórica na formação de professores de matemática.** Revista Cocar.v.4, nº 7, p. 37-48. 2010 disponível em: http://paginas.uepa.br/seer/index.php/cocar/article/view/37/27 . Acessado em 10 de Maio de 2016.

SAITO, Fumikazo. **História da Matemática e suas (re)construções contextuais.**1.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas.** Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau.** Zetetiké, Campinas, v. 21, n. 39, p.155-168, 2013. Disponível em:https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/4327/5110. Acessado em 02 de Maio de 2016.

VOROBIOV. Nikolai N. **Números de Fibonacci.** Moscou: Editora Mir, 1974