



CIÊNCIAS HUMANAS

Engenharia Didática no contexto da Transição Complexa do Cálculo: aspectos epistemológicos e metodológicos sobre a noção de integração de funções

Engineering in the context of calculation complex transition: epistemological and methodological aspects of the function integration concept

Francisco Regis Vieira Alves¹

RESUMO

O presente trabalho elege como objetivo uma análise epistemológica e implicações metodológicas teóricas com o assunto envolvendo a noção de integração de funções na variável complexa. Assim, diante do seu caráter reconhecidamente abstrato, apresenta alguns elementos clássicos constituintes de uma Engenharia Didática – ED. Isso posto, o trabalho discute ainda fatores que atuaram no sentido da consubstanciação de uma esfera de práticas investigativas no âmbito da Didática da Matemática - DM, com interesse declarado pelo ensino/aprendizagem e, como aplicação, aborda o caso da integral de Fresnel, com arrimo na Teoria das Situações Didáticas – TSD. De acordo com as características da ED, temos a possibilidade de buscar o acréscimo de conhecimentos didático-metodológicos sobre a noção de integração, tendo como cenário a Transição Complexa do Cálculo – TCC.

Palavras-chave: engenharia didática, transição complexa do cálculo, aspectos epistemológicos e metodológicos

ABSTRACT

This work presents as a goal an epistemological analysis and a theoretical methodological implication to the matter involving a subject related to the integration of complex variable functions. So, with a admittedly abstract character, it presents some classic elements provided by a Didactical Engineering – DE. That said, the work also discusses some factors that acts towards the substanciation of a sphere of investigative practice in the Didactics of Mathematics – DM with the declared interest by the teaching/learning and as the application, discusses the Fresnel's integral case with the aid in the Theory of Didactical Situations – TSD. According to the ED characteristics, it has the possibility to seek the addition of didactical and methodological knowledge about the notion of integration and has a Complex Transition in Calculus as a context.

Key-words: didactical engineering, complex transition of calculus, epistemological and methodological aspects

DOI <http://dx.doi.org/10.15536/thema.13.2016.47-64.322>

¹Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Coordenador do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM - IFCE. o do Ceará

1. INTRODUÇÃO

Indubitavelmente, os estudantes enfrentam estudos de determinados assuntos específicos na academia que demandam alguns anos, quando nos atemos aos cursos de graduação em Matemática. Ademais, determinados elementos ou fatores podem atuar no sentido de dificultar ou modificar as relações que os aprendentes mantêm com a Matemática, como por exemplo, um intrincado sistema notacional e um trato eminentemente formal e estruturante, característico dos estudos acadêmicos.

De modo particular, abordaremos e discutiremos alguns elementos teóricos de ordem epistemológica e metodológica atinentes ao contexto da Transição Complexa do Cálculo – TCC. O referido contexto busca demarcar os elementos de transição e os elementos de ruptura que podem proporcionar avanços na aprendizagem dos estudantes, bem como podem representar o motivo de lentidões e incompreensões de determinados conceitos científicos, dentre eles, por exemplo, a noção do processo de integração na variável complexa.

Não obstante, diante de um quadro de relativa escassez de estudos acadêmicos desenvolvidos no âmbito do TCC, apoiar-nos-emos numa perspectiva de investigação sistemática científica, cujo campo de interesse e esfera de práticas se mostra demarcada pela vertente francesa em Didática da Matemática - DM Isso posto, elegemos a Engenharia Didática - ED, com o escopo de perspectivar, do ponto de vista teórico, alguns elementos de ordem epistemológica e metodológica atinentes ao conceito de integração de funções na variável complexa. Ademais, propugnamos um viés de aplicação do aparato teórico conceitual garantido pela ED, posto que, conhecemos uma profusão de trabalhos que discutem com pormenores suas características. Dizendo de outra forma, o leitor interessado em maiores detalhes sobre a ED poderá consultar outros trabalhos científicos produzidos desde a década de 80.

2. SOBRE A NOÇÃO DE INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES NA VARIÁVEL COMPLEXA: ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS

Há décadas, registramos uma profusão de trabalhos científicos que representam a vigilância de pesquisadores concernentemente ao processo de transição da escola para a universidade, no que diz respeito aos conteúdos matemáticos. Por outro lado, temos observado um interesse de estudos que buscam compreender fenômenos relacionados ao ensino e a aprendizagem de matérias específicas e que demandam tempo prolongado de estudos no locus acadêmico.

Com esta preocupação, assinalamos a perspectiva da Transição Interna do Cálculo – TINC, que nos informa que uma profusão de entraves e obstáculos podem ser enfrentados pelos estudantes, no contexto do estudo do Cálculo em Uma Variável real – CUV para o Cálculo em Várias Variáveis – CVV. Ademais, tal perspectiva possibilita ainda uma ampliação de apreciação, posto que, passa a considerar, ainda, a passagem da variável real para a variável complexa. Dessa forma, Alves (2014b; 2014c; 2016) cunhou o termo Transição Complexa do Cálculo – TCC e, com isso, pretende demarcar um período de estudos que demanda alguns anos de contato com teorias das funções na variável real e das funções na variável complexa.

Com arrimo da figura abaixo, acentuamos apenas as modificações simbólico-notacionais que condicionam, inexoravelmente, a exigência das habilidades e do trato formal dos aprendizes, no caso

específico do processo de integração de funções. Na mesma figura, observamos que a trajetória de transição para a variável complexa se mostra mais amplo (e demorado) do que a mudança de uma para várias variáveis. Por exemplo, a simples mudança notacional $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_{a+ib}^{c+id} f(z)dz$ impõe uma série de mudanças e alterações topológicas e operacionais que devem, irremediavelmente, exigir novas (e intrincadas) habilidades no trato e operacionalização do objeto integral.

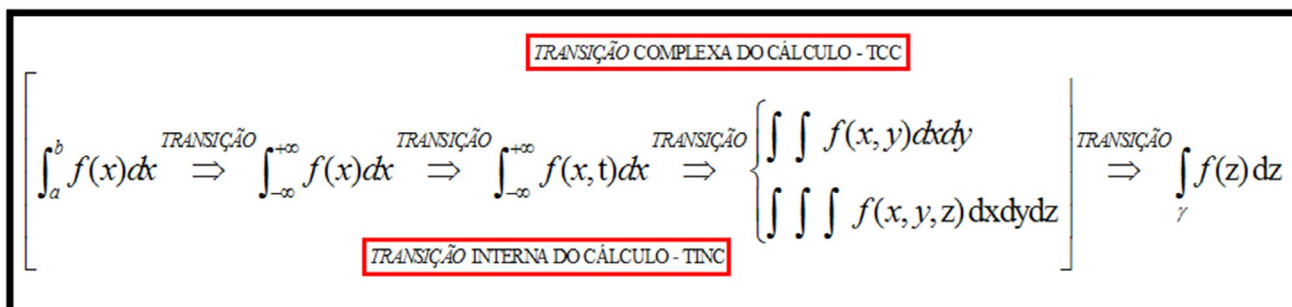


Figura 1. Modificações simbólicas notacionais que indicam a Transição Interna do Cálculo – TINC e a Transição Complexa do Cálculo – TCC (elaboração do autor)

Ora, com origem em uma análise açodada, poderíamos desconsiderar uma série de propriedades invariantes, e outras propriedades generalizadas e, mesmo, não mais validadas, na medida em que lançamos um olhar investigativo (da esquerda para direita) na figura 1. Entretanto, nosso expediente buscará compreender/identificar possíveis barreiras ao ensino.

3. ENGENHARIA DIDÁTICA E ELEMENTOS DE ORDEM EPISTEMOLÓGICA

Num contexto de forte influência do pensamento bourbakista (MARGOLINAS & DRIJVEERS, 2015; MARGOLINAS, 2005; HAIRER & WANNER, 2008) e uma crise instalada no ensino de Matemática na França, ocorreu uma mobilização de estudiosos franceses, institucionalmente organizados nos centros de pesquisa e formação para o ensino de Matemática (IREM), culminando com o reconhecimento, por parte da comunidade científica, da área de estudos nominada Didática da Matemática – DM (DOUADY, 1984).

De modo preciso, no final dos anos 60 e início dos anos 70, ocorreu uma crise muito forte em torno do ensino da Matemática na França (DOUADY, 1995, p. 1). O Ministério Educacional Nacional propugnou o projeto dos IREM tendo em vista um ambiente institucional de trabalho conjunto de uma profusão de especialistas que atuam no campo do ensino. No ano de 1972, Douady (1995a, p. 3) recorda que a escola de Michelet, em Burdeos, influenciada pelas ideias de Guy Brousseau, foi criada com um intuito de investigação da própria prática educativa e acompanhamento dos fenômenos didáticos.

Com origem nos trabalhos científicos originados das equipes dos IREM´s ocorreu uma reformulação da perspectiva inicial da criação do projeto e, assim, se delineou uma nova problemática. Com efeito, Douady (1995a, p. 4) comenta que “com respeito a aprendizagem, se enfatizam a aprendizagem e, por conseguinte, os problemas que constituem fonte de aprendizagem e desequilíbrio para os quais os alunos não dispõem de todos os conhecimentos para a sua resolução”.

O contexto de nascedouro anterior foi capaz de impulsionar um vigor científico reconhecido, sobretudo, num período de 20 anos (ARTIGUE, 1995, p. 7), culminando com a elevação para um *status* de área

de investigação, nominada de Didática da Matemática - DM, como assinalamos no início. De modo natural, a sistematização de conhecimentos cumulativos na área exigiu a formulação de princípios e paradigmas investigativos. Assim, constatamos o surgimento da Engenharia Didática, representando um *modus operandi* de perquirição sistemática e científica dos fenômenos relacionados com o ensino e com a aprendizagem em Matemática em seus diversos níveis (LABORDE, 1997).

Por outro lado, com forte influência do pensamento piagetiano, Artigue (1995, p, 12) recorda que a Teoria das Situações Didáticas – TSD proporcionou uma sistemática de análise, discussão, controle e previsão de sequências didáticas estruturadas para o ensino. Ademais, a autora aponta a necessidade do emprego de paradigmas de experimentação e controle de investigação. Nesse âmbito, de modo prosaico, podemos relatar o emprego, que se mostrou extremamente profícuo, em caráter de complementaridade, da ED como metodologia de pesquisa e da TSD, como aporte metodológico explicativo dos fenômenos de ensino e aprendizagem diante de sequências.

No rol de interesses da ED, assinalamos o entendimento e controle epistemológico, por parte do pesquisador, o que permite o estudo das “representações epistemológicas” (ARTIGUE, 1989, p. 1). Tal controle, segundo Artigue, funciona no sentido de: auxilia-nos em retomar a historicidade dos conceitos científicos matemáticos; auxilia-nos em compreender o papel das noções metamatemáticas, como o rigor, cultivado no ensino atual (ALVES, 2011).

Sobre o escopo de análise da epistemologia e da TSD, Artigue (1989. p. 3) explica:

O didático se preocupa pela construção de conhecimentos matemáticos num meio constituído para tal fim [...]. Nesse sentido, ele se confronta com os problemas de elaboração (por pesquisas do tipo de engenharias didáticas) ou de análise da gênese de conhecimentos que, para distinguir da gênese histórica, são qualificados frequentemente como gênese artificial.

Outras preocupações que permitem delimitar uma análise epistemológica residem na apreciação ou “vigilância epistemológica” entre o que é produzido na academia e o saber ensinado em instituições de ensino (em nosso caso a academia). Artigue (1989, p. 4) esclarece um pouco mais seu objeto de interesse ao mencionar que a “epistemologia intervêm neste nível num plano mais geral do que simplesmente visar o ensino de Matemática. Não se trata simplesmente a transmissão de conhecimentos matemáticos” e, sim, a criação de uma cultura matemática (DOUADY, 1995).

Sua tônica de discussão evoluiu num contexto de desenvolvimento de engenharias didáticas tendo em vista a análise do ensino atual. E, pouco mais adiante, Artigue (1998, p. 4) discute relações viscerais entre a epistemologia e os obstáculos epistemológicos. Dessa forma, sob influência do pensamento de Brousseau (1994; 1986, 1988), a autora menciona as categorias de obstáculos de origem ontogenética, de origem didática e de origem epistemológica. E, antes de concluir a presente seção, de modo prosaico, podemos identificar as seguintes fases sistemáticas: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação, análises *a posteriori*, validação (interna e externa).

Nesse sentido, Artigue (1996, p. 249-250) explica considerar na primeira fase (análise preliminar) uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino; análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; exame das concepções e conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados) e seus efeitos.

Por fim, todos os elementos anteriores levam em consideração os objetivos desta investigação que indicaremos doravante.

Nas análises *a priori*, seguindo o procedimento *standard* das investigações dessa vertente, busca responder às questões levantadas e validar, refutar ou modificar eventuais hipóteses. Por intermédio de um apelo mnemônico, Brum & Schuhmacker (2013) indicam os elementos essenciais. E, dando continuidade, “o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema” (ALMOULOU, 2007, p. 174). (ver figura 2).

De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2008, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, deverá proporcionar uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em consonância das variáveis micro-didáticas eleitas nas duas fases iniciais da ED, consiga prever as reações dos aprendizes e interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle.



Figura 2. Brum & Schuhmacker (2013, p. 70) vislumbram os elementos essenciais cotejados na análise a priori de um ED e seu encaminhamento

Dando prosseguimento, recordamos que “a análise *a posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições de transmissão do saber em jogo”. Ademais, não podemos perder de vista as considerações de Laborde (1997, p. 103) ao mencionar que a validação da ED consiste em “comparar os resultados de duas modelizações diferentes para o mesmo objeto”. Em nosso caso, com a intenção precípua de maior obtenção de dados para a etapa final, o modelo de comparação reside em considerar as mesmas situações didáticas, aqui discutidas, com outras abordagens que exibem ênfase maior na etapa de institucionalização, característico de um ensino acadêmico que evidencia os aspectos estruturantes da Matemática, em detrimento de uma abordagem qualitativa e numérica (ARTIGUE, 2013, p. 3).

Logo em seguida demarcaremos o *corpus* teórico de nosso interesse e a identificação de algumas questões de ordem epistemológica.

4. ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS E METODOLÓGICOS PARA O ENSINO DE INTEGRAIS NA VARIÁVEL COMPLEXA

In *primo impetu*, nossas preocupações na presente seção podem ser resumidas nas reflexões de Wegert (2012, p. 1) quando declara:

Representações gráficas de funções pertencem ao rol de instrumentos poderosos em Matemática e suas aplicações. Enquanto que gráficos de funções escalares podem ser retratados facilmente no plano, o gráfico de funções complexas em uma variável é uma superfície num espaço quadridimensional. Desde que nossa imaginação é treinada em três dimensões, muitos de nós possuem dificuldades em enxergar tal objeto.

No excerto anterior, indicamos um entrave epistemológico que produz obstáculos imediatos, na medida em que desenvolvemos uma preocupação com a mediação didática em sala de aula.

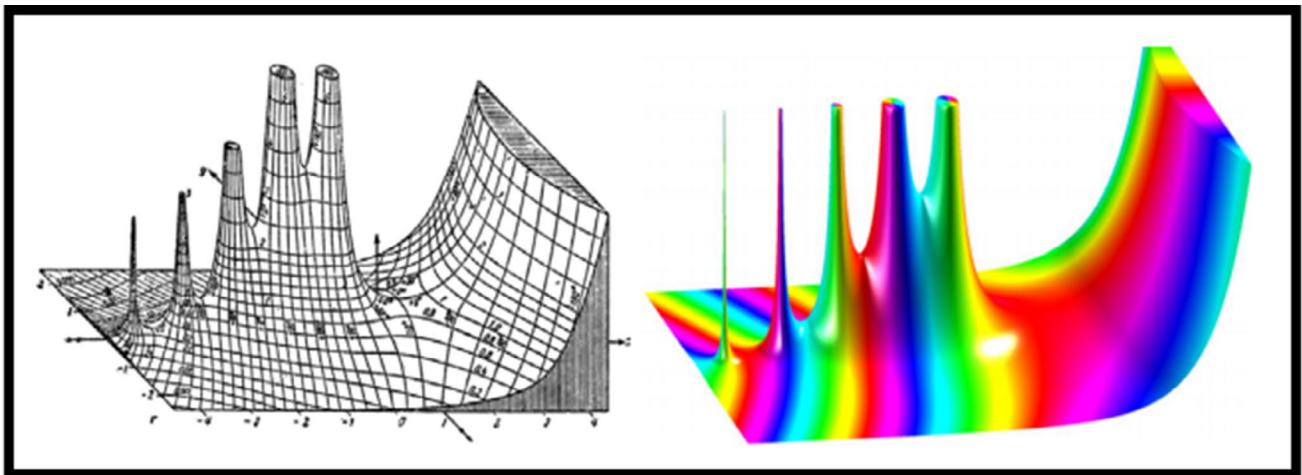


Figura 3. Wegert (2012, p. 1) comenta um conceito tradicional de visualização de funções na variável complexa conhecido como *analytic landscape* (paisagem analítica)

Na figura 3, Wegert (2012, p. 1) comenta a proposição de um método para a visualização de funções na variável complexa nominado por Edmond Maillet (1865 – 1938) por *analytic landscape* (paisagem analítica). Assim, Wegert menciona que em 1903, Maillet concedeu o tratamento de gráficos dos valores absolutos de uma função. Em caráter explicativo, Wegert (2012, p. 1) comenta que, na figura 3, ao lado esquerdo, divisamos a aplicação do método ao caso da função na variável complexa γ e, a descrição de suas propriedades, atualmente, se tornaria tarefa inexecutável sem o trato computacional.

De modo simplificado, o método que mencionamos “envolve somente a parte do módulo de uma função, e o argumento é perdido” (Idem, 2012, p. 1). Por outro lado, a partir do método envolvendo o uso de *colored analytic landscapes*, o problema da descrição de funções na variável complexa ficou resolvido. Wegert (2012, p. 2) assinala a relevância do método para a visualização de funções na variável complexa, entretanto, questiona: Por que existem tantos livros textos sobre Análise Complexa sem uma única figura?

O questionamento de Wegert se mostra imprescindível, posto que nosso interesse gira em torno dos aspectos epistemológicos e metodológicos. Ora, quando nos atemos ao viés epistemológico, o caráter de transição relativamente ao caráter intrínseco da teoria que discutimos pode entendido melhor quando observamos as considerações de Shokranian (2011, p. 143) quando assinala que:

Na teoria das funções reais, originalmente, a integração foi usada para calcular a área de uma figura geométrica ou o volume de um sólido. Diferentemente, na variável complexa, a teoria da integração é uma ferramenta para estudar funções analíticas, tais como os Teoremas de Cauchy e outros que mostraremos. Por outro lado, uma das aplicações fundamentais das integrais das funções complexas é também o cálculo das integrais definidas de uma variável real [...]

O excerto anterior proporciona o entendimento da evolução sistemática de uma teoria matemática e, naturalmente, acréscimo de seu caráter abstracionista, fator que pode desempenhar um papel antagonico ao pensamento intuitivo, heurístico e provisório. Antes de concluir, registramos as preocupações de Needham (2000) com o papel da visualização no contexto da Análise Complexa (ver figura 4). O autor discute um método de visualização de funções na variável complexa, não obstante, indica obstáculos epistemológicos semelhantes aos apontados por Polya & Latta (1974) e Wegert (2012).

Com efeito, Needham explica que na medida em que nos atemos ao estudo de funções na variável complexa z , tal abordagem não é mais praticável, uma vez que, para compreender o comportamento do par $(z, f(z))$ "precisamos de quadro dimensões. Duas para $z = x + iy$ e duas que correspondem $f(z) = u + iv$ " (NEEDHAM, 2000, p. 56).

Este autor adverte ainda que embora necessitemos de um espaço de quadro dimensões (\mathbb{R}^4) para descrever o conjunto dos pontos $(x, y, u, v) = (z, f(z))$, o "gráfico, ele próprio é bidimensional, significando que apenas dois números reais são necessários para identificar cada ponto nele presente." (NEEDHAM, 2000, p. 56).

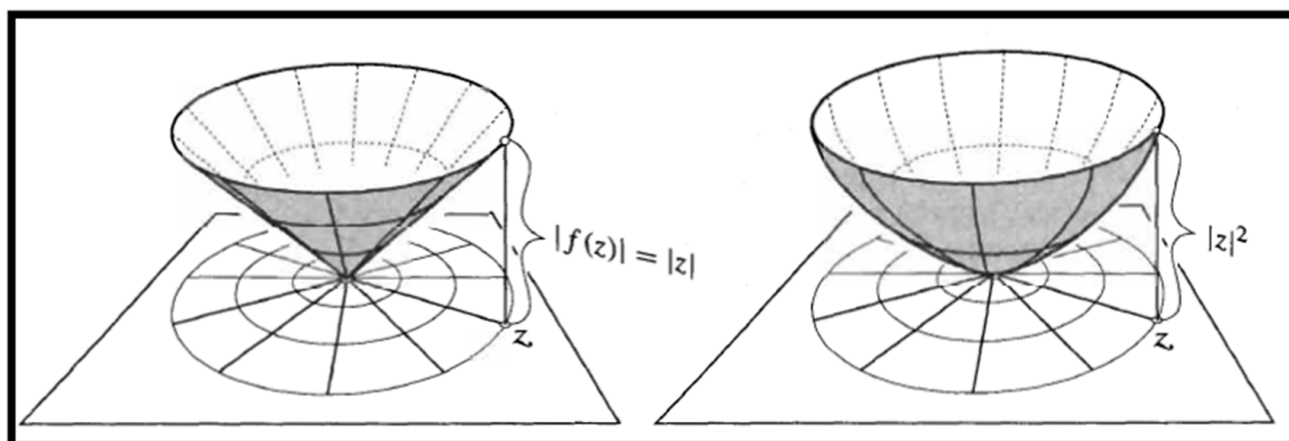


Figura 4. Método proposto por Needham (2000, p. 56-57) para visualização de gráficos de funções na variável complexa no contexto do espaço \mathbb{R}^3

Para concluir essa seção, recordamos que Artigue (1996, p. 247) indica as seguintes etapas: concepção, realização, observação e a análise de sequências de ensino. Mas, do ponto de vista da ação experimental e tempo investigativo, Artigue distingue ainda: (1) fase de análises preliminares; (2) fase de concepção e análise *a priori* das situações didáticas; (3) experimentação e, por fim, (4) análise *a posteriori* e validação de todo aparato construído.

Doravante, não desenvolveremos um expediente que busca descrever e explicar para o leitor os elementos essenciais de cada uma das fases apontadas acima Artigue e, tão somente, a descrição de situações didáticas afetadas pela perspectiva da TSD. Desse modo, na medida em que indicaremos um problema ou entrave, efetuamos "o primeiro passo para uma Engenharia Didática" (DOUADY, 2008, p. 2). Isso posto e tendo como cenário de apreciação a Transição Complexa do Cálculo - TCC, indicaremos a relevância da seguinte problemática: Os estudantes manifestam dificuldades para o entendimento geométrico do processo de integração de funções na variável complexa.

Assim, na próxima situação didática (BROUSSEAU, 1986, p. 324) discutiremos a resolução de algumas integrais buscando evitar, do ponto de vista metodológico, um trato eminentemente analítico (ALVES, 2011; 2014a; 2014b; 2014c).

Situação-problema I: Decidir o caráter de convergência/divergência das integrais de Fresnel, costumeiramente designadas por $C(h) = \int_0^h \cos(hx^2) dx$ e $S(h) = \int_0^h \sin(hx^2) dx$, aonde $h \in \mathbb{R}$.

Comentários: Constitui como componente da devolução do estudante a definição, de modo autônomo, das variações definidas das integrais acima e, nesse caso, realizar a substituição da interrogação "?" por um símbolo que permite a identificação de integrais impróprias.

Situação de ação. Assumimos como pressuposto de que "a constituição do sentido, tal como entendemos, implica numa interação constante dos alunos com situações problemáticas, interações dialéticas (caso o sujeito antecipe, finalize suas ações) [...]" (BROUSSEAU, 1998, p. 117). Assim, de modo preliminar, os alunos manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperta o interesse dos mesmos.

Desse modo, com origem nas advertências de Wegert (2012) e Needham (2000), trazemos a figura 5, afim de proporcionar ao estudante um entendimento gráfico-geométrico das integrais $C(h)$ e $S(h)$. Os alunos devem ser instigados a investigar seu comportamento no intervalo $[0, +\infty)$. Na figura 5 os alunos devem perceber uma quantidade crescentes de "cristas" ou "ondas", com a mesma amplitude que se mostra invariante, entretanto, na medida do crescimento da variável, o que estimula uma apreciação e análise perceptual da esquerda para a direita, os sujeitos devem compreender que as contribuições progressivas das áreas, limitadas pelos gráficos das funções tendem a decrescer, tal fato qualitativo que sugere a convergência e não a divergência das integrais correspondentes.

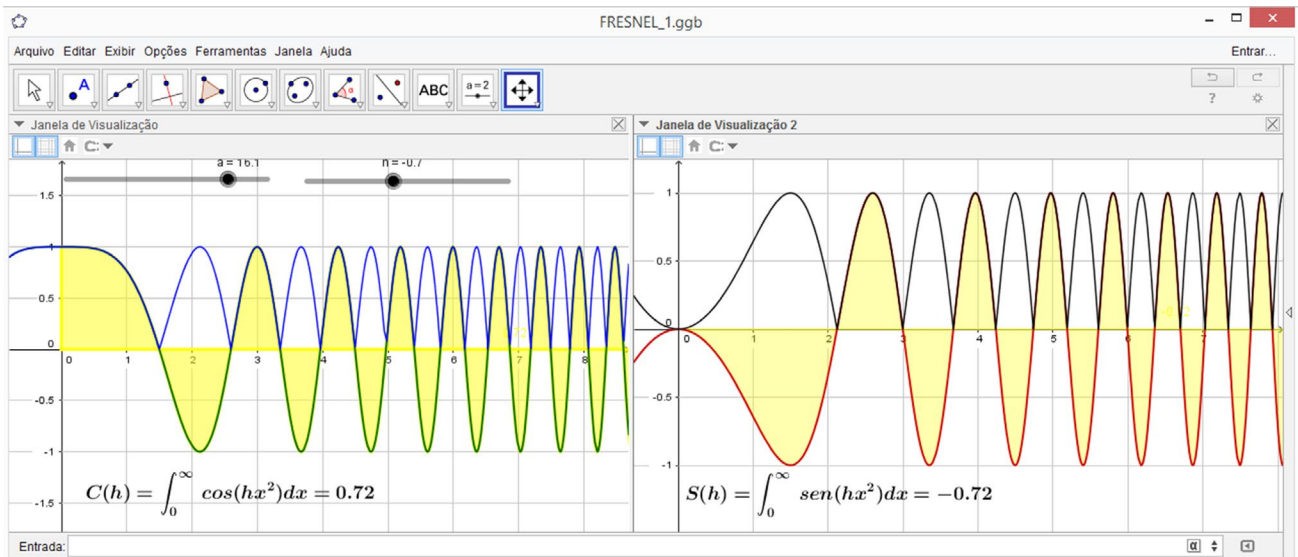


Figura 5. Na situação de ação proporcionamos a descrição gráfico-numérica do comportamento das integrais de Fresnel (elaboração do autor)

Mas, com o auxílio do método indicado por Needham (2000), que observamos na figura 3, pode ser explorado e, assim, os alunos passam a considerar apenas as integrais das funções $\int_0^{+\infty} |\cos(hx^2)| dx$ e $\int_0^{+\infty} |\sen(hx^2)| dx$, como divisamos na figura 5 (gráficos nas cores azul e preto). E, dessa forma, a atividade de produção de conjecturas relacionadas com a inspeção do comportamento de convergência e divergência deve ser estimulada no contexto da variável real.

Ademais, a introdução da variável complexa não pode assumir um caráter misterioso ou algo estabelecido, de modo arbitrário, pelo *expert*. Desse modo, na medida do possível, o professor pode instigar o estudo de relações do tipo $e^{ihx^2} = \cos(hx^2) + i\sen(hx^2)$, originadas pelo emprego da relação de Euler. Dessa forma, o *link* conceitual pode ser introduzido, na medida em que $\int_0^{\infty} e^{ihx^2} dx = \int_0^{\infty} \cos(hx^2) dx + i \int_0^{\infty} \sen(hx^2) dx = C(h) + i \cdot S(h)$ e a conclusão que, na verdade, as integrais de Fresnel representam a parte real e imaginária de uma integral de uma função na variável complexa.

Ainda na situação de formulação, recorreremos agora a figura 6, nos sentido de indicar alguns elementos que podem ser o objeto da mediação do professor, na medida em que pode convidar os aprendizes no entendimento do comportamento da função na variável complexa $f(z)$ e sua representação geométrica, por intermédio do método *analytic landscape*.

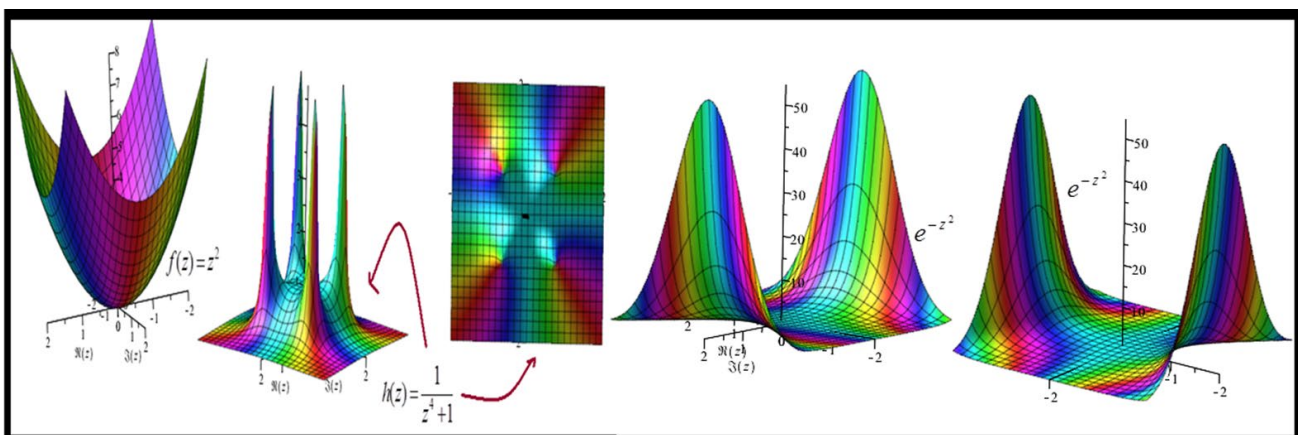


Figura 6. Mapa de cores (*analytic landscape*) empregado em funções da variável complexa com o CAS Maple (elaborado pelo autor)

Situação de formulação. Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate a dialética “permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns”. Na figura 6, por exemplo, os estudantes podem comparar as funções na variável complexa do tipo $\frac{1}{z^4 + 1}$, $e^z = \exp(z)$ ou $e^{-z^2} = \exp(-z^2)$.

Na figura 6 são estimulados a notar a presença de quatro “vulções” que correspondem a comportamento das singularidades da função $\frac{1}{z^4 + 1}$. Algumas propriedades podem ser provisoriamente compreendidas e aceitas pelo grupo, não obstante, na fase seguinte, o professor estimula um debate sobre a “certeza das asserções” (ALMOULOUD, 2007, p. 40). Nesse caso, deverá ser introduzido um problema adequado para o trato da integral $I(h) = \int_0^\infty e^{ihx^2} dx$ e o consenso, alcançado pelo grupo, de que o problema exige a introdução da variável complexa. Assim, na fase subsequente, a introdução da mesma será discutida.

Situação de validação. Almouloud (2007, p. 39) explica que “é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo de situação) ao julgamento de um interlocutor”.

Dessa forma, devem considerar as seguintes integrais $C(h) = \int_0^\infty \cos(hx^2) dx$ e $S(h) = \int_0^\infty \text{sen}(hx^2) dx$, aonde $h \in \mathbb{R}^*$. Por outro lado, vejamos o comportamento detalhado da seguinte integral que comentamos na seção anterior e indicamos por

$$I(h) = \int_0^\infty e^{ihx^2} dx = \int_0^\infty (\cos(hx^2) + i \text{sen}(hx^2)) dx = \int_0^\infty \cos(hx^2) dx + i \int_0^\infty \text{sen}(hx^2) dx = C(h) + i \cdot S(h)$$

Mas, vamos retornar à integral $I(h)$ e efetuar a seguinte substituição

$z = \sqrt{-ih}x \therefore dz = \sqrt{-ih}dx \leftrightarrow dx = \frac{dz}{\sqrt{-ih}}$ e ainda que $z^2 = -ih \cdot x^2 \leftrightarrow ih \cdot x^2 = -z^2$. Segue, pois, a obtenção da seguinte integral $I(h) = \int_0^\infty e^{ihx^2} dx = \int_0^\infty e^{-z^2} dz$. Primeiramente, vamos notar que, ao considerarmos a integral $\lim_{N \rightarrow +\infty} I_N(h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_0^N e^{ihx^2} dx \right) \rightarrow \int_0^\infty e^{ihx^2} dx = I(h)$. Reparemos ainda que, ao considerarmos $h > 0$, tomaremos $\arg(-ih) = -\frac{\pi}{2}$ e que $\arg(\sqrt{-ih}) = -\frac{\pi}{4}$. Todavia, tomaremos o seguinte $\arg(-ih) = -\frac{\pi}{2}$ como no primeiro caso e $\arg(\sqrt{-ih}) = +\frac{\pi}{4}$. Ou seja, teremos dois casos: $\sqrt{-ih} = \sqrt{|h|} \cdot e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}$, onde $\sigma = \text{sign}(h) = \pm 1$, conforme tenhamos $h > 0$ ou $h < 0$, respectivamente.

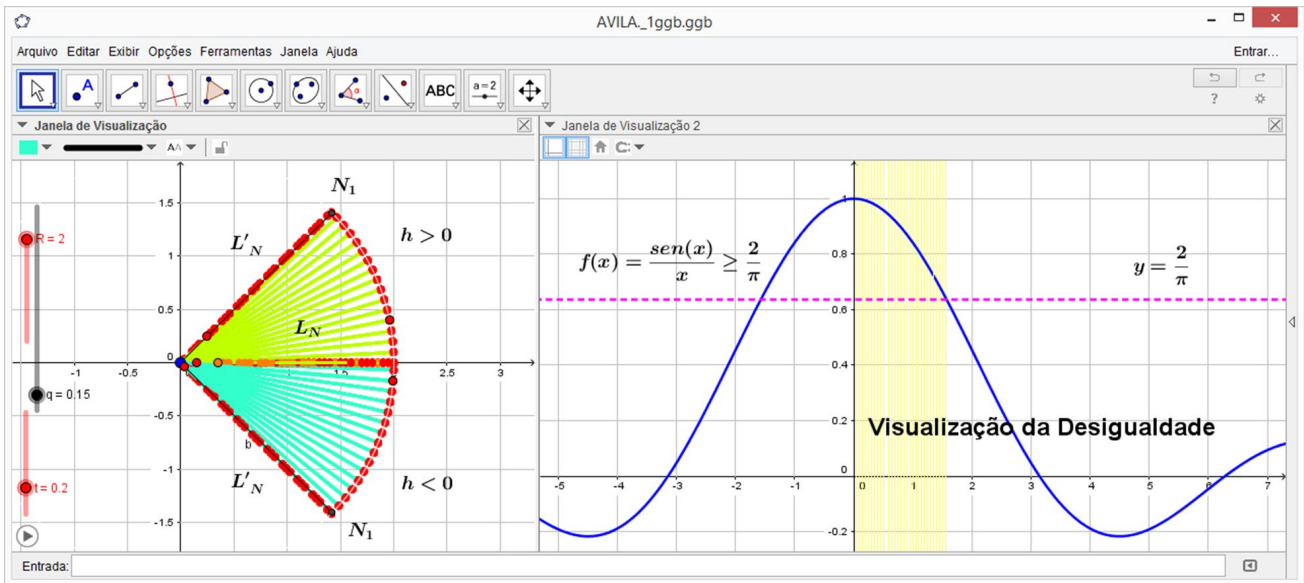


Figura 7. Visualização de propriedades (desigualdades) e descrição dinâmica da região de integração com arrimo no software GeoGebra (elaboração do autor)

Reparemos ainda que a integral anterior

$I_N(h) = \int_0^N e^{ihx^2} dx = \int_{L'_N} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{-ih}} = \int_{L'_N} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{|h|} \cdot e^{-\frac{i\sigma\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \int_{L'_N} e^{-z^2} dz$, onde designamos o caminho (segmento retilíneo) descrito por L'_N (ver figura 7) ligando o ponto $(0,0)$ ao ponto

$$N_1 = N\sqrt{-ih} = N\sqrt{|h|} \cdot e^{-\frac{\sigma\pi}{4}i} = N\sqrt{|h|} \left(\cos\left(-\frac{\sigma\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\sigma\pi}{4}\right) \right) = N\sqrt{|h|} \left(\cos\left(-\frac{\sigma\pi}{4}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\sigma\pi}{4}\right) \right).$$

Dessa forma, consideraremos dois pontos $\left(N\sqrt{h} \cos\left(-\frac{\sigma\pi}{4}\right), -N\sqrt{h}\text{sen}\left(\frac{\sigma\pi}{4}\right) \right)$ e $\left(N\sqrt{-h} \cos\left(-\frac{\sigma\pi}{4}\right), -N\sqrt{-h}\text{sen}\left(\frac{\sigma\pi}{4}\right) \right)$. Por outro lado, percebemos que a função que comparece na integral $I_N(h) = \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \int_{L'_N} e^{-z^2} dz$ é uma função analítica em todo plano, em particular, não possui singularidades no interior da região (ver figura 7) cujo

contorno dinâmico é indicado por $\gamma := L_N \cup C_N \cup (-L'_N)$. Dessa forma, podemos escrever

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{L_N \cup C_N \cup (-L'_N)} e^{-z^2} dz = \int_{L_N} e^{-z^2} dz + \int_{C_N} e^{-z^2} dz + \int_{(-L'_N)} e^{-z^2} dz = 0. \text{ Ou ainda, de acordo com a orientação dos caminhos escolhidos, teremos: } \int_{L'_N} e^{-z^2} dz = \int_{L_N} e^{-z^2} dz + \int_{C_N} e^{-z^2} dz \text{ . (ver$$

figura 7).

Por outro lado, mostraremos que a última integral, ao lado direito, vale zero, quando $N \rightarrow \infty$. Com

efeito, vamos investigar o comportamento da expressão $\left| \int_{C_N} e^{-z^2} dz \right|$. Para isto, vejamos a seguinte substituição $z = N\sqrt{|h|} \cdot e^{i\theta}$, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Ora, teremos que $dz = N\sqrt{|h|} \cdot e^{i\theta} d\theta$ e também que

$$\int_{C_N} e^{-z^2} dz = \int_0^{-\sigma\pi/4} e^{-(N\sqrt{|h|} \cdot e^{i\theta})^2} \cdot N\sqrt{|h|} \cdot e^{i\theta} d\theta = \int_0^{-\sigma\pi/4} e^{-(N^2|h| \cdot e^{i2\theta})} \cdot N\sqrt{|h|} \cdot e^{i\theta} d\theta.$$

Ou ainda, escrevemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{-\sigma\pi/4} e^{-(N^2|h|(\cos(2\theta)+isen(2\theta)))} \cdot N\sqrt{|h|} \cdot e^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^{-\sigma\pi/4} \left| e^{-(N^2|h|(\cos(2\theta)+isen(2\theta)))} \cdot N\sqrt{|h|} \cdot e^{i\theta} \right| |d\theta| = \\ &\leq \int_0^{-\sigma\pi/4} \left| e^{-(N^2|h|(\cos(2\theta)))} \cdot e^{-(N^2|h|isen(2\theta))} \cdot N\sqrt{|h|} \right| |d\theta| \leq N\sqrt{|h|} \int_0^{\pi/4} \left| e^{-(N^2|h|(\cos(2\theta)))} \right| |d\theta| \end{aligned}$$

Agora, passaremos a investigar o comportamento da seguinte integral $N\sqrt{|h|} \int_0^{\pi/4} e^{-N^2|h|(\cos(2\theta))} d\theta$

e, para tanto, empregaremos a seguinte substituição $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\theta \leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$

, mas, nesse caso, teremos: $\theta = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \varphi = 0$. E, ainda que $d\varphi = -2d\theta$ e

$$\cos(2\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\varphi) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}(\varphi) = \text{sen}(\varphi).$$

Portanto, reescrevemos a integral $\left| N\sqrt{|h|} \int_0^{\pi/4} e^{-N^2|h|(\cos(2\theta))} d\theta \right| = \left| \frac{N\sqrt{|h|}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-N^2|h|\text{sen}(\varphi)} d\varphi \right|$. Por

outro lado, conhecemos a seguinte desigualdade $\text{sen}\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$ sempre que $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. E, daí,

teremos: $\left| \int_{C_N} e^{-z^2} dz \right| \leq \left| \frac{N\sqrt{|h|}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-N^2|h|\text{sen}(\varphi)} d\varphi \right| \leq \frac{N\sqrt{|h|}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2N^2|h|\frac{\varphi}{\pi}} d\varphi$ e, pela

substituição $u = -2\frac{N^2|h|\varphi}{\pi} \therefore du = -2\frac{N^2|h|}{\pi} d\varphi \leftrightarrow d\varphi = -\frac{\pi}{2N^2|h|} du$ e segue que

$$\begin{aligned} &= \frac{N\sqrt{|h|}}{2} \int_0^{\pi/2} e^u \cdot \frac{\pi}{2N^2|h|} du = \frac{\pi}{4N\sqrt{|h|}} \int_0^{\pi/2} e^u du = \frac{\pi}{4N\sqrt{|h|}} \left[e^u \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4N\sqrt{|h|}} \left[e^{-2\frac{N^2|h|\varphi}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{4N\sqrt{|h|}} \left[1 - e^{-N^2|h|} \right] = \frac{\pi}{4N\sqrt{|h|}} \left[1 - \frac{1}{e^{N^2|h|}} \right] \leq \frac{\pi}{4N\sqrt{|h|}}. \end{aligned}$$

No próximo passo, passaremos a considerar $N \rightarrow \infty$ e, desse modo, vemos que

$$\left| \int_{C_N} e^{-z^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{4N\sqrt{|h|}} \rightarrow 0 \quad \text{o que nos permitirá inferir que a integral anterior tende a zero, pelo}$$

menos tão depressa quanto o número $\frac{1}{N}$ tende a zero. Doravante, obtivemos a igualdade

$$\text{anterior} \quad \int_{L_N} e^{-z^2} dz = \int_{L_N} e^{-z^2} dz + \int_{C_N} e^{-z^2} dz \quad \text{e, recordando que } I_N(h) = \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \int_{L_N} e^{-z^2} dz \quad \text{e,}$$

$$\text{portanto, escrevemos: } \int_0^N e^{ihx^2} dx = I_N(h) = \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \left(\int_{L_N} e^{-z^2} dz \right) = \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \left(\int_{L_N} e^{-z^2} dz + \int_{C_N} e^{-z^2} dz \right)$$

e, quando levamos em consideração $N \rightarrow \infty$, estabelecemos

$$\int_0^N e^{ihx^2} dx = I_N(h) = \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \left(\int_{L_N} e^{-z^2} dz \right) + o\left(\frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \left(\int_0^{N\sqrt{|h|}} e^{-z^2} dz \right) = \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

Por fim, tendo em vista que $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, encontraremos que

$$\int_0^{+\infty} e^{ihx^2} dx = \frac{e^{\frac{i\sigma\pi}{4}}}{\sqrt{|h|}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|h|}} e^{\frac{i\sigma\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|h|}} \left(\cos\left(\frac{\sigma\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma\pi}{4}\right) \right). \quad \text{Por outro lado, vemos}$$

também que $\int_0^{+\infty} e^{ihx^2} dx = \int_0^{+\infty} (\cos(hx^2) + i \cdot \operatorname{sen}(hx^2)) dx$. Em seguida, resta-nos comparar

as partes real e imaginária das expressões anteriores e, finalmente, estabelecer a igualdade

$$\text{pretendida que indicamos por } \int_0^{+\infty} \cos(hx^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|h|}} \cos\left(\frac{\sigma\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\sqrt{|h|}}, \quad \text{enquanto que}$$

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(hx^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|h|}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma\pi}{4}\right) = \sigma \frac{\sqrt{2\pi}}{4\sqrt{|h|}} = \sigma \int_0^{+\infty} \cos(hx^2) dx.$$

Situação de institucionalização. Almouloud (2007, p. 40) esclarece que “uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio da classe embora não tenha ainda o estatuto de saber social”. Com tal ponto de vista, o professor poderá valorizar o papel da visualização (ver figuras 5, 6 e 7) tendo em vista a aquisição de uma cultura matemática e o delineamento de hábitos intelectuais aplicáveis em outras situações de ensino.

Outrossim, com arrimo nas perspectiva de Ávila (1987, p. 77), se mostra imprescindível para o estudante compreender e distinguir o trato de determinadas integrais que exigem métodos elementares para a sua resolução definitiva, como o caso de algumas integrais na variável real, de outros casos que envolvem o emprego da variável complexa e, os alunos “são expostos a exemplos relevantes de cálculo de integrais por resíduos que não podem ser calculadas por métodos elementares” (ÁVILA, 1987, p. 78).

Ademais, constitui ainda um olhar epistemológico globalizante a ser perseguido pelo grupo o entendimento do papel não isolado das integrais de Fresnel, na medida em que podem ser identificadas na Ótica, para explicar fenômenos de difração e surgem também em outros métodos matemáticos (método da fase estacionária), como assim comenta Ávila (1987). Este autor observa, por exemplo, que “as franjas observadas num anteparo que recebe luz difratada por um obstáculo no semi-plano são explicadas em termos das integrais de Fresnel” (ÁVILA, 1985, p. 84) e, a curva plana

parametrizada definida por $\alpha(t) = \left(\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt, \int_0^{+\infty} \text{sen}(t^2) dt \right)$ é chamada por espiral de Cornu (HAIRER & HANNER, 2008, p. 264). E, nesse caso, o expert tem a possibilidade metodológica de assinalar um link conceitual com o Cálculo em várias variáveis que se inicia com o estudo de curvas parametrizadas e funções em várias variáveis e poderá evoluir até o contexto das funções na variável complexa. (ver figura 8).

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \cos(ht^2) dt \\ \int_0^{+\infty} \text{sen}(ht^2) dt \end{array} \right. \underset{CUV}{\text{TRANSIÇÃO}} \Rightarrow \left\{ \alpha(t) = \left(\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt, \int_0^{+\infty} \text{sen}(t^2) dt \right) \right\} \underset{ANÁLISE COMPLEXA}{\text{TRANSIÇÃO}} \Rightarrow \int_0^{\infty} \cos(hx^2) dx + i \int_0^{\infty} \text{sen}(hx^2) dx$$

Figura 8. Perspectiva de transição da noção da integral de Fresnel ao decurso dos estudos acadêmicos (elaboração do autor)

Para concluir, a exploração e mediação ao longo dos momentos da TSD, devem proporcionar a exploração de determinados elementos costumeiramente desconsiderados pelos autores de livros sobre o assunto (FLANIGAN, 1972; GONG, 2001; LINS NETO, 1996; SOARES, 2014). Nos mesmos, divisamos a desconsideração do componente heurístico e visual de apreciação e correspondente abordagem dos conceitos fundantes.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordamos a descrição do ponto de vista teórico de alguns elementos previstos por um design de investigação em Didática da Matemática, que possibilita a obtenção de conhecimentos didáticos acerca de alguns conteúdos matemáticos, conhecido na literatura como Engenharia Didática. Em nosso caso, recordamos que “o término da Engenharia Didática designa um conjunto de seqüências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos” (DOUADY, 1995, p. 62).

Dessa forma, confrontamos o expediente metodológico acentuado nas fases dialéticas da TSD, previstas por Almouloud, tendo em vista a exploração da tecnologia atual; com o empenho didático de matemáticos profissionais (ÁVILA, 1985; 1987; 1989) com a intenção de proporcionar um entendimento heurístico da resolução da integral de Fresnel e um contexto maior e relevância do seu papel em Matemática (ver figura 8), diante de uma sistemática que proporciona a descrição qualitativa das fases de ação, formulação, validação e institucionalização.

Diferentemente das abordagens registradas nos compêndios de livros sobre o assunto, que revelam uma predileção pelo trato algoritmizado, na fase de institucionalização, o saber elaborado e

construído como consequência da interação do grupo, se constitui como fruto da interação entre o modelo matemático e o modelo computacional que, de modo indubitável, proporciona uma atividade qualitativa de produção de conjecturas por parte dos participantes (ALVES, 2016). Ademais, as construções viabilizadas pela exploração do *CAS Maple* e do *software GeoGebra* não devem produzir uma dependência secundária para a evolução das estratégias de resolução das situações. Outrossim, devem constituir elementos, fundamentados pela necessidade de visualização e identificação perceptual de elementos importantes em cada problema.

Com origem nas figuras 6 e 7, podemos proporcionar um entendimento comparativo das possibilidades tecnológicas há décadas e os instrumentos hodiernos (ver figura 9), que se mostram capazes de auxiliar um processo de transposição didática que evite ou, pelo menos, suavize os elementos de natureza epistemológica, que indicamos em seções anteriores, que proporcionam entraves ou concepções inadequadas nos estudantes que, em muitos casos e no estudo de vários assuntos na academia, tendem a preservar o tratamento analítico-procedural, formal e estruturante, em detrimento de um viés intuitivo e heurístico.

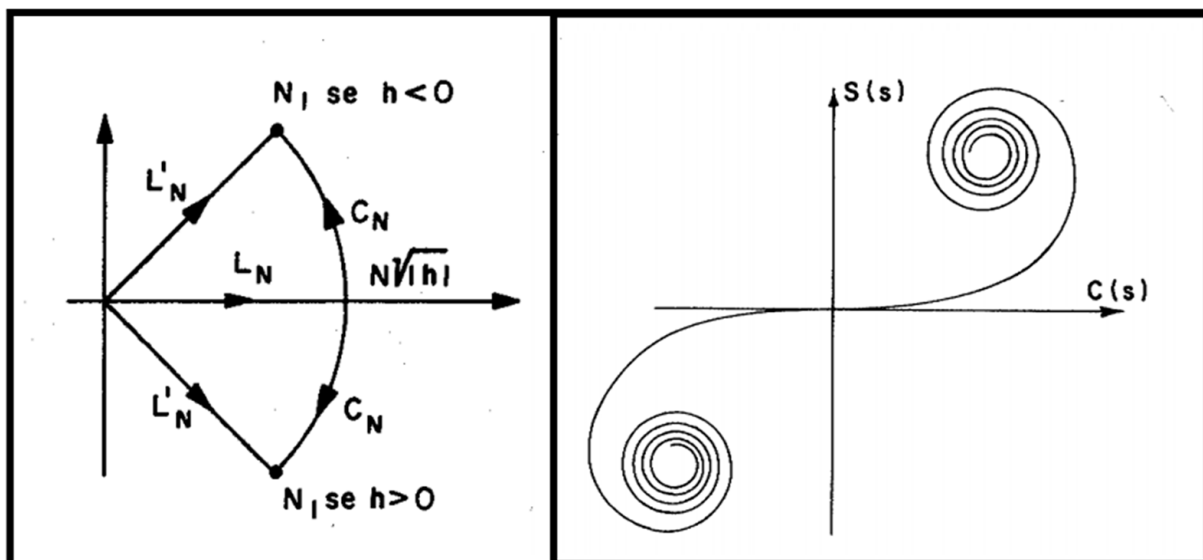


Figura 9. Ávila (1985, 1987) discute elementos envolvendo preocupações com o ensino de métodos de integração na variável complexa e exemplifica com a integral de Fresnel

Finalmente, defendemos que alguns entraves epistemológicos que discutimos nas seções passadas podem ser modificados por intermédio de uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991) distinguida. Em nosso caso, elegemos a perspectiva característica da TSD que, tendo em vista seu quadro epistemológico de referência, pode permitir a modelização, replicação (BROUSSEAU, 1986; 1994; 1998) e reprodução empírica da proposta de abordagem apresentada e discutida aqui.

Dessa forma, o término da Engenharia Didática deverá designar "um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos" (DOUADY, 1995, p. 62). Diante das considerações de Doaudy e de modo afetado pelo seu ponto de vista, defendemos a presença de elementos diferenciados presentes nas situações discutidas aqui e que detêm o potencial de aplicação e testagem em sala de aula, tendo como escopo o aperfeiçoamento da transmissão do conteúdo de integração de funções na academia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR, 2007.
- ALVES, Francisco. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis** (tese de doutorado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará – UFC, 2011, 339f.
- ALVES, Francisco. R. V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, 7(3), 148 – 168, 2014a.
- ALVES, Francisco. R. V. Técnica Computacional para o Ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics – . **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, 5(2), 1 – 9, 2014b.
- ALVES, Francisco. R. V. Aplicações no Ensino de Variável Complexa: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, 3(2), 2014c.
- ALVES, Francisco. R. V. Transição Complexa do Cálculo – TCC: Engenharia Didática para as noções de sequências, séries e séries de potências. **Educação Matemática em Revista – RS**, v. 1, nº 17, 1 – 22, 2016.
- ARTIGUE, Michelle. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques.. **Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathématiques**, 8(1), 1 – 38, 1984.
- ARTIGUE, Michelle. Ingénierie Didactiques. Brun, J. (org.). **Didactiques de Mathématiques**, 243 – 264. Lagrange J.B. & al. (eds). Jun 2003, Reims, France. 1996.
- ARTIGUE, Michelle. Épistémologie et Didactiques. **Recherche en Didactiques des Mathématiques**, v. 10, nº 2, 241 – 286, 1989.
- ARTIGUE, Michelle. Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? **Boletín de La Asociación Venezolana**, v. X, nº 2, 117-134, 2003.
- ARTIGUE, Michelle. L´éducation mathématiques comme champ de recherché et champ de pratique: resultats et défis. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, 3(3), 1 – 18, 2012.
- ARTIGUE, M. L´impact curriculaire des Technologies sur L´Éducation Mathématiques. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, 4(1), 1 – 15, 2013.
- ÁVILA, Geraldo. Contato de curvas, círculo osculador e as integrais de Fresnel. **Matemática Universitária**. Dezembro, nº 2, 75 – 85, 1985.

- ÁVILA, Geraldo. O cálculo das integrais de Fresnel. **Matemática Universitária**. Junho, nº 5, 77 – 81, 1987.
- ÁVILA, Geraldo. O método da fase estacionária. **Matemática Universitária**. nº 9, 133 – 143, 1989.
- BROUSSEAU, Guy. **Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France**. Paris: La Pensée Sauvage, 5 – 66, 1994.
- BROUSSEAU, Guy. Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. **Recherche en Didactiques des Mathématiques**. 7(2), 33 – 115, 1986.
- BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. BROUSSEAU, Guy. (org.) (1998). **Théorie des situations didactiques**. Grenoble La Pensée Sauvage, 115 – 160, 1998.
- BRUM, Wanderley, P. & SCHUHMACHER, E. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, 6(2), 60 – 84, 2013.
- CHEVALLARD. Yves. **La Transposition Didactique**. Paris: La Pensée Sauvage Édition. 1991.
- DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. & Gómez, P. (eds). **Ingeniería didáctica en educación**. 62 – 96, 1995.
- DOUADY, Régine. **Jeux de Cadres et dialectique d’outil-objet dans l’enseignement de Mathématiques – une réalisation dans tout cursus primaire** (thèse d’État). Paris: Université Paris VII, 1984. 262f.
- DOUADY, Régine. Géométrie, graphiques, fonctions au collège. **Revista Eletrónica de investigación en educación e ciencias**. nº 1, 1-7, 2008.
- FLANIGAN, F. J. **Complex Variables: harmonic and analytic functions**. California: San Diego State University, 1972.
- GONG, S. **Concise Complex Analysis**. New Jersey: World Scientific, 2001.
- HAIRER, Ernst. & WANNER, Gerhard. **Analysis by Its History**. New York: Springer, 2008.
- LABORDE, Collete. Affronter la complexité des situations didactiques d’apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **DIDASKALIA**, 10(1), 97 – 112, 1997.
- LINS NETO, Alcides. **Funções de uma variável complexa**. Rio de Janeiro: SBM, 1996.
- MARGOLINAS, C. & DRIJVEERS, P. Didactical engineering in France; an insider’s and an outsider’s view on its foundations, its practice and its impact. **ZDM Mathematics Education**, 47, 893–903, 2015.

MARGOLINAS, C. Essai de généalogie en didactique des mathématiques. **Revue suisse des sciences de l'éducation**, 27(3), p. 343-360, 2005.

NEEDHAM, Tristan. **Visual Complex Analysis**. Oxford: Oxford University Press, 2000.

POLYA, George. & LATTA, Gordon. (1974). **Complex Variables**. Nova York: John Willey and Sons.

ROBINET, Jacqueline. De L'ingenierie Didactiques. **Les Cahiers Blancs**. 1(1), 1 – 11, 1983.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma Variável Complexa**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

SHOKRANIAN, Salahoddin. **Uma introdução à Variável Complexa**, Sao Paulo: Editora Moderna, 2011.

WERGERT, Elias. **Visual Complex Functions: an introduction with the phase portrait**. New York: Birkhäuser, 2012.