2017 | Volume 14 | Nº 1 | Pág. 43 a 62

DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.14.2017.43-62.323

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Uma experiência num curso de Licenciatura em Matemática: Engenharia Didática com o tema Equações Quadráticas

An experience in a degree course in Mathematics: Didactic Engineering with the theme Quadratic Equations

Guttenberg Sergistótanes Santos Ferreira[1]; Francisco Regis Vieira Alves[2]

RESUMO

Neste artigo discutimos uma metodologia para resolução de equações quadráticas com viés geométrico, através do Método de Descartes e do Método das Semicircunferências Tangentes. Estes modelos tratam da localização dos zeros de equações quadráticas através de elementos da Geometria Plana. Ademais, apresentamos uma proposta de Engenharia Didática, enquanto metodologia de ensino, cujo objetivo maior é favorecer o professor de Matemática da Educação Básica, auxiliando na diversificação das aulas, mostrando o enlace que existe entre Álgebra e Geometria. A descrição das etapas da Engenharia Didática prevê explorar os aspectos investigativos no estudante possibilitando a experimentação matemática através de situações didáticas de ensino, inclusive com uso recursos tecnológicos utilizando o *software* GeoGebra.

Palavras chave: *Ensino de Matemática. Equações Quadráticas. Engenharia Didática. Interpretação Geométrica*.

ABSTRACT

In this paper we discuss a methodology for the resolution of quadratic equations with geometric bias, through the Descartes Method and the Tangent Semicircunference Method. These models deal with the location of zeros of quadratic equations through elements of Flat Geometry. In addition, we present a proposal of Didactic Engineering, as teaching methodology, whose main objective is to favor the Basic Mathematics teacher, helping in the diversification of classes, showing the link between Algebra and Geometry. The description of the stages of Didactic Engineering intends to explore the investigative aspects in the student allowing the mathematical experimentation through teaching didactic situations, including using technological resources using GeoGebra software.

Keywords: *Mathematics Teaching. Quadratic Equations. Didactic Engineering. Geometric Interpretation.*

[1;2]IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza/SP – Brasil.

INTRODUÇÃO

A resolução de equações polinomiais de 2º grau, doravante chamadas de equações quadráticas, quando discutida em livros de Matemática ou em livros de História da Matemática – HM – remete à figura emblemática de Bhaskara (matemático hindu, 1114 – 1185), apesar de existirem relatos de que os babilônios foram um dos primeiros povos a desenvolverem estudos sobre este tipo de equação e, com isso, resolver alguns tipos de equações quadráticas. Segundo Contador (2008, p.80), "fontes babilônicas antigas revelam a presença de equações do segundo grau e tudo indica que sua origem esteja relacionada com a vontade dos babilônios em querer saber qual a relação entre o perímetro e a área de um retângulo".

Desta forma, seja o retângulo representado pela Figura 1, de modo que seu perímetro (2p) seja fornecido pela equação $2p = 2x + 2y$, o que remete a $p = x + y$; enquanto que sua área pode ser calculada como sendo $q = x \cdot y$. Assumindo que $y = \frac{q}{x}$, temos que $x + \frac{q}{x} = p$, donde $x^2 - px + q = 0$. Esta situação matemática é uma das precursoras no desenvolvimento das equações quadráticas.

Figura 1 – Retângulo de lados x e y.
Fonte: construção própria

Situações semelhantes propiciaram o desenvolvimento sistemático do raciocínio anteriormente citado, denotando situações reais para resolução de problemas (FERREIRA & ALVES, 2015). No Brasil a equação ou fórmula resolutiva para tais equações é largamente conhecida como fórmula de Bhaskara, mas o próprio Bhaskara afirmou por volta do séc. XII que esta descoberta se devia a Sridhara (matemático hindu, 870 – 930) (GARBI, 2010). Entretanto, apesar da origem geométrica acima citada, as equações quadráticas são bastante discutidas de forma algébrica pelos professores na Educação Básica. Sendo assim, este trabalho propõe discutir geometricamente as equações quadráticas, fomentando o ensino através dos pressupostos da Engenharia Didática, num contexto de ensino de investigação histórica (ALVES, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d).

Na próxima seção traremos ao leitor uma discussão sobre a Fórmula de Bhaskara e a relação com suas raízes. Em seguida, apresentaremos modelos matemáticos a fim de estruturarmos o desenvolvimento do raciocínio geométrico para resoluções geométricas de equações quadráticas.

A FÓRMULA DE BHASKARA

O modelo algébrico com o qual se discute a fórmula de Bhaskara é baseado na expressão polinomial $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, de modo que se trabalha com a generalização da equação quadrática: $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$. Recorrendo à Geometria Euclidiana e manipulando conveniente a equação genérica acima, temos que $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, donde $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$. Segue que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$, logo $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, que indica a equação resolutiva como sendo $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

A construção/dedução da equação acima possibilitou a localização exata das raízes, sendo distintas ou não, mas também indicou a qual conjunto esses zeros pertenciam (se reais ou complexos), isto graças ao advento da expressão $b^2 - 4ac$, que recebeu o nome de Discriminante denotado pela letra grega Δ (delta), e possui a função primordial de determinar o conjunto numérico à qual essas raízes estão vinculadas (FERREIRA, 2016). Contribuindo com a discussão epistemológica sobre resolução de equações quadráticas, apontamos também o viés geométrico, apresentando a seguir dois modelos que indicam essa ressignificação da fórmula de Bhaskara.

Na próxima seção faremos uma discussão sobre o modelo geométrico desenvolvido por Descartes no século XVII para resolução de equações quadráticas. O método apresenta a localização das duas raízes reais, ainda que fossem dadas em módulo, pois à época não eram reconhecidas as raízes negativas.

MÉTODO DE DESCARTES – MD

O modelo conhecido como Método de Descartes (matemático francês, 1596 – 1650) pode ser utilizado para resolução de equações do tipo $x^2 \pm bx - c = 0$ e sugere a construção de um triângulo retângulo, de catetos ${}^{b}/_{2}$ e $\sqrt{c}$, e de uma circunferência com raio igual ao cateto menor do triângulo. Com essa construção geométrica, podemos não só determinar as raízes da equação, mas também fazer uma releitura da fórmula de Bhaskara. A interpretação da Figura 2, aliada com o tipo de equação em que este modelo pode ser empregado, sugere-nos duas possibilidades: $\mathrm{b} < 0$ e $\mathrm{b} > 0$ (KILHIAN, 2012).

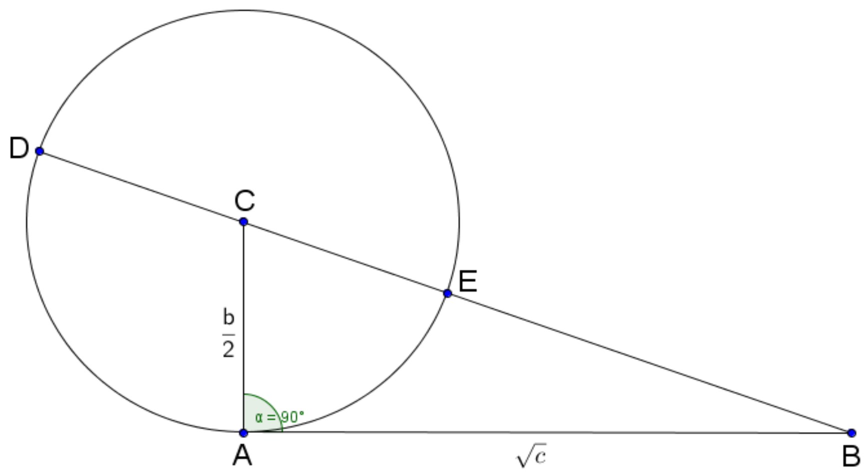

Figura 2 – Circunferência de Descartes
Fonte: Formatação própria baseada em KILHIAN, 2012

Para o caso em que $\mathrm{b} < 0$ a raiz positiva é determinada pelo segmento $\overline{\mathrm{BD}}$, enquanto que a raiz negativa é determinada pelo segmento $\overline{\mathrm{BE}}$ (obviamente dada em módulo). Destarte, denotando o segmento $\overline{\mathrm{BD}} = \mathrm{x}$, temos que $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BE}} + \overline{\mathrm{EC}} + \overline{\mathrm{CD}}$, logo $\mathrm{x} = \mathrm{y} + \frac{\mathrm{b}}{2} + \frac{\mathrm{b}}{2}$, conforme Figura 3, de modo que $\overline{\mathrm{BC}} = \mathrm{x} - \frac{\mathrm{b}}{2}$. De posse destas informações e ainda utilizando o teorema de Pitágoras temos que $(\overline{\mathrm{BC}})^2 = (\overline{\mathrm{AC}})^2 + (\overline{\mathrm{AB}})^2$, que implica que $\left(\mathrm{x} - \frac{\mathrm{b}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{b}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\mathrm{c}}\right)^2$, logo $\mathrm{x}^2 - \mathrm{bx} - \mathrm{c} = 0$.

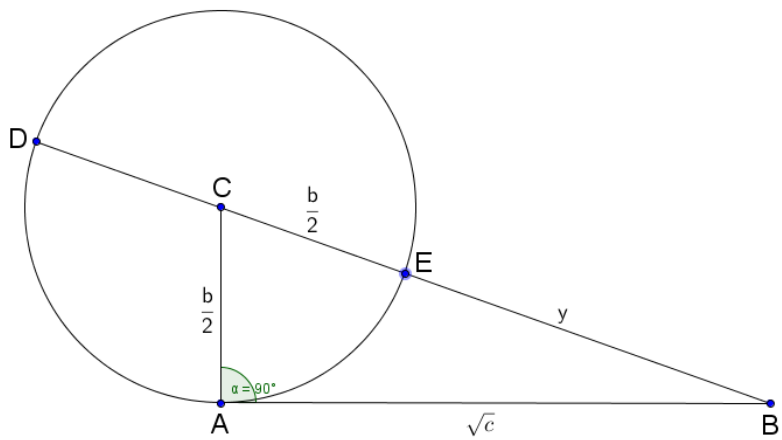

Figura 3 – Circunferência de Descartes, caso $b < 0$
Fonte: Formatação própria baseada em KILHIAN, 2012

Analogamente, para o caso em que $b > 0$ a raiz positiva é determinada pelo segmento $\overline{BE}$, enquanto que a raiz negativa é determinada pelo segmento $\overline{BD}$ (em módulo). De modo que ao denotarmos o segmento $\overline{BE} = x$, temos que $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = x + \frac{b}{2}$, conforme Figura 4. Aliando isto ao teorema de Pitágoras temos que $(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2$, que implica que $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2$, logo $x^2 + bx - c = 0$.

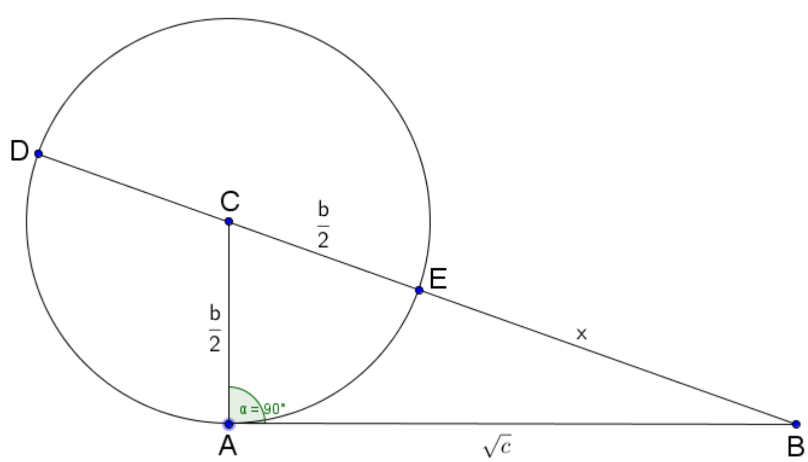

Figura 4 – Circunferência de Descartes, caso $b > 0$
Fonte: Formatação própria baseada em KILHIAN, 2012

A visualização gráfica certamente age de forma positiva quando do uso deste modelo geométrico, propiciando ao estudante a experimentação laboratorial um tanto incomum na disciplina de Matemática. Mas o MD só foi concebido para equações quadráticas em que $c < 0$. Então existe toda uma gama de equações que ainda carecem de uma experimentação geométrica, aquelas em que $c > 0$. A seguir, apresentaremos o Método das Semicircunferências Tangentes para resolução de equações quadráticas do tipo $x^2 \pm bx \pm c = 0$.

MÉTODO DAS SEMICIRCUNFERÊNCIAS TANGENTES – MST

O modelo conhecido como Método das Semicircunferências Tangentes também é utilizado na resolução das equações quadráticas. Esta prática ocorre através de associação de semicircunferências tangentes entre si e retas perpendiculares de apoio. Este modelo se subdivide em dois casos: $c < 0$ e $c > 0$ (TUNALA, 1988).

Para $c > 0$ implica que as raízes possuem mesmo sinal, e ainda que $|x_1| + |x_2| = |b|$ e $|x_1| \cdot |x_2| = c$, em que x_1 e x_2 denotam as raízes procuradas. Para isto, procedemos traçando segmentos consecutivos de comprimentos c, 1 e $|b|$, conforme Figura 5. Percebemos ainda, através de relações métricas no triângulo retângulo, que $(\overline{GJ})^2 = \overline{FG} \cdot \overline{GH}$ logo $\overline{GJ} = \sqrt{c}$. Uma vez que $\overline{GJ} = \overline{ML}$ e $(\overline{ML})^2 = \overline{HM} \cdot \overline{MI}$, obtemos que $\overline{HM} \cdot \overline{MI} = c$ e $\overline{HM} + \overline{MI} = |b|$. Concluímos que as raízes procuradas são numericamente iguais aos segmentos $\overline{HM}$ e $\overline{MI}$ para $b < 0$, ou ainda $-\overline{HM}$ e $-\overline{MI}$ para $b > 0$.

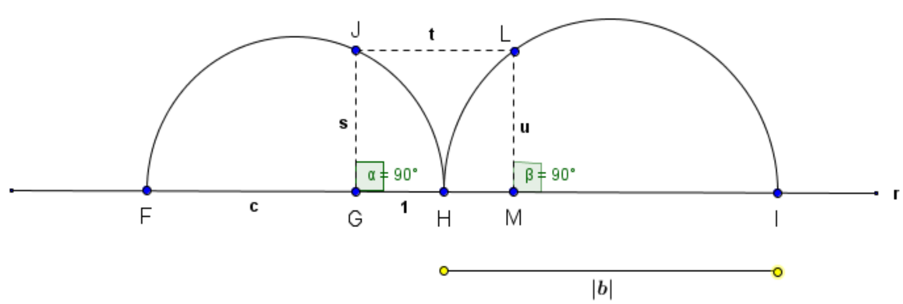

Figura 5 – Semicircunferências tangentes, caso $c > 0$
Fonte: Formatação própria baseada em TUNALA, 1988

Para $c < 0$ temos que as raízes possuem sinais distintos e que $|x_1| - |x_2| = |b|$ e $|x_1| \cdot |x_2| = c$ conforme Figura 6. Procedemos de modo análogo ao caso $c > 0$, sendo $\overline{HM} = \overline{MN} = \overline{PM}$ e $\overline{LM} = \overline{LP} + \overline{PM}$, segue que $(\overline{LM})^2 = (\overline{HL})^2 + (\overline{HM})^2$ cujo desenvolvimento binomial nos fornece $\overline{LP} \cdot \overline{LN} = (\overline{HL})^2$, que permite concluir que$\overline{LP}$ e $\overline{LN}$ são os zeros procurados, atentando ao fato de que se $b < 0$ então as raízes são $\overline{LN}$ e $-\overline{LP}$, enquanto que se $b > 0$ então as raízes são determinadas por $-\overline{LN}$ e $\overline{LP}$.

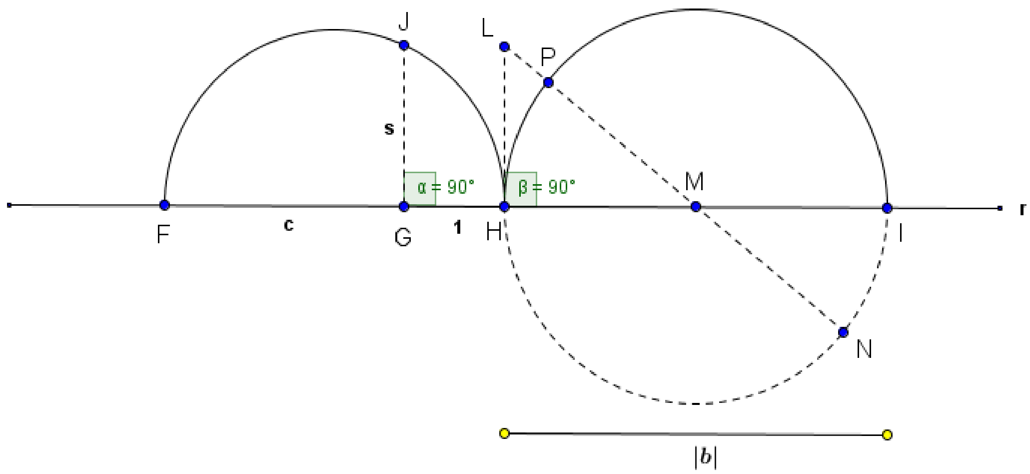

Figura 6 – Semicircunferências tangentes, caso $c < 0$
Fonte: Formatação própria baseada em TUNALA, 1988

A técnica acima apresentada proporciona uma releitura das equações quadráticas trazendo uma abordagem geométrica similar ao modelo proposto por Descartes. Apesar de ser um tanto mais complexo e possuir maior raio de abrangência, o MST é proposto não somente como experimentação laboratorial, mas também como uma revisão de diversos conceitos abordados na Geometria Plana para aos estudantes de Licenciatura em Matemática.

Nas próximas seções faremos uma breve introdução sobre a metodologia de ensino conhecida como Engenharia Didática – ED. Ainda será feita a discussão sobre as fases da ED para interpretação geométrica da fórmula de Bhaskara. Tal estudo é fomentado por discussões com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, já pensando na formação inicial docente, ressaltando o desenvolvimento sistematizado do ensino de Matemática apoiado nos moldes da ED.

ENGENHARIA DIDÁTICA – ED

Esta é uma tendência metodológica de ensino desenvolvida por Michelle Artigue em meados da década de 1980 no IREM (Instituto de Pesquisa em Ensino de Matemática), uma escola francesa de Educação Matemática. Esta teoria pode ser definida como uma variação metodológica do trabalho didático e que pode ser comparado ao trabalho realizado pelo engenheiro; este trabalho deve se apoiar em conhecimentos científicos, bem como deve ser submetido a normas de controle também científicos e ainda procurar trabalhar com objetos mais complexos (ALMOULOUD & COUTINHO, 2008).

Segundo Carneiro (2005), a ED foi desenvolvida com ênfase na discussão de uma problemática dupla: as relações existentes entre a pesquisa e os sistemas de ensino; e o espaço destinado às práticas pedagógicas junto à metodologia da pesquisa. Tendo em vista a necessidade de fomentar e correlacionar diretamente a pesquisa matemática com a realidade do ensino de Matemática, a ED surge como alternativa possível, de uso constante, para fim de sistematizar o processo de ensino, fortalecendo as relações de aprendizagem, e trazendo reflexões tanto para professores quanto para estudantes, ao passo que ainda discute as práticas pedagógicas com a pesquisa e espaço destinado às mesmas.

A ED se fundamenta em cinco fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentação, análise *a posteriori* e validação. Neste estudo discutiremos todas as fases da ED, aplicadas às interpretações geométricas da fórmula de Bhaskara anteriormente propostas, ou seja, o Método de Descartes e o Método das Semicircunferências Tangentes.

ANÁLISES PRELIMINARES

Nesta fase da ED o professor de Matemática deve realizar todo o planejamento necessário à atividade a ser proposta aos estudantes, considerando os objetivos a serem alcançados e em que condições o trabalho será realizado, quer estas dificuldades sejam físicas quer sejam comportamentais. Para isto, Almouloud (2007, p. 172) destaca dois elementos: estudo da organização matemática; e análise didática do objeto matemático escolhido.

Ao discutir o estudo da organização matemática recorremos à gênese do desenvolvimento da fórmula resolutiva para equações quadráticas e sua interpretação geométrica, ressalvados os casos em que $\Delta < 0$, pois não se propõe, neste estudo, discutir raízes imaginárias, complexas. Outra vertente que pode ser abordada se refere ao uso didático, em sala de aula, daqueles modelos propostos, vistos aqui não somente como uma proposta de aula diferenciada, mas também como uma ressignificação de saberes matemáticos, além de favorecer a discussão algébrico-geométrica. Não pretendemos discutir aqui o caráter abstracionista tão característico dos estudos matemáticos, mas propiciar ao estudante o contato com uma Matemática palpável, em que ele possa manipular seus elementos através da experimentação laboratorial, tão presente na pesquisa acadêmica. Com isso, passamos a discutir os possíveis obstáculos epistemológicos oriundos desse e studo, haja vista que não basta apenas conhecer o desenvolvimento da fórmula de Bhaskara ou dos elementos pertencentes à Geometria Plana necessários neste estudo, mas sim, de fazer sua correta associação para permitir a reinterpretação dos saberes ora propostos.

Quando se propõe a discussão quanto à análise didática do objeto matemático, devemos considerar a abordagem presente em livros de HM ou, minimamente, nos apêndices históricos presentes nos livros de Matemática da Educação Básica, além de prever dificuldades cognitivas de aprendizagem dada a ressignificação dos saberes aqui estudados. Ocorre que ao consultar diversas obras de Matemática (DANTE, 2004; GENTIL & GRECO, 2003; GIOVANNI & BONJORNO, 2005; MARCONDES, SILVA & BARRETO FILHO, 2005; PAIVA, 2005; SMOLE & DINIZ, 2005) ou de HM (BOYER, 2010; CONTADOR, 2008; EVES, 2004), não foram encontrados ou propostos os modelos geométricos aqui discutidos. Como hipótese, apontamos que os estudantes possuem dificuldades em associar a abordagem geométrica, qualquer que seja, com a fórmula de Bhaskara, que se mostra naqueles livros apenas como uma interpretação algébrica.

CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Nesta fase da ED o docente realiza a descrição e a análise da situação adidática por ele escolhida e que será apresentada ao estudante. Ressaltemos o professor como mediador de aprendizagem, com o papel de antever ações comportamentais que possam favorecer ou não o desenvolvimento do conhecimento lógico matemático. Neste escopo, o professor age concomitantemente segundo a dimensão epistemológica, bem como a cognitiva e a didática (ALMOULOUD & COUTINHO, 2008).

A situação adidática escolhida de forma ampla sugere apenas a reinterpretação geométrica da fórmula de Bhaskara, cuja gênese está necessariamente ligada à correlação entre área e perímetro de um retângulo (GARBI, 2010). Entretanto a abordagem mais restrita se refere aos aspectos conceituais do uso de circunferências para resolver esta problemática, assim como os conceitos inerentes a triângulos retângulos e pontos de tangência. Desta forma, o estudante não pode prescindir do conhecimento de Geometria Plana e da correta manipulação de *software* (neste caso utilizamos o GeoGebra para todas as construções geométricas), a fim de evidenciar corretamente todos os benefícios trazidos por os modelos aqui abordados.

Alves (2014) adverte que o estudante deve compreender o problema para desenvolver sua solução e que cabe ao professor propor uma tarefa passível de execução, ao passo em que ele, professor, media a aprendizagem e torna a situação adidática original num processo construtivista, numa situação didática. Com esta exposição corroboramos com Almouloud (2007), quando caracteriza os objetivos dessa atividade baseada na ED como sendo: auxiliar o estudante na construção e desenvolvimento do conhecimento, reinterpretar os saberes da fórmula de Bhaskara, inclusive com outras abordagens geométricas aliando a isto o uso do recurso computacional.

EXPERIMENTAÇÃO

No momento em que se chega nesta fase da ED o docente passa a trabalhar um grupo de estudantes, no intuito maior de analisar os itens elencados na *Análise a Priori*, de modo que: se explicite quais objetivos e como será realizada a pesquisa, a construção do Contrato Didático; discussão e aplicação do instrumento de pesquisa propriamente dito; e, coleta de dados para discussão e validação do trabalho (POMMER 2013).

Conforme descrito acima, durante o experimento há o uso do Contrato Didático. Este contrato é oriundo da Teoria das Situações Didáticas lançada por Brousseau em meados dos anos 1980 (ALVES, 2011), tem por função prever e/ou se adequar a todas as situações que surjam quando da experimentação em sala de aula, descriminando de forma explícita ou implícita as regras que regem o convívio no ambiente de aprendizagem.

ANÁLISE *A PRIORI* E VALIDAÇÃO

Por fim, ocorre esta fase da ED, em que o docente pode fazer suas observações a partir dos dados colhidos junto aos estudantes durante a experimentação, para que se decida se há ou não a validação da aprendizagem. Vale ressaltar que esta fase não se configura com a fase mais importante da ED, mas apenas como uma análise de todo o trabalho anteriormente planejado e executado (ALMOULOUD, 2008).

Pommer (2013) afirma ainda que nesta fase ocorre não somente a caracterização dos dados colhidos na pesquisa, mas também o confronto destes dados com as hipóteses da *Análise a Priori*, preenchendo lacunas com vistas à generalização do objeto matemático estudando e favorecendo a aprendizagem.

A seguir, faremos uma discussão sobre as condições restritivas dos métodos anteriormente abordados, que pode ocorrer quando da construção dos modelos através da experimentação tecnológica feita pelo estudante. Uma situação possível nessa experimentação matemática é a discussão quanto à validade de determinada teoria. Isto pode ser exemplificado quando o estudante deseja investigar se os pressupostos restritivos são válidos ou não, em nosso estudo, podemos apontar o caso em que $c > 0$ para MD, ou $\Delta < 0$ para MST. Para tanto, usaremos dois exemplos particulares a fim de auxiliar na descrição das fases da ED, ilustrando a experimentação com um grupo de 27 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *campus* de Juazeiro do Norte.

Situação 1: É solicitada a resolução da equação quadrática $x^2 - 6x - 16 = 0$ e, posteriormente, sua construção geométrica através do MD. Em seguida, repetir o procedimento para a equação $x^2 - 7x + 6 = 0$ e por fim realizar um estudo comparativo entre as soluções.

Ocorre que as soluções de ambas as equações podem ser obtidas com o uso da fórmula de Bhaskara. Sem maiores delongas, calculamos que as raízes de $x^2 - 6x - 16 = 0$ são dadas pelos números $x_1 = -2$ e $x_2 = 8$, e sua construção geométrica é apresentada na Figura 7. De modo análogo se procede com a equação $x^2 - 7x + 6 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 6$, cuja construção geométrica indicada ainda na Figura 7 e experimentação dos estudantes na Figura 8.

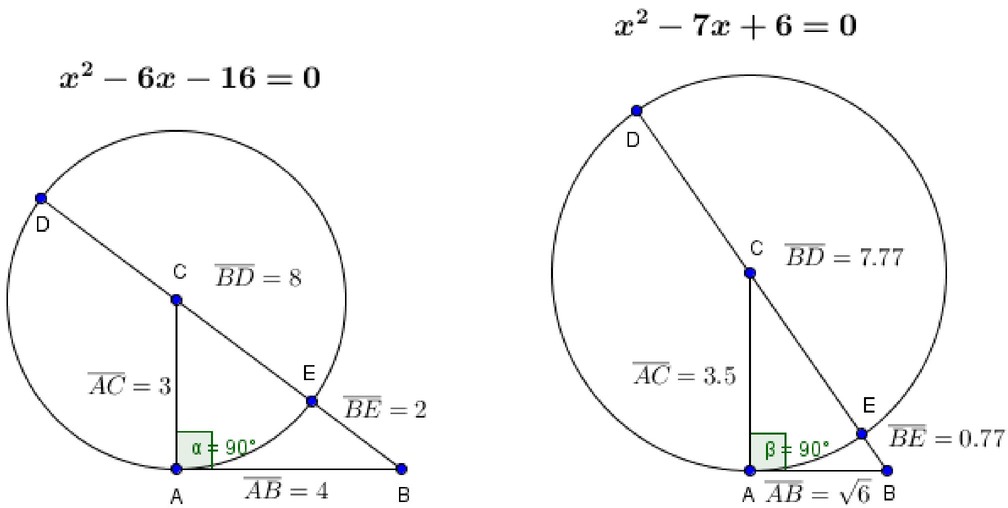

Figura 7 – Resolução de problemas pelo Método de Descartes
Fonte: Formatação própria

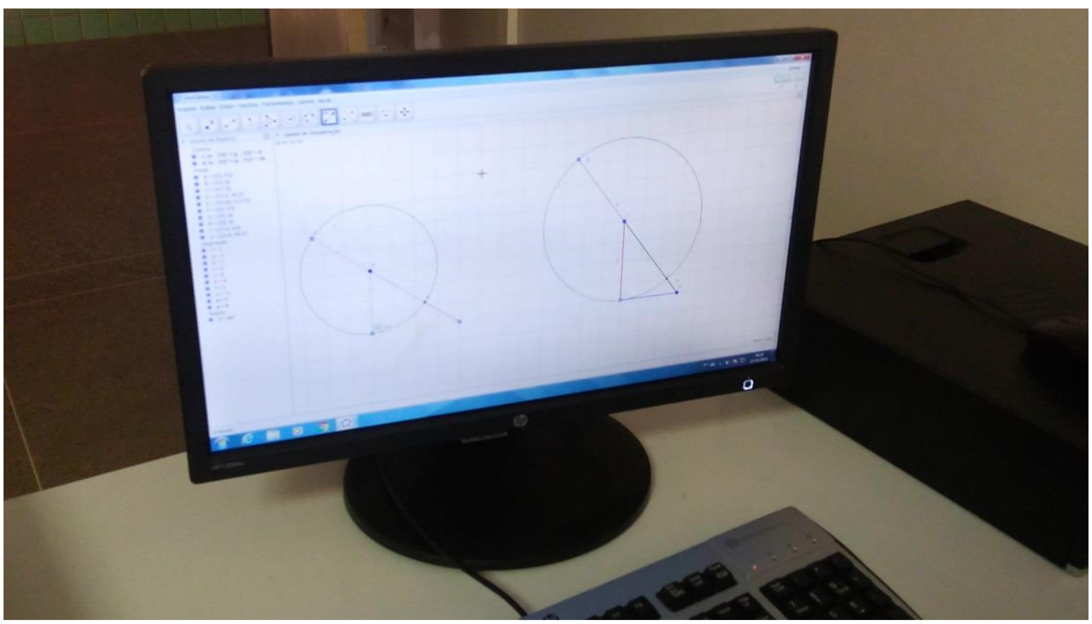

Figura 8 – Experimentação através do Método de Descartes
Fonte: acervo pessoal

Vale observar que na equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ o segmento $\overline{BE} = 2$ coincide coma raiz x_1, porém dada em módulo. Entretanto, o mesmo não ocorre na equação $x^2 - 7x + 6 = 0$, em que $\overline{BE} = 0{,}77$ diferindo da raiz $x_1 = 1$ da equação, apesar de ter sido submetido ao mesmo método construtivo, corroborando os aspectos restritivos, no caso $c > 0$, conforme Figura 9.

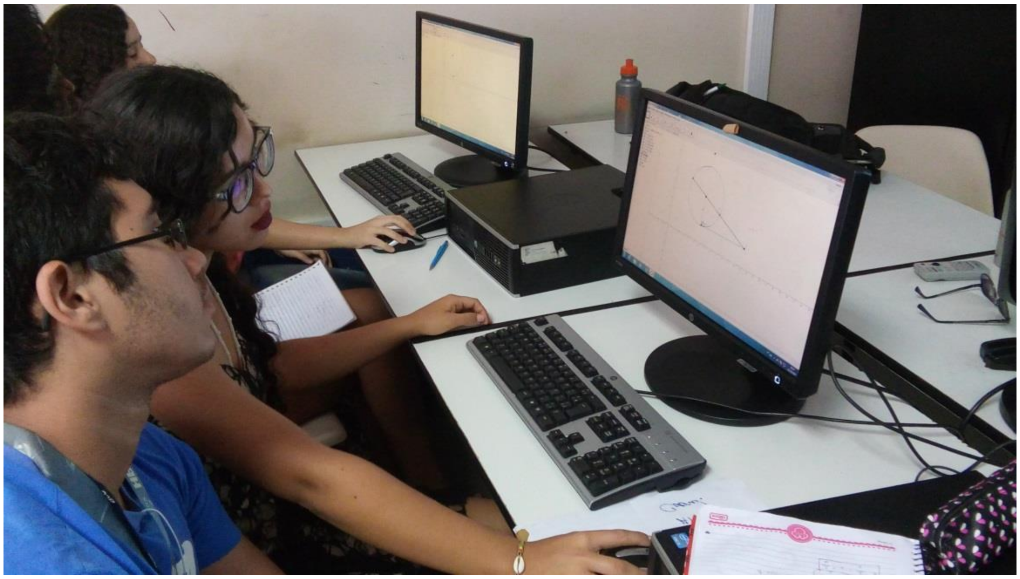

Figura 9 – Experimentação do Método de Descartes
Fonte: acervo pessoal

Após realizar estas resoluções, o estudante deve ser estimulado a testar/experimentar outros formatos de equação segundo o MD, sendo levado pelo professor a corroborar ou refutar os casos em que $b > 0$ e $c < 0$, ou ainda, $b > 0$ e $c > 0$, sempre através da construção geométrica, incitando o discente a continuar buscando situações didáticas semelhantes.

Situação 2: É solicitada a resolução da equação quadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$ e, em seguida, a modelagem geométrica através do MST. Para fins de experimentação, sugere-se repetir o procedimento para a equação $x^2 - 3x + 4 = 0$ e por fim realizar um estudo comparativo entre as soluções.

Calculando as soluções através da fórmula de Bhaskara, obtemos as raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$ para a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, cuja representação geométrica está apresentada na Figura 8. Analogamente, para a equação $x^2 - 3x + 4 = 0$, cujas raízes são $x_1 = \frac{3-\sqrt{-7}}{2}$ e $x_2 = \frac{3+\sqrt{-7}}{2}$, representamos sua construção geométrica também na Figura 10.

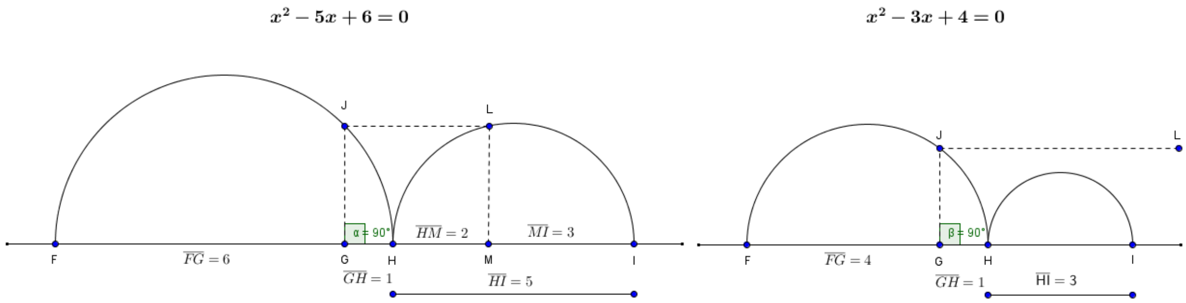

Figura 10 – Resolução de problemas pelo Método das Semicircunferências Tangentes
Fonte: Formatação própria

Observamos que na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ os segmentos $\overline{HM} = 2$ e $\overline{MI} = 3$ representam os zeros da equação, isto devido à interseção entre o segmento $\overline{JL}$ e o semicírculo de raio 5 e, posteriormente, à construção do segmento perpendicular $\overline{LM}$. Entretanto, o mesmo não ocorre na equação $x^2 - 3x + 4 = 0$, uma vez que não existe intersecção entre o segmento $\overline{JL}$ e o semicírculo de raio 3 denotando que as raízes da equação não são reais, e sim, complexas.

Com estes estudos o estudante passa não somente a diversificar sua prática de construção geométrica, mas também de determinar o conjunto numérico ao qual pertencem as soluções das equações propostas, aliando o estudo matemático tradicional (Figura 11) com a proposição tecnológica. Outros casos seguem com raciocínios semelhantes, tais como aqueles em que $c < 0$, devem ser trabalhos a fim de consolidar a teoria ora abordada por esta situação didática.

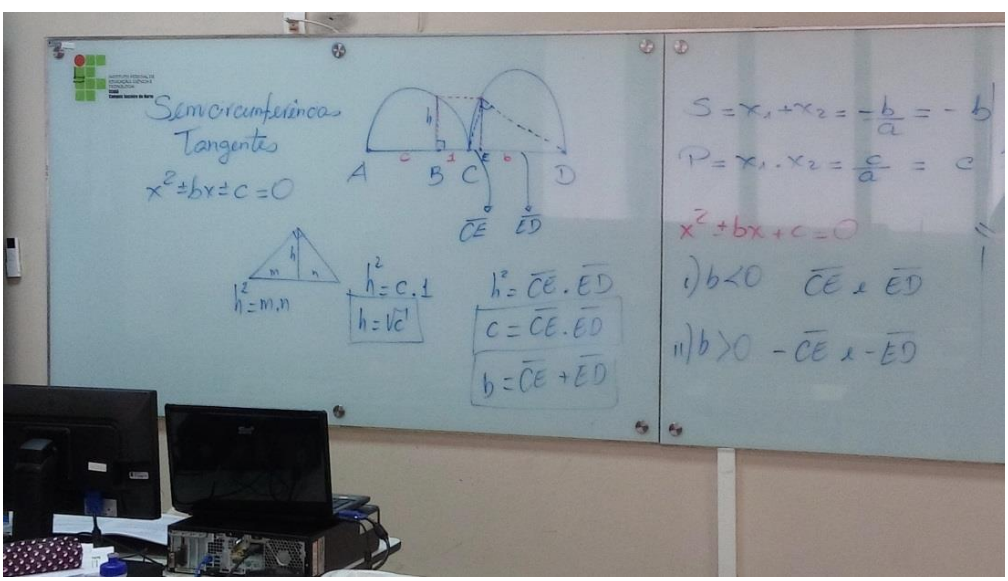

Figura 11 – Experimentação tradicional do Método das Semicircunferências Tangentes
Fonte: acervo pessoal

Vale ressaltar que em ambas as situações nem sempre é possível determinar as soluções, uma vez que os segmentos, quando encontrados, não representam necessariamente as raízes das equações quadráticas. Situações como estas, auxiliam o estudante no desenvolvimento sólido do pensamento matemático, pois nestes casos ele teve a oportunidade de confirmar ou refutar as hipóteses advindas de sua pesquisa, fazendo com que se aproprie daquele conhecimento.

A verificação dos casos acima citados, assim como outros que possam ser propostos, ultrapassa os limites da discussão dessa proposta de estudo, entretanto, sugerimos ao leitor um tanto mais interessado a experimentação dessas situações, na perspectiva do desenvolvimento da temática aqui proposta, além do fato de ser melhorado e aplicado em sala de aula, seja na Educação Básica ou em cursos de graduação em Matemática.

À luz da aprendizagem significativa ainda foi discutido junto aos estudantes um instrumental contendo 4 questionamentos sobre a qualidade da aula, dos materiais utilizados e do objeto matemático escolhido, cujas discussões estão transcritas abaixo:

> **Professor-pesquisador:** Quais suas impressões sobre a resolução geométrica de equações quadráticas?
> **Estudante3:** Apenas com as resoluções convencionais (quadro e pincel) fica complicado, mas com o auxílio dos meios informáticos como o GeoGebra fica mais simples, pois com a visualização do gráfico e de suas raízes é maior o entendimento.
> **Estudante10:** Foi uma novidade utilizar a geometria nas equações quadráticas, pois não me era comum ver essa ligação e eu acostumada a encontrar as raízes apenas pela fórmula de Bhaskara, o que me faz achar esses métodos mais complicados.

Claramente, ao passo em que há o fascínio pela novidade matemática apresentada, também há o receio da não aprendizagem e ou grandes dificuldades. Entretanto a maior parte dos estudantes se mostrou entusiasmada com a atividade.

> **Professor-pesquisador:** Quanto à execução, qual método você considera mais eficiente para localização das raízes? E quanto à velocidade dos métodos, qual o melhor? Justifique.
> **Estudante16:** Quanto à execução, o método de semicircunferência tangente (MST) foi mais eficaz na localização das raízes, pois no método de Descartes (MD), o "c" não pode ser negativo. Em relação ao tempo de execução, o MSTé mais rápido.
> **Estudante20:** O método das semicircunferências tangentes, pois pode-se resolver equações independente dos termos da mesma; Quanto à velocidade, o método de Descartes é mais eficiente devido precisar de menos interpretação.

Houve uma preferência pelo Método das Semicircunferências Tangentes em detrimento ao Método de Descartes, isso devido neste último o termo "c" ter de ser obrigatoriamente positivo. Mas também tivemos comentários favoráveis somente ao uso da fórmula de Bháskara, afirmando que ela é válida para todos os tipos de equações quadráticas e que nela não existe a necessidade de maiores interpretações para sua aplicação.

> **Professor-pesquisador:** Como você percebe a experimentação matemática apoiada na tecnologia, neste caso, no GeoGebra? Quais os principais ganhos e dificuldades?
> **Estudante19:** O uso do GeoGebra facilita desde a construção do gráfico até a solução do mesmo. O aluno adquire experiência e conhecimentos e o aproxima mais da tecnologia. A dificuldade eu acho que seja o seu acesso até o programa, uma vez que poucos são os professores que o utilizam.
> **Estudante21:** Percebo que é muito eficiente porque os alunos não ficam presos a aprender apenas de uma forma, podem aprender de outro método. Dificuldade porque a maior parte dos alunos não tem contato com esse programa.

A possibilidade de trabalhar a Matemática através de softwares, desenvolvendo ou utilizando aquilo que foi apreendido na sala de aula tradicional, provocou realmente fascínio entre os estudantes. Entretanto, larga maioria apontou o pouco uso de *softwares*, principalmente de geometria dinâmica, ao longo do curso de graduação, uma vez que no ensino médio isso sequer era comentado, quanto mais utilizado.

> **Professor-pesquisador:** Para o desenvolvimento dos métodos se fazem necessários certo conhecimento de Geometria Plana, além da manipulação do GeoGebra. Baseado nisto, como você julga o processo interdisciplinar entre os ramos da Matemática (Álgebra e Geometria) e o uso de recursos tecnológicos?
> **Estudante9:** É algo que estimula o aluno, pois como hoje o mundo tá cada vez mais virtual, isso atrai o aluno a querer ir atrás das respostas e assim facilitando seu aprendizado.
> **Estudante24:** É enriquecedor e contribui ainda mais com o aprendizado do aluno, e ainda trás uma maneira alternativa de resolução de raiz quadrática. E o uso de recursos tecnológicos é imprescindível no processo de aprendizagem e torna a parte teórica mais interessante após explicar no GeoGebra.

Apesar do pouco contato com o software GeoGebra, especificamente, os estudantes se mostraram dispostos a ver e estudar a Matemática sob esse enfoque que paulatinamente vai tomando todo processo de aprendizagem, ou seja, o ambiente virtual como ferramenta que favorece ambos os protagonistas do processo educacional: professor e estudante.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por finalidade descrever as fases da metodologia de ensino conhecida como Engenharia Didática (ED), discutindo um estudo sobre formas diferenciadas para resolução de equações quadráticas envolvendo a perspectiva geométrica. Deste modo, houve o cuidado de se elaborar este trabalho com uma linguagem matemática acessível, sobretudo aos estudantes de Matemática, no entanto, sem perder a generalidade e o rigor necessários ao desenvolvimento de estudos matemáticos.

Nas seções passadas fizemos um breve estudo sobre a equação de Bhaskara, discutindo sua motivação inicial e o percurso algébrico seguido, a fim de determinar as raízes de equações quadráticas. Em seguida, propomos os modelos conhecidos como Método de Descartes (MD) e Método das Semicircunferências Tangentes (MST) com fins ao favorecimento da discussão geométrica, em forma complementar para se localizar os zeros de equações quadráticas, ressalvadas as condições restritivas de existência de cada modelo. Buscamos ainda descrever as etapas da ED, considerando a reinterpretação geométrica das equações quadráticas, trabalhando inclusive que duas situações didáticas. Inicialmente foram realizados estudos em livros de Matemática e de HM procurando fundamentar os modelos resolutivos aqui propostos. Entretanto, concluiu-se que os mesmos não fazem parte daquelas propostas didáticas, ficando a cargo apenas de literatura mais restritiva e especializada, o que não impede o uso em sala de aula com ênfase ao favorecimento da pesquisa matemática.

Discutimos ainda com os estudantes pesquisados sobre quais os impactos que este estudo tem sobre sua prática experimental em Matemática, em que foi demonstrado claramente a aceitação e o desejo de diversificação do processo de ensino e aprendizagem. Finalmente, salientamos que a proposta deste trabalho é subsidiar estudos sobre alternativas metodológicas de resolução de equações quadráticas, sobretudo, em aspectos geométricos. Por fim, assinalamos que este estudo pode servir de substrato à formação docente inicial no curso de Licenciatura em Matemática, bem como para o desenvolvimento do ensino de Matemática, seja na Educação Básica ou Superior.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v. 3, n. 6, p.62-77, 2008.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, Francisco Regis Vieira. BORGES NETO, Hermínio. A existência da sequência de Fibonacci no campo dos Inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. **Boletim GEPEM.** Rio de Janeiro, vol. 1, nº 53. 135 – 140, 2011.

ALVES, Francisco. Regis Vieira. Sequência de Pell Generalizada – SGP: aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista THEMA**, v. 13, nº 1, 1 – 25, 2016a.

ALVES, Francisco. Regis Vieira. Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. **Boletim GEPEM**, nº 69, 1 – 7, 2016b.

ALVES, Francisco. Regis Vieira. Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa.** v, 18, nº 1, 61 – 93, 2016c.

ALVES, Francisco. Regis Vieira. Sequência Generalizada de Pell (SGP): aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista THEMA**. v. 13, nº 2, 27 – 41, 2016d.

ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia.** Ponta Grossa, v. 7, p. 148-168, 2014.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Didática Matemática.** Fortaleza: UAB-IFCE, 2011.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** 3 ed. São Paulo: Ed. Blucher, 2010.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetiké**. Campinas, v. 13, n. 23, p. 85-118, 2005.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história.** Vol. 1, 2. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora Ática, 2004.

EVES, Howard. **Introdução a Historia da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 6 ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Guttenberg Sergistótanes Santos; ALVES, Francisco Regis Vieira. Engenharia Didática para discussão geométrica e resolução de equações de 1º grau: análises preliminares e *a priori*. **Conexões Ciência e Tecnologia.** Fortaleza, v. 9, n. 4, p. 78-82, dezembro/2015.

FERREIRA, Guttenberg Sergistótanes Santos. **Um breve estudo sobre equações algébricas.** Recife: Imprima, 2016.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas.** 4ª Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática completa.** Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora FTD, 2005.

KILHIAN, Kleber. **Resolvendo equações quadráticas pelo método de Descartes.** Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/09/resolvendo-equacoes-quadraticas-pelo.html>. Acesso em: 01 mar 2015.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006.

MARCONDES, Carlos Alberto; GENTIL, Nelson; GRECO, Sergio Emilio. **Matemática.** Volume único. São Paulo: Editora Ática, 2003.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** Volume único. São Paulo: Editora Moderna. 2005.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.** São Paulo: [s.n.], 2013. Disponível em: < http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf >. Acesso em: 20 set 2015.

SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática aula por aula: ensino médio.** Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora FTD, 2005.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez S. V. **Matemática – ensino médio.** Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.

TUNALA, Nelson. Resolução geométrica da equação do 2º grau. **RPM – Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro, v. 12, 1988.