REVISTA THEMA

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Sequência generalizada de pell - SGP: Aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo

Generalized pell sequence – GPS: historical and epistemological characters related an evolution of a model

Francisco Regis Vieira Alves[1]

RESUMO

Neste artigo trazemos uma discussão, que não desconsidera elementos de ordem histórica, atinentes ao modelo matemático que nomeamos por Sequência de Pell – SP. Mostraremos os resultados de artigos especializados, predominantemente das décadas de 80 e 90, que indicam resultados que validam a generalização do referido modelo, e que passa a ser nomeado, então, como Sequência Generalizada de Pell – SGP. Intimamente relacionado com outra duas outras sequências emblemáticas, conhecidas como a sequência de Fibonacci e de Lucas, apontaremos propriedades e relações desconsideradas por autores de livros de História da Matemática - HM e demarcaremos determinados elementos que podem atuar decidamente para um entendimento da evolução epistemológica de um modelo devido a John Pell, o qual preserva seu vigor científico através dos séculos.

Palavras-chave: *Sequência de Pell, Sequência Generalizada de Pell, História da Matemática, Investigação histórica.*

ABSTRACT

In this article we bring a discussion that does not disregard elements of a historical order, relating to the mathematical model named Pell´s sequence – PS. We show the results of specialized articles mainly from the eighties and nineties decades, indicating results that validate the generalization of this model, amd that happens to be named then as Generalized Pell Sequence – GPS. Closely related with anothers two emblematic sequences, known as the Fibonacci Sequence and Lucas, we will point some disregarded properties and relations by the Mathematical History authors´ and still demarcate certain elements that can act precisely to understanding of a epistemolpogical evolution of a model due a John Pell and wich preserves its scientifique vigor through the passing of centuries.

Keywords: *Pell sequence, Generalized Pell Sequence, Mathematics History, Historical research.*

DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.13.2016.27-41.324

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza/CE – Brasil.

1. INTRODUÇÃO

Registramos inúmeros trabalhos (BICKNELL, 1975, HORADAM, 1971, HORADAM & FILIPPONI, 1995; HORADAM, SWITA & FILIPPONI, 1994; HANSEN, 1972; MANA, 1969; SURYANARAYAN, 1996) predominantemente das décadas de 70 a 90, que discutem/abordam propriedades relacionadas com a sequência de Pell. John Pell (1611 – 1685) é considerado um dos matemáticos mais enigmáticos do século XVII (MALCOLM, 2000, p. 275). Figura intelectualmente reconhecida no continente europeu do século XVII, se tornou conhecido não como consequência de suas publicações, todavia por suas atividades, contatos e intensas correspondências. Por outro lado, Malcolm (2000, p. 276) comenta que Pell adquiriu renome pelo desenvolvimento do estudo das equações de Pell, descritas por $x^2 - Ay^2 = 1$, com x, y, números inteiros e A não quadrado inteiro.

Malcolm (2000, p. 279) assinala que "Pell manifestou fidelidade aos métodos didáticos apregoados por Comenius, relativamente ao qual, as crianças devem progredir, em níveis crescentes de gradação, usando em cada etapa, um precognição existente para o ulterior". Walker (2011, p. 34) recorda que Pell desenvolveu atenção especial a determinados problemas envolvendo tábuas de quadrados, somas de quadrados, primos e compostos, logaritmos e antilogaritmos, etc. No trabalho mais conhecido de Pell, intitulado *An introduction to Algebra*, ele explica e discrimina regras para o manuseio e simplificações de equações. Walker (2000, p. 36) acentua ainda que "John Pell, pelo menos o nome, é provavelmente mais conhecido por intermédio da sequência de Pell ou equação de Pell. Gullberg (1997, p. 288) esclarece que "embora a sequência de Pell foi nomeada após sua morte, nós não encontramos nenhuma outra boa publicação que enfatize sua real e extensiva contribuição".

Figura 1. Walker (2011, p. 150) discute relações explícitas relacionadas
com a sequência recorrente de Johhn Pell (1611 – 1685)

Por fim, Waker (2011, p. 37) observa que Pell preferia permanecer no anonimato. Desse modo, suas publicações não se evidenciaram ou concorreram em maior impacto científico tanto quanto os manuscritos e artigos de seus contemporâneos. Na próxima seção, estudaremos a sequência de Pell, apresentada por Walker (2001, p. 38) com ênfase em determinados aspectos desconsiderados por autores de livros de HM. Em seguida, abordaremos a generalização do referido modelo.

2. A SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE PELL – SGP

Na introdução do seu manuscrito, Bicknell (1975, p. 345) observa que:

> Os leitores regulares deste jornal estão razoavelmente acostumados com propriedades básicas e identidades relacionadas com a sequência de Fibonacci e suas sequências associadas, bem como a sequência de Lucas. Todavia, pode ser desconhecido o fato de que a sequência de Pell é uma de várias outras sequências que partilha um grande número das mesmas propriedades básicas.

No excerto acima, a autor direciona seu discurso aos leitores da revista intitulada *The Fibonacci Quarterlly*, periódico dedicado aos leitores e entusiastas da sequência formulada por Leornardo de Fibonacci. Bicknell (1975, p. 345) fornece a seguinte sequência numérica: $(1,2,5,12,29,70,169,\ldots,p_n,\ldots)$. Pouco mais adiante assina que "é fácil ver que, cada termo da lista anterior é dado pela fórmula $p_n = \ p_{n-1} + p_{n-2}$, $p_1 = 1, p_2 = 2$". Por outro lado, registramos no trabalho de Alves & Borges Neto (2011) e Alves (2016) a possibilidade de descrição da sequência de Fibonacci no campo dos números inteiros, que denotaremos por $(p_n)_{n\in Z}$. Com um raciocínio semelhante, Horadam (1971), ainda na década de 70, acentua possibilidade análoga para o caso da sequência de Pell $(p_n)_{n\in Z}$, como divisamos na figura 2.

$\{P_n\}:$	$\cdots$	P_{-4}	P_{-3}	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	$\cdots$
	$\cdots$	-12	5	-2	1	0	1	2	5	12	29	$\cdots$

Figura 2. Horadam (1971, p. 245) descreve a sequência de Pell $(p_n)_{n\in Z}$ definida no campo dos inteiros, de modo semelhante ao caso de $(f_n)_{n\in Z}$

Com posição concorde a de Horadam, Bicknell (1975, p. 345) afirma que "tal sequência pode ser extendida, com os seguintes valores e seu termo geral : $p_0 = 0, p_{-1} = 1, p_{-2} = -2, p_{-3} = 5,\ldots, p_{-n} = (-1)^{n+1}\cdot p_n$ ". A fórmula indicada por Bicknell pode ser verificada, com a seguinte constatação: $p_{-n} = (-1)^{n+1}\cdot p_n$, que possui íntima relação com a mesma propriedade, no caso da sequência de Fibonacci. Ademais, tendo em vista a descrição $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2} \therefore \left(\frac{p_n}{p_{n-1}}\right) = 2 + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = 2 + \frac{1}{\left(\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\right)}$. No que segue, assumiremos $y_n := \frac{p_n}{p_{n-1}}; y_{n-1} := \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \therefore (y_n) = 2 + \frac{1}{(y_{n-1})}$ .Ora, assumindo a existência do seguinte limite em termos da sequência definida há pouco: $y_n := \frac{p_n}{p_{n-1}}; y_{n-1} := \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \therefore (y_n) = 2 + \frac{1}{(y_{n-1})}$

Dai, Bicknell (1975, p. 345) exibe a seguinte equação $y^2 = 2y + 1 \leftrightarrow y^2 - 2y - 1 = 0$. De imediato, vemos que suas raizes são descritas por $\alpha = \frac{2+\sqrt{8}}{2}, \beta = \frac{2-\sqrt{8}}{2}$. Dai, observamos, por Indução Matemática que : $p_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1, p_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{1} = 2$,

$$p_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha - \beta)} \underset{\beta^2 = 2\beta+1}{\overset{\alpha^2 = 2\alpha+1}{=}} \frac{2\alpha + 1 + \alpha\beta + 2\beta + 1}{1} = 2 + 2(\alpha + \beta) - 1 = 6 - 1 = 5 \text{ e,}$$

admitindo $p_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, deveria haver que:

$$p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1} = 2\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{2\alpha^n - 2\beta^n + \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(2\alpha^n + \alpha^{n-1}) - (2\beta^n + \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(2\alpha + 1) - \beta^{n-1}(2\beta + 1)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha^2) - \beta^{n-1}(\beta^2)}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \therefore p_{n+1} = \frac{\left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{2-\sqrt{8}}{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}, \text{ n} \geq 1$$

O resultado acima, verificado apenas para índices naturais, pode ser verificado, ainda, com base na teoria das equações de diferenças, como assinala Ivie (1970). Neste caso, o autor considera a seguinte equação geral $p_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$, e, com as condições iniciais $p_0 = 0, p_1 = 1$, escrevemos : $\begin{cases} p_0 = A + B = 0 \\ p_1 = A \cdot \alpha + B \cdot \beta = 1 \end{cases}$. Fazendo as contas no sistema anterior, Ivie (1970, p. 108) indica os valores $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{B} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Pouco mais adiante retomaremos as mesmas ideias de modo pormenorizado. Portanto, estabelecemos uma fórmula explícita para os números de sequência de Pell, semelhante ao modelo descrito como a fórmula de Binnet, dada agora pela seguinte expressão

$$p_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{2-\sqrt{8}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

Outra propriedade semelhante ao que registramos no caso da sequência de Fibonacci, se mostra acentuada por Bicknell (1975, p. 345), ao comentar que "geometricamente, os números de Fibonacci são relacionados com o retângulo de ouro, que possui a propriedade, relativamente a qual, se removermos um quadrado cujo lado seja igual a largura do retângulo, e o retângulo remanescente é ainda um retângulo de ouro". Stakhov & Aranson (2011, p. 78) recorda que os números $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $1+\sqrt{2}$ são chamados, respectivamente, razão de ouro e razão de prata (FALCÓN, 2011).

Ora, no caso de sequência de Pell, obtivemos a relação $\frac{y}{1}=\frac{1}{y-2}$ que descreve o raio do comprimento do "retângulo de prata", de comprimento y e largura 1. Agora, quando dois quadrados, de lados iguais, são removidos, de mesma medida da largura, o "retângulo de prata" remanescente possui a mesma razão de comprimento com a largura, como no caso do retângulo original. Divisamos a relação anterior, com base na figura 3, descrita por relações geométricas e determinadas razões e propriedades semelhantes ao caso da razão de ouro estudada pelos gregos (DEBNATH, 2011, p. 342).

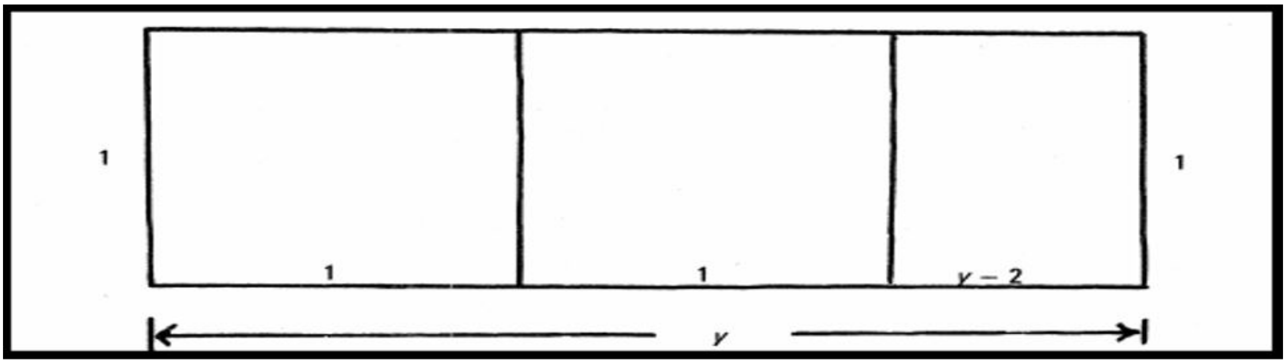

Figura 3. Bicknell (1975, p. 346) explica a obtenção do *retângulo de prata* relacionado com a sequência de Pell que possui significado análogo ao retângulo áureo.

Logo na sequência, o mesmo autor comenta a propagação do processo obtenção das médias proporcionais anteiores, descritos pela igualdade anterior e, desse modo, a replicação do "retângulo de prata", semelhantemente ao processo com a razão áurea, que se relaciona de modo íntimo com a Sequência de Fibonacci (ALVES; 2015b; ALVES, 2016).

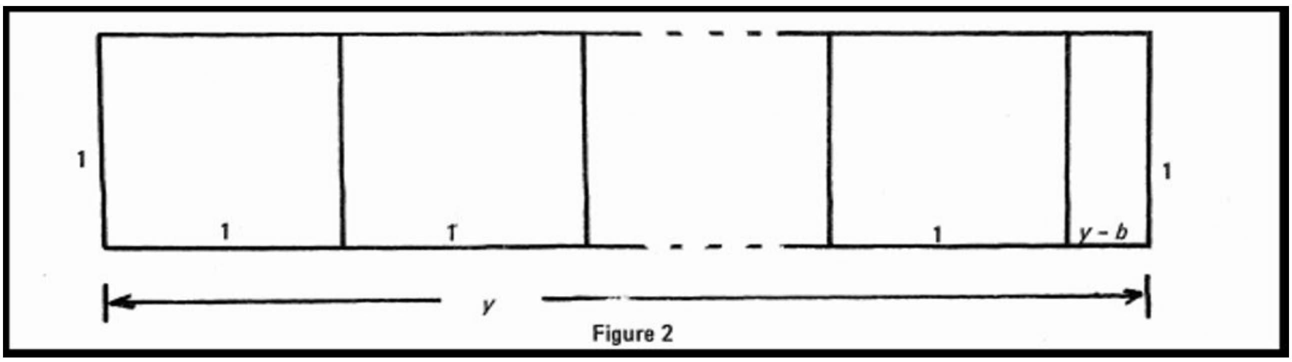

Figura 4. Bicknell (1975, p. 348) explica a generalização do processo de obtenção do *retângulo de prata* relacionado com a sequência de Pell

No que concerne a sua expansão em índices inteiros, Hansen (1972, p. 573) enuncia o seguinte lema: A sequência de Lucas satisfaz a seguinte relação $L_n = f_{n+1} + f_{n-1}, n \in Z$. Em sua demonstração, Hansen observa, apenas, que

$$f_{-n}=\frac{\alpha^{-n}-\beta^{-n}}{\alpha-\beta}=\frac{1}{(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{\alpha^n}-\frac{1}{\beta^n}\right)=\frac{1}{(\alpha-\beta)}\left(\frac{\beta^n-\alpha^n}{(\alpha\beta)^n}\right)=\frac{(-1)}{(\alpha-\beta)}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{(-1)^n}\right)=(-1)^{-n+1}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)$$

ou seja, vale $f_{-n}=(-1)^{-n+1}\cdot f_n$, com $n\geq 0$. De modo similar, no caso da sequência de Lucas, infere $L_{-n}=\alpha^{-n}+\beta^{-n}=(\alpha\beta)^{-n}\left(\alpha^n+\beta^n\right)=(-1)^n(\alpha^n+\beta^n)=(-1)^n\cdot L_n$. Por fim, a equação $f_{(-n)+1}+f_{(-n)-1}=f_{-(n-1)}+f_{-(n+1)}=(-1)^{-(n-1)+1}f_{n-1}+(-1)^{-(n+1)+1}f_{n+1}=(-1)^{(-n)}\left(f_{n-1}+f_n\right)=(-1)^{(-n)}L_n=L_{-n}$. Portanto, Hansen conclui a igualdade anterior para todos os inteiros.

Ercolano (1979) discute a descrição da sequência de Pell, por intermédio de representações matriciais. Neste sentido, indica a seguinte matriz geradora da mesma $M=\begin{pmatrix}p_2 & p_1\\ p_1 & p_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. E podemos observar que $M^2=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_3 & p_2\\ p_2 & p_1\end{pmatrix}$. E, procedendo por indução, verificamos:

$$M^{n+1}=M^n\cdot M=\begin{pmatrix}p_n & p_{n-1}\\ p_{n-1} & p_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p_n+p_{n-1} & p_n\\ 2p_{n-1}+p_{n-2} & p_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{n+1} & p_n\\ p_n & p_{n-1}\end{pmatrix}$$

. Reparemos ainda que, com origem na relação anterior, podemos determinar que

$$(-1)^{n+1}=(\det(\mathrm{M}))^{n+1}=\det(M^{n+1})=\det\begin{pmatrix}p_{n+1} & p_n\\ p_n & p_{n-1}\end{pmatrix}=\left(p_{n+1}\cdot p_{n-1}-p_n^{\,2}\right).$$

Ou seja, semelhantemente à fórmula de Cassini (KOSHY, 2007, p. 133) para o caso da sequência de Fibonacci, que indica a relação $f_{n+1}\cdot f_{n-1}-f_n^{\,2}=(-1)^{n+1}$, encontramos uma relação equivalente $p_{n+1}\cdot p_{n-1}-p_n^{\,2}=(-1)^{n+1}$ para a sequência de Pell. Ora, se empregarmos ainda a identidade matricial $M^{n+p}=M^nM^p$, podemos encontrar a seguinte relação generalizada segundo a abordagem matricial:

$$\begin{pmatrix}p_{n+p+1} & p_{n+p}\\ p_{n+p} & p_{n+p-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{n+1} & p_n\\ p_n & p_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{p+1} & p_p\\ p_p & p_{p-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{n+1}p_{p+1}+p_np_p & p_{n+1}p_p+p_np_{p-1}\\ p_np_{p+1}+p_{n-1}p_p & p_np_p+p_{n-1}p_{p-1}\end{pmatrix}$$

Ora, com origem na igualdade anterior, Bicknell (1975, p. 347) escreve a seguinte relação $p_{n+p+1}=p_{n+1}p_{p+1}+p_np_p$, com $n,p\in IN$. Considerando a seguinte relação $M^{n+1}=\begin{pmatrix}p_{n+1} & p_n\\ p_n & p_{n-1}\end{pmatrix}$, podemos avaliar, por intermédio de um raciocínio semelhante para o caso da sequência de Fibonacci (BASIN; VERNER & HOGGAT, 1972, p. 19) a expressão algébrica envolvendo matrizes que indicamos, da seguinte forma $\begin{pmatrix}p_{2n+2} & p_{2n+1}\\ p_{2n+1} & p_{2n}\end{pmatrix}=M^{2n+1}=M^nM^{n+1}=\begin{pmatrix}p_n & p_{n-1}\\ p_{n-1} & p_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{n+1} & p_n\\ p_n & p_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_np_{n+1}+p_{n-1}p_n & p_np_n+p_{n-1}p_{n-1}\\ p_{n-1}p_{n+1}+p_{n-2}p_n & p_{n-1}p_n+p_{n-2}p_{n-1}\end{pmatrix}$

e concluir a seguinte identidade $p_{2n+1} = p_n{}^2 + p_{n-1}{}^2$.

Retomando a fórmula explícita para os números da sequência de Pell, vimos que $p_n = \dfrac{\left(\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}\right)^n}{\alpha-\beta}$ e, acompanhando o tirocínio de Bicknell, revelamos o comportamento do seguinte quociente

$$\left(\frac{p_n}{p_{n-1}}\right) = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}} = \frac{\alpha-\beta\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}} \underset{0<\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)<1}{\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} \frac{\alpha-\beta\cdot 0}{1-0} = \quad \alpha = \left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right) = 1+\sqrt{2}$$

e registrando a seguinte propriedade $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$. Por outro lado, obtivemos que $p_n = \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{2}}$ e tal fórmula pode ser expressa para qualquer $n \in Z$. Daí, para $n > 0$, buscamos expressar

$$p_{-n} = \frac{\alpha^{-n}-\beta^{-n}}{2\sqrt{2}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\alpha^n}-\dfrac{1}{\beta^n}\right)}{2\sqrt{2}} = \frac{(\beta^n-\alpha^n)}{2\sqrt{2}\left(\alpha\beta\right)^n} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{2}\left(-1\right)^n} = \left(-1\right)^{-n}\cdot p_n .$$

Horadam (1971, p. 245 – 246) descreve ainda a Sequência Generalizada de Pell (SGP). Emprega a seguinte notação $\{W_n(a,b:p,q)\}$. Daí, Horadam fornece a seguinte listagem: $(\ldots,\ldots,W_{-3},W_{-2},W_{-1},W_0,W_1,W_2,W_3,W_4,\mathrm{W}_5,\mathrm{W}_6,\ldots,\ldots)$. Na figura abaixo, o autor admite que $W_0 = a, W_1 = b, W_{n+2} = p\cdot W_{n+1} - q\cdot W_n$, com a condição de que $a,b,p,q \in Z$. E, um pouco adiante, assinala que a SGP é determinada pela fórmula $W_n(0,1:2,-1)$.

$$\cdots \quad \frac{pa-b}{q}, \ a \ , \ b \ , pb-qa \, , p^2b-pqa-qb \, , \cdots \quad \cdots$$

Figura 5. Horadam (1971) fornece, de modo explícito, os termos gerais de uma SGP.

Com origem do artigo de Horadam, Swita & Filiponi (1994), para concluir, trazemos mais uma espécie generalização oriunda do modelo da sequência recorrente de Pell. Esses autores indicam a seguinte relação polinomial $p_n(x) = 2x\cdot p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x), p_0(x) = 0, p_1(x) = 1$. Tal relação define os polinomios de Pell ou Sequência Polinomial de Pell - SPP, conforme a explicação de Horadam, Swita & Filiponi (1994, p. 130). Horadam & Mahon (1985, p. 7), seguindo mais uma vez o raciocínio da possibilidade de descrição em todo o campo dos inteiros, observam simplesmente que vale a identidade polinomial que indicam por $p_{-n}(x) = (-1)^{n+1}\cdot p_n(x)$, $\forall x \in IR$.

Eles descrevem, ainda, alguns termos iniciais, que indicam por: $p_2(x)=2\text{x}, p_3(x)=4\text{x}^2+1, p_4(x)=8x^3+4x$

$, p_5(x)=16x^4+12x^2+1, p_6(x)=32x^5+32x^3+6x, etc...$

Nesse caso, podemos introduzir uma variável ¨Y¨, considerar a equação $Y^2-2xY-1=0$. E, assim, inferir que a expresão correspondente para as suas raizes são dadas por $\alpha(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ e $\beta(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ e, desse modo, escrever a fórmula explícita para os termos da SPP da seguinte maneira $p_n(x)=\left(\frac{\alpha(x)^n-\beta(x)^n}{\alpha-\beta}\right)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^n}{2\sqrt{x^2+1}}$, para $\forall x\in IR$.

Concluiremos essa seção discutindo o modelo matemático de extensão contínua da seguinte fórmula $p_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, que fornece uma descrição explícita de seus termos, todavia, para valores no domínio no campo dos reais. Para tanto, Scott (1968, p. 245) apresenta um problema de encontrar as funções contínuas $f(x)$ satisfazendo a equação (*) $f(x)-c_1f(x-1)-c_2f(x-2)=0$, onde $c_1,c_2\in IR$, onde α,β constituem as raízes da equação $x^2-2c_1x-c_2=0$. Adaptamos seu modelo ao nosso caso de interesse. Desse modo, fazendo as contas (por Bashkara), são descritas por $\alpha=c_1+\sqrt{c_1^2+c_2}$ e $\beta=c_1-\sqrt{c_1^2+c_2}$. Dessa forma, podemos ainda empregar as seguintes condições $\alpha^2-2c_1\alpha-c_2=0$ e que , tendo em vista as raízes α,β da equação anterior.

Com origem na primeira equação $\alpha^2-2c_1\alpha-c_2=0$, Scott (1968, p. 245 – 246) escreve: $\alpha^2-2c_1\alpha-c_2=0\leftrightarrow\alpha^{x-2}\times(\alpha^2-2c_1\alpha-c_2)=\alpha^{x-2}\times0=0\leftrightarrow(\alpha^x-2c_1\alpha^{x-1}-c_2\alpha^{x-2})=0$. E, então, estabelece que $\alpha^x=2c_1\alpha^{x-1}+c_2\alpha^{x-2},\forall x\in IR$. De modo similar, obteremos também $\beta^x-2c_1\beta^{x-1}-c_2\beta^{x-2}=0\therefore\beta^x=2c_1\beta^{x-1}+c_2\beta^{x-2}$. Ou seja, determinamos soluções particulares para a equação (*) indicadas pelo par $\alpha^x=2c_1\alpha^{x-1}+c_2\alpha^{x-2}$, $\beta^x=2c_1\beta^{x-1}+c_2\beta^{x-2}$, para valores reais.

De modo geral, quando lidamos com Sequência Recorrentes Lineares Homogêneas – SRLH, assumimos o modelo descrito em Vorobe´v (1961, p. 24), quando aponta $\left(c_1\alpha^0+c_2\beta^0,c_1\alpha^1+c_2\beta^1,c_1\alpha^2+c_2\beta^2,\ldots,c_1\alpha^n+c_2\beta^n,\ldots\right)$ as soluções gerais das mesmas, que adaptamos ao caso da SP.

E, num caso particular, Scott (1968, p. 246) passa, então, a considerar expressão similar $U(x)=2c_1\cdot a^x+c_2\cdot b^x$, em que $k_1,k_2\in IR$ são quaisquer constante e passa, logo em seguida, a considerar os seguintes casos: (i) $a>0,\text{b}>0$; (ii) $a>0,\text{b}<0$; (iii) $a<0,\text{b}<0$.

De imediato, se ocorrer (i), teremos a seguinte função contínua na variável real 'x', $U(x) = 2c_1 \cdot a^x + c_2 \cdot a^x$ Por outro lado, quando ocorre (ii) ou (iii) (b<0), deve acontecer que $b^x \in C - IR$. Isto é, assumirá valores imaginários no campo dos complexos. Não obstante, Scott (1968) acentua que " não fornece, imediatamente, uma extensão com valores reais que procuramos". Desse modo, para $c_1, c_2 \in IR$, $a = 1 + \sqrt{2} = \alpha$, $b = 1 - \sqrt{2} = \beta$ e, em se tomando $V(x) = \mathrm{Re}[U(x)]$, será uma função real que satisfaz a condição (*). Recordamos que casos semelhantes são discutidos em Lucas (1877, p. 185).

Um pouco mais adiante, ao considerar uma SRLH, no caso do modelo de Fibonacci, assume $c_1 = c_2 = 1 \therefore \alpha = 1 + \sqrt{2} > 0$ e $\beta = 1 - \sqrt{2} < 0$. Por outro lado, Scott escreve $\alpha^{-1} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^{-1} = \sqrt{2} - 1 = -(1 - \sqrt{2}) = -\beta$ e, desde que $e^{\pi i} = -1$, podemos encontrar: $\beta^x = (-1)^x \cdot (-\beta)^x = e^{\pi i x} \cdot (-\beta)^x \overset{\delta = -\beta}{=} \delta^x \left(\cos \pi x + i sen \pi x\right)$. Segue que, para o caso

$$\begin{cases} U(0) = 2c_1 \cdot \alpha^0 + c_2 \cdot \beta^0 = p(0) = 0 \\ U(1) = 2c_1 \cdot \alpha^1 + c_2 \cdot \beta^1 = p(1) = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 \cdot \alpha + c_2 \cdot \beta = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = 0 \end{cases}.$$

Em seguida, passamos a determinar os valores para as incógnitas do sistema anterior, descritas por

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Por fim, encontra $\mathrm{Re}(U(x)) = \mathrm{Re}(\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \alpha^x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \beta^x) = \mathrm{Re}(\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \alpha^x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\delta^x \left(\cos \pi x + i sen \pi x\right)\right)) =$. Isto é, determinamos que $\mathrm{Re}(\frac{\alpha^x - \delta^x \cdot \cos(\pi x)}{\sqrt{2}} - i\frac{\delta^x \cdot sen \pi x}{\sqrt{2}}) = \frac{\alpha^x - \delta^x \cdot \cos(\pi x)}{\sqrt{2}}$. Por fim, Scott (1968, p. 247) exibe a seguinte função na variável real 'x', agora descrita por $f(x) = \frac{\alpha^x - (-\beta)^x \cdot \cos(\pi x)}{\sqrt{5}}$, aonde $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e $\beta = 1 - \sqrt{2}$. Vale comentar que o modelo sugerido por Scott não é o único que encontramos na literatura. Com efeito, considerando modificações necessárias para o caso da SP, podemos considerar ainda $f(x) = \frac{\alpha^x - e^{i\pi x} \cdot \alpha^{-x}}{\sqrt{2}}$, como sendo uma adaptação do caso da SGP relativa ao caso da Sequência de Fibonacci. A última fórmula pode ser originalmente encontrada em André-Jeanin (1991, p. 13) ou em Horadam & Shannon (1988, p. 3).

Assim, temos a possibilidade de prever o comportamento da função anterior, de acordo com sua extensão ao campo dos números complexos. No trabalho de Rana; Chauhan & Negi (2010), deparamos uma aplicação imediato, no contexto de Sistemas Dinâmicos, para a função de Pell, vista como função na variável complexa. E, em consonância com um estudo peculiar nesta área de investigação, os autores descrevem o comportamento da função de Pell, no processo de aproximação ou não de pontos fixos. Na figura abaixo, Rana; Chauhan & Negi (2010, p. 27 – 28), com recurso computacional, proporcionam a visualização de um Fractal, gerado a partir do modelo de Pell e de Pell-Fibonacci sequence. Os autores o denominam de Pell-Fibonacci Fractal (fractal de Pell-Fibonacci).

No próximo segmento estabeleceremos um contra-ponto aos resultados apresentados nas duas últimas seções. Com efeito, abordaremos identidades recentes, apreciadas em artigos científicos, ratificando o caráter não estático, de vigor indene e atual do modelo de Pell. Vale assinalar que os conhecimentos mobilizados até esse momento são compatíveis com as exigências de um curso inicial de formação de professores de Matemática (ALVES, 2016).

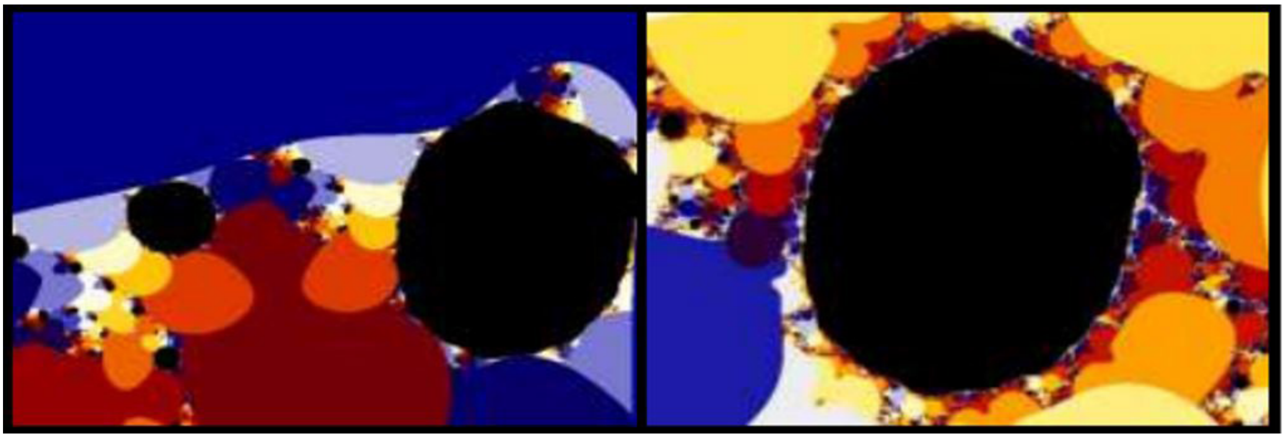

Figura 6. Rana; Chauhan & Negi (2010, p. 27 – 28) discutem a construção de Fractais com o uso do modelo da sequência de Pell e Fibonacci.

3. ALGUNS RESULTADOS RECENTES SOBRE A SGP

Nesta seção acentuaremos alguns resultados hodiernos, extraidos da SGP. Constatamos em vários livros de HM que, muitas das propriedades doravante discutidas são abordadas, para o caso da SF ou da SL, entretanto, quando objetivamos a SGP, resultados semelhantes carecem de maior publicização no *locus* acadêmico, quando consideramos aqui um contexto de graduação em Matemática. Neste sentido, no manuscrito de Kilic & Tasci (2005), registramos o seguinte resultado.

Lema: sendo p_n o n-ésimo número da sequência de Pell, então, valem os seguintes resultados : (i) $2p_n p_{n-1} + p_{n-1}^2 - p_n^2 = (-1)^n$; (ii) $2p_{n-1}p_n = p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2 - 2p_n p_{n+1}$; (iii) $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \cdots + p_n^2 = \frac{p_n p_{n+1}}{2}$; (iv)

$$p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_4 + \cdots + p_{n-1} p_n = \begin{cases} \dfrac{p_{2n+1} - 2p_{n+1}p_n - 1}{2} \\ \dfrac{p_{2n-1} + 2p_n p_{n-1} - 1}{2} \end{cases}.$$

Demonstração: Vejamos o item (i). De imediato, para $n = 1 \therefore 2p_1 p_0 + p_0^2 - p_1^2 = 0 + 0 - 1 = (-1)^1$. E para $n = 2 \therefore 2p_2 p_1 + p_1^2 - p_2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 - 2^2 = 1 = (-1)^2$. No que segue, assumindo o passo indutivo, Kilic & Tasci (2005, p. 2), escrevem

$2p_np_{n-1} + p_{n-1}^2 - p_n^2 = p_{n-1}(2p_n + p_{n-1}) - p_n^2 = (p_{n+1} - 2p_n)(p_{n+1}) - p_n^2$. Portanto, obtém a seguinte igualdade $2p_np_{n-1} + p_{n-1}^2 - p_n^2 = -2p_np_{n+1} - p_n^2 + p_{n+1}^2 = -1\cdot(2p_np_{n+1} + p_n^2 - p_{n+1}^2) = (-1)(-1)^n$. Daí, segue, imediatamente, que: $2p_np_{n+1} + p_n^2 - p_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, para todo índice natural.

No caso do item (ii), repetimos o argumento preliminar, que indica a seguinte igualdade descrita $n = 1 \therefore 2p_0p_1 = 0 = 1 = 2^2 - 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1 = p_2^2 - p_1^2 - 2p_1p_2$. Em seguida, para $n = 2 \therefore 2p_1p_2 = p_3^2 - p_1^2 - 2p_2p_3 \leftrightarrow 2\cdot 1\cdot 2 = 5^2 - 1^2 - 2\cdot 2\cdot 5 = 4$. Logo em seguida, usando o item (i), teremos: $2p_{n-1}p_n + 2p_np_{n+1} = \left(p_n^2 - p_{n-1}^2 + (-1)^n\right) + \left(p_{n+1}^2 - p_n^2 + (-1)^{n+1}\right) =$

$$p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2 + (-1)^n + (-1)(-1)^n = p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2 \therefore 2p_{n-1}p_n + 2p_np_{n+1} = p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2.$$

Reparemos, no argumento anterior, o emprego do item (i), e não o modelo de indução matemática. Correspondentemente ao item (iii), Kilic & Tasci admitem que

$$a_i = \frac{p_ip_{i+1}}{2} \therefore a_i - a_{i-1} = \frac{p_ip_{i+1}}{2} - \frac{p_ip_{i-1}}{2} = \frac{p_i(p_{i+1} - p_i)}{2} = \frac{p_i(2p_i)}{2} = p_i^2 .$$

Com origem na expressão anterior, passaremos a tomar a seguinte soma finita: $p_2^2 + p_3^2 + \cdots + p_n^2 = \sum_{i=2}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_1 \therefore \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = a_n - a_1 + 1 = a_n = \frac{p_np_{n+1}}{2}$ e segue o resultado. Para concluir, Kilic & Tasci (2005, p. 165), com origem no item (ii), escrevem:

$$\begin{cases} 2p_1p_2 = p_3^2 - p_1^2 - 2p_2p_3 \\ 2p_2p_3 = p_4^2 - p_2^2 - 2p_3p_4 \\ 2p_3p_4 = p_5^2 - p_3^2 - 2p_4p_5 \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ 2p_{n-2}p_{n-1} = p_n^2 - p_{n-2}^2 - 2p_{n-1}p_n \\ 2p_{n-1}p_n = p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2 - 2p_np_{n+1} \end{cases}$$

E, por adição das equações anteriores, obtêm que

$2(p_1p_2 + p_2p_3 + \cdots + p_{n-1}p_n) = (p_3^2 - p_1^2) + (p_4^2 - p_2^2) + (p_5^2 - p_3^2) + \cdots + (p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2) -$
$2(p_2p_3 + p_3p_4 + p_4p_5 + \cdots + p_{n-1}p_n + p_np_{n+1})$. Os pormenores podem ser apreciados no

escrito de Kilic & Tasci (2005, p. 166), de modo que, para os valores particulares da SP, que

indicamos por $p_1 = 1, p_2 = 2$ encontraremos $p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_4 + \cdots + p_{n-1}p_n = \frac{p_{2n+1} - 2p_{n+1}p_n - 1}{2}$

, enquanto que, para os valores iniciais $p_1 = 1, p_2 = 3$, inferimos finalmente que

$$p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_4 + \cdots + p_{n-1}p_n = \frac{p_{2n-1} + 2p_np_{n-1} - 1}{2} .$$

Os ultimos resultados discutidos ainda em literatura científica recente evidenciam a constante evolução e a uma profusão de propriedades oriundas do modelo de sequência recorrente homogênea linear.

4. CONSIDERAÕES FINAIS

Neste trabalho discutimos alguns aspectos relacionados com a Sequência de Pell e a Sequência Generalizada de Pell – SGP. Abordamos certas propriedades relacionadas com um modelo matemático que foi objeto de interesse por parte do matemático John Pell (1611 – 1685). Podemos constatar, pois, com origem na consulta de artigos da década de 80 e 90, a própria evolução de um modelo matemático, no sentido de sua sistematização e enlarguecimento de suas relações teórico-conceituais em vários ramos especializados da Matemática. Tal fato pode ser constatado a partir da consulta de trabalhos mais recentes (CATARINO, 2013; HALICI & DASDEMIR, 2010; RANA, CHAUHAN & NEGI, 2010; KILIC & TASCI, 2005; 2006; RAY, 2009; WALKER, 2011).

Assim, como origem nas referidas fontes, constatamos a descrição dos termos explícitos da sequência $(p_n)_{n\in IN}$, com índices inteiros que denotamos ao decurso do escrito por $(p_n)_{n\in Z}$. Ademais, como origem na fórmula demonstrada e descrita por $p_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{2-\sqrt{8}}{2}\right)^n$ podemos facilmente determinar o comportamento do quocinte $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1+\sqrt{2}$ conhecido como razão de prata. Ademais, como origem em uma adaptação do modelo desenvolvido por Scott (1968), expressamos a função de Pell, na variável real, que indicamos por $f(x) = \frac{\alpha^x - (-\beta)^x \cdot \cos(\pi x)}{\sqrt{2}}$, ou ainda a fórmula $f(x) = \frac{\alpha^x - e^{i\pi x}\cdot\alpha^{-x}}{\sqrt{2}}$, quando adaptamos a descrição de Andre-Jeannin (1991).

Para concluir, temos a oportunidade de comparar inúmeras identidades discutidas por autores de livros de HM (ESTRADA, 2000; EVES, 1969; GULLBERG, 1997; HERZ, 1998), nos casos da Sequências de Fibonacci e de Lucas, com outras, relativamente recentes, que demonstramos na última seção, para o caso da Sequência de Pell. As identidades discutidas por Kolic & Tasci (2005; 2006) evidenciam as repercussões epistemológicas de um modelo no âmbito da pesquisa em alto nível.

Para concluir, vale assinalar que mantivemos nosso olhar afetado por um interesse que se caracteriza por uma "análise historiográfica", que assumimos aqui, segundo um olhar de Nobre (2003, p. 541). E, nesses termos, assinalamos que "o papel do historiador é sempre estar atento à origem das informações que recebe e à diversidade dos caminhos que levaram à concepção do fato histórico consumado". Em nosso caso, trazemos ao leitor (professor de Matemática) informações extraídas de escritos acadêmicos produzidos nas décadas de 80 e de 90 que mostram a evolução do modelo proposto pelo matemático John Pell (1611 – 1685). A discussão e apreciação da evolução de um modelo deverá asseverar o caráter não estático evolutivo do conhecimento matemático (ALVES, 2015a; 2015b).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, F. R. V. **Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF e relações com a razão áurea**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática – BOCEHM, v. 2, nº 6, p. 1 – 5, 2015a.

ALVES, F. R. V. **Sobre a Evolução Histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci.** Revista VYDIA Educação, v. 35, nº1, p. 133 – 148, 2015b.

ALVES, F. R. V. **Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci na disciplina de História da Matemática: uma experiência num curso de licenciatura.** Educação Matemática Pesquisa, v. 18, nº1, p. 123 – 156, 2016.

ALVES, Francisco, R. V. & BORGES NETO, Hermínio. **A existência da Sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi.** Boletim GEPEM, v. 12, nº 59, 135-140, 2012.

ANDRÉ-JEANNIN. R. **Generalized Complex Fibonacci and Lucas Functions.** The Fibonacci Quarterly. v. 29, nº 1, February, 13 – 18, 1991.

BASIN, S. L; VERNER, E & HOGGAT, Jr.. **A primer on the Fibonacci Sequence.** MICKNELL, Marjorie; VENNER, E. & HOGGAT, Jr. 1972. A primer on the Fibonacci Sequence, 18 – 23. California: Santa Clara University, 1971.

BICKNELL, Marjorie. **A primer on the Pell sequence and related sequences.** The Fibonacci Quarterly. v. 13, nº 4, December, 345 – 350, 1975.

CATARINO, Paula. On **Some Identities and Generating Functions for k-pell numbers.** International Journal of Mathematical Analysis, v. 7, nº 38, 1877 – 1884, 2013.

DEBNATH, Lokenath. **A short history of the Fibonacci and Golden Numbers with their applications.** International Journal of Mathematics Education on Science and Technology, v. 42, nº 3, 337 – 367, 2011.

ERCOLANO, Joseph. **Matrix Generators of Pell Sequences.** The Fibonacci Quarterly. v. 17, nº 1, February, p. 71 – 77, 1979.

ESTRADA, et al. **História da Matemática.** Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EVES, Howard. **An introduction to the History of Mathematics.** Third edition. New York: Holt, Hinehart and Winston, 1969.

FALCÓN, Sergio. & PLAZA, Ángel. **On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives.** Chaos, Solutions and Fractals. v. 1, nº 39, p. 1006 – 1019, 2007.

FALCON, Sergio. **On the k-Lucas Numbers.** International Journal Contemporary Mathematics Science, v. 6. nº 21, p. 1039 – 1050, 2011.

FILIPPONI, P. **Real Fibonacci and Lucas Numbers with real subscritps.** The Fibonacci Quarterly.

v. 31, nº 4, November, p. 307 – 315, 1993.

GULLBERG, Jan. **Mathematics: from the birth of numbers.** New York: W. W. Norton & Company, 1997.

HALICI, Serpil. & DAŞDEMİR, Ahmet. **On some relationships among Pell, Pell-Lucas and modified Pell-sequences.** Fen Bilimleri Dergisi, v. 1, nº 1, p. 141 – 145. 2010.

HANSEN, Rodney. T. **Generating Identities for Fibonacci and Lucas Triples.** The Fibonacci Quarterly. v. 10, nº 6, December, p. 571 – 579, 1972.

HERZ, Fischler, R. **A mathematical history of Golden Number.** New York: Dover Publications Inc, 1998.

HORADAM, A. F. Pell identities. **The Fibonacci Quarterly.** v. 9, nº 3, November, p. 245 – 253, 1971.

HORADAM, A. F. & MAHON, Bro. J. M. **Pell and Pell-Lucas Polynomials.** The Fibonacci Quarterly. v. 23, nº 1, February, p. 7 – 21, 1985.

HORADAM, A. F. & FILIPPONI, P. **Real Pell and Pell-Lucas numbers with real subscripts.** The Fibonacci Quarterly. v. 33, nº 5, November, p. 386 – 391, 1995.

HORADAM, A. F; SWITA, B. & FILIPPONI, P. **Integration and Derivative Sequences for Pell and Pell-Lucas Polynomials.** The Fibonacci Quarterly. v. 32, nº 2, November, p. 386 – 391, 1994.

IVIE, J. **Problem B-161.** The Fibonacci Quarterly. v. 8, nº 1, February, p. 107 – 108, 1970.

KILIC, Emrah. & TASCI, Dursun. **The Linear Algebra of the Pell Matrix.** Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. v. 11, nº 3, p. 1 – 12, 2005.

KILIC, Emrah. & TASCI, Dursun. **The generalized Binet formula, representation of sums, generalixed order-k pell numbers.** Taiwanese Journal of Mathematics, v. 10. nº 6, December, p. 1661 – 1670, 2006.

MALCOLM, Noel. **The publications of John Pell, F. R.S (1611 – 1685): some new lights and some old confusions.** Notes and Records of the Royal Society of London. v. 54, nº 3, p. 275 – 292, 2000.

MANA, P. **Problemas B – 136**, The Fibonacci Quarterly. v. 7, nº 1, February, p. 106 – 107, 1969.

NOBRE, Sergio. **Leitura crítica da História: reflexões sobre a história da matemática.** Ciência e Educação, v. 10, nº 3, p. 531 – 543, 2003.

RANA, Rajeshri; CHAUHAN, Yashwant S. & NEGI, Ashish. **Complex Dynamics of Pell Sequence.** International Journal of Computer Applications. v. 7, nº 1, p. 24 – 30, 2010.

RAY, Prasanta, K. **Balacing and Cobalancing Numbers.** (thesis in Philosophy of Mathematics).

Rourkela: National Institute of Rourkela, India, 2009.

STAKHOV, Alexey & ARANSON, Samuil. **Hiperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bornar´s Geometry, Hilbert´s Fourth Problem.** Applied Mathematics. nº 2, p. 74 – 84, 2011.

SURYANARAYAN, E. R. **The Brahmagupta Polynomials.** The Fibonacci Quarterly. v. 34, nº 1, February, p. 30 – 40, 1996.

WALKER, Ian. **Explorations in Recursion with John Pell and the Pell Sequence: Recurrence Relations and their Explicit Formulas.** (Master's of Teaching Mathematics). Portland: Portland State University, 2011.