**Revista Thema**
v.23 | n.2 | 2024
p.575-592

**DOI**: http://dx.doi.org/10.15536/thema.V23.2024.575-592.3177
**ISSN**: 2177-2894 (online)

**CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA**

# **Números de Narayana e a sequência (generalizada) de Narayana**: aspectos históricos, epistemológicos e matemáticos

***Narayana numbers and the (generalized) Narayana sequence****: historical, epistemological, and mathematical aspects*

Francisco Regis Vieira Alves[1]
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561 http://lattes.cnpq.br/3288513376230522

Paula Maria Machado Cruz Catarino[2]
https://orcid.org/0000-0001-6917-5093

## RESUMO

O presente trabalho aborda elementos de ordem histórica, epistemológica e matemática relacionados com os números de Narayana e a Sequência de Narayana. Ambas noções possuem raízes históricas condicionadas por um ponto de vista indiano de particular cultura matemática. Dessa forma, a partir de uma devida indicação de determinados fundamentos religiosos que, em maior ou em menor substancia, influenciam a produção de conhecimento e a sistematização das ideias matemáticas, o trabalho distingue a contribuição de dois matemáticos indianos Narayana Pandit (1340 - 1400) e Tadepalli Venkata Narayana (1930 - 1987) que contribuíram para a evolução de ambas as noções matemáticas e que, hodiernamente, podem ser vislumbradas pelo interesse de pesquisas atuais. Finalmente, o trabalho busca transmitir, de certa forma, os elementos evolutivos e da generalização de propriedades que confirmam um viés irrefreável evolutivo do conhecimento matemático.

**Palavras-chave**: Números de Narayana; Sequência Generalizada de Narayana; Historia e Epistemologia.

## *ABSTRACT*

*This paper addresses historical, epistemological, and mathematical elements related to Narayana numbers and the Narayana Sequence. Both notions have historical roots conditioned by an Indian point of view of a particular mathematical culture. Therefore, from an indication of certain religious foundations that, to a greater or lesser extent, influence the production of knowledge and the systematization of mathematical ideas, the study distinguishes the contribution of two Indian mathematicians Narayana Pandit (1340 - 1400) and Tadepalli Venkata Narayana (1930 - 1987) who contributed to the evolution of both mathematical notions and which, nowadays, can be glimpsed by the interest of current research. Finally, the*

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, Fortaleza/CE – Brasil. E-mail: fregis@ifce.edu.br
[2] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – UTAD, Vila Real – Portugal. E-mail: pcatarin@utad.pt

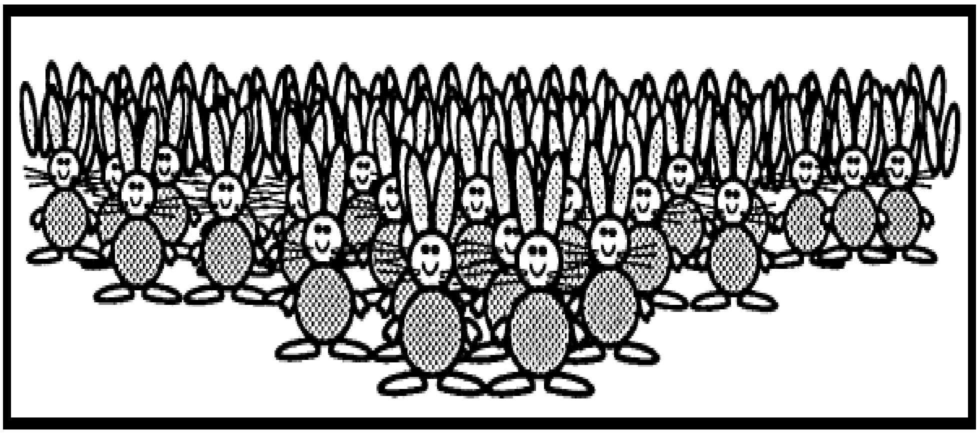
*study seeks to pass on, in a way, the evolutionary elements and the generalization of properties that confirm an unstoppable evolutionary bias of mathematical knowledge.*

***Keywords***: *Narayana numbers; Generalized Narayana´s Sequence; History and Epistemology.*

## 1. INTRODUÇÃO

Indubitavelmente o carater de ubiquidade da sequência de Fibonacci, cuja popularização decorreu a partir de um emblemático problema envolvendo a produção de coelhos imortais (Gullberg, 1997) e a descrição pitoresca fornecida por Leonardo Pisano (1170 - 1270) (ver figura 1), parece dominar a atenção da maior dos autores de livros de História da Matemática – HM (Alves, 2017; 2018; 2020; 2022). Por outro lado, registramos outros exemplos de sequências recorrentes e números, cuja pesquisa contemporânea confirma um carater indene do latente progresso em Matemática. Em nossos trabalhos (Alves, 2017; 2020; 2022), temos enfatizado a relevância da compreensão de um processo irrefreável, evolutivo e de correspondente generalização dos conceitos e dos objetos matemáticos que, a partir do seu estádio de nascedouro determinam, também, um processo de desenvolvimento e sistematização, nem sempre contíguo mas, todavia, proporciona uma compreensão de um vies intrinsecamente não estático, progressivamente construtivo e do avanço epistêmico dos conhecimentos científicos contemporâneos.

**Figura 1** – Gullberg (1997) discute o emblemático problema da reprodução de ‘coelhos imortais’.



Fonte: Gullberg (1997).

Nâo podemos deixar de mencionar que, no cotejo de maior ênfase dos autores de livros de História da Matemática deparamos, quase de forma predominante, um viés de interpretação significativa ocidental, em detrimento dos modelos matemáticos e uma cultura matemática não necessariamente ocidental (Alves, 2017; 2018; 2020; 2022; Sivaraman, 2020), fato que justifica uma maior necessidade de pesquisas sobre a História da Matemática indiana. Isso posto, no presente trabalho abordaremos algumas propriedades e aspectos históricos e epistemológicos atinentes aos números de Narayana e, em seguida, discutiremos a Sequência (Generalizada) de Narayana (SGN). Na figura 2, por exemplo, Sivaraman (2020, p. 10220) descreve a mesma, somente como um caso restrito de uma “sequência de inteiros positivos”.

Por sua vez, um cenário histórico-epistemológico objetivado busca proporcionar ao leitor um percurso matemático e evolutivo, de generalização da sequência de Narayana e dos números de Narayana, cuja representativade e espaço de discussão no interior de livros de HM costuma ser negligenciado, sobretudo, quando não desconsideramos os avanços da pesquisa atual sobre o tratamento desses dois objetos matemáticos e que nos permitem vislumbrar determinadas propriedades da Sequência Generalizada de Narayana – SGN.

**Figura 2** – Sivaraman (2020) descreve de modo restrito a sequência numérica.

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, \ldots.$$

Fonte: Gullberg (1997).

Com amparo dos argumentos passados, na seção subsequente buscaremos demarcar um cenário histórico que concorreu para o aparecimento e popularização da sequência de Narayana. Não obstante, alguns traços da cultura (matemática) indiana e o seu tratamento condicionado por um viés religioso e profundamente místico (Agoramoorthy; Hsu, 2012) do conhecimento matemático necessita ser observado e também compreendido.

## 2. ALGUNS ASPECTOS SOBRE A MATEMÁTICA INDIANA

Plofker (2009, p. 10) comenta que, de modo geral, a literatura *sanskrita* pode ser referida como um “oceano de conhecimentos”, observada como uma “apropriada metáfora da vasta abundância de assuntos compreendidos pelas variações da literatura *sanscrita*”. Os textos *Vedas* sagrados, cujo nome literalmente significa "conhecimento" são muitas vezes considerados o fundamento da e para a aprendizagem. (Plofker, 2009, p. 10). Além de enfatizar o significado da palavra falada, o sânscrito, segundo as tradições intelectuais, geralmente consideram que o conhecimento se baseia e se fundamenta em ensinamentos realmente divinos. O verdadeiro conhecimento de qualquer tipo era necessariamente parte da verdade fundamental dos *Vedas*. Tularam (2010, p. 47) observa que “os textos religiosos e filosóficos mais importantes do hinduimo da Índia ainda hoje são os Vedas”. Por sua vez, Dutta (2002, p. 5) comenta que o texto matemático indiano mais antigo se intitulava *Sulba-sultras*, composto em 800 depois de Cristo e ainda demarca forte influência atual.

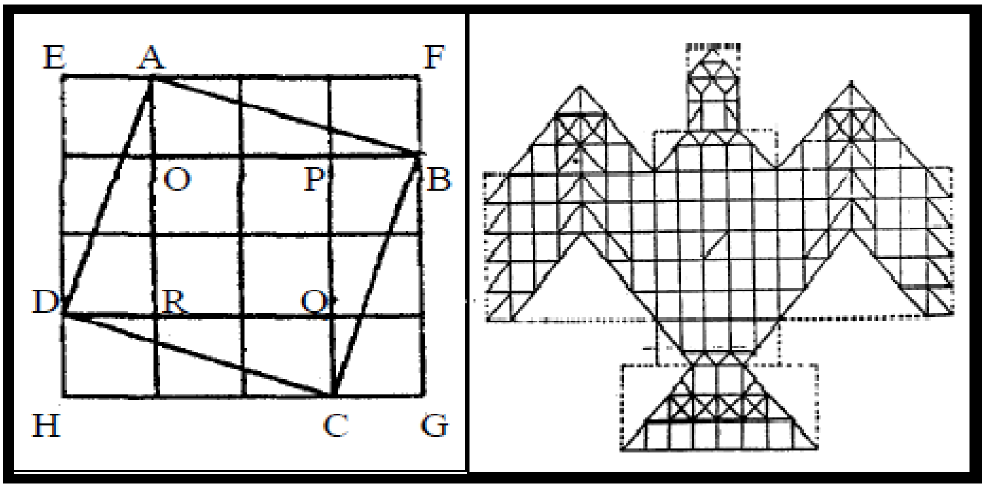
Plofker (2009) comenta problemas, confusões recorrentes com nomes de autores e certos entraves substanciais oriundos da tentativa de sua tradução, por parte de especialistas e pesquisadores ocidentais, como claramente vislumbramos no trecho abaixo, a partir da constataçaõ de certos pesquisadores europeus, sobre a produção de textos matemáticos indianos dos séculos XVIII e XIX, quando examinam a cronologia de tais estudos.

> Essa confusão foi agravada pelo fato de que autores de diferentes métodos matemáticos e textos, por vezes, possuíam o mesmo nome e

> textos diferentes às vezes tinha o mesmo título. Mesmo quando os tratados mais conhecidos foram resolvidos com profundida, no início do século XIX, os historiadores ainda tinha muitos problemas vexatórios para enfrentar. Muito matemática do material estava incorporado no contexto muito desconhecido da astronomia indiana medieval e astrologia. O estilo de sua apresentação, em alta compressão do Verso sânscrito, era igualmente alienígena. No entanto, o material também possui muitas semelhanças, desde seus números decimais até suas fórmulas trigonométricas, a certas características da matemática ocidental" (Plofker, 2009, p. 1-2).

Dutta (2002, p. 5) comenta que "os textos *Sulba-sultras* forneciam um compilação de resultados em Matemática que eram utilizados no design e na construção de vários altares védicos desde o alvorecer da civilização indiana". Dessa forma, distinguimos um forte e latente traço mistico e religioso de influência na produção de conhecimentos. De modo particular, a Matemática, não sendo uma disciplina epistemologicamente privilegiada na aprendizagem sânscrita estava, geralmente, sujeita aos mesmos critérios de verdade que outras formas de conhecimento (Plofker, 2009, p. 12). Na fig. 3 observamos dois exemplos da construção de altares sagrados do período védico (altar do falcão).

**Figura 3** – Dutta (2002) comenta a matemática encontrada no texto Sulba-sultras e emprego para a construção de altares sagrados no período védico.




Fonte: Dutta (2002).

Plofker (2009) distingue um tratamento distinto do pensamento matemático indiano, quando comparado ao estilo e modelo que adotamos oriundo de uma cultura ocidental, que sanciona o carater hegemônico da noção de verdade e da dedução lógico - formal de inferências originárias e, em certo teor, da intuição matemática. Neste caso, Plofker (2009) explica algumas marcas fundamentais do pensamento científico indiano, quando analisa determinados elementos que conferem, por exemplo, os paradigmas de rigor ocidental e oriental.

> As figuras são abstraídas de quantidades e formas físicas. Daí a verdade do conhecimento matemático teve implicações profundas para o natureza da realidade no pensamento filosófico ocidental, dos pitagóricos em diante. Tem-se observado, não de modo conclusivo, que

> o papel correspondente de paradigma da Ciência no pensamento indiano foi preenchido pelo estilo da gramática (vyakarana). Dentro da filosofia e lógica sânscritas, idéias sobre raciocínio e realidade são explicitamente ligada à compreensão de declarações linguísticas. Que filósofos precisam investigar nessas declarações, portanto, é sua interpretação gramatical em vez de suas analogias com entidades matemáticas (Plofker, 2009, p. 12).

Pouco mais adiante, Plofker (2009) acentua que a noção de verdade e os instrumento teóricos conceituais que concorriam para a confirmação e validação do conhecimento matemático, segundo a cultura indiana. Observamos, todavia, o papel da demonstração na Aritmética, Álgebra e Geometria (Sykorová, 2006; 2010), segundo um significado e função que se distingue do estilo empregado nas demonstrações, de acordo com o pensamento grego. Logo a seguir, Plofker (2009) esclarece um expediente intrinseco da epistemologia sânscrita, em busca da verificação e validação do saber.

> Isso não quer dizer que demonstração rigorosa e lógica formal eram desconhecidas para os matemáticos indianos, nem os matemáticos indianos em geral permitem argumentos da autoridade para anular a demonstração. Mas lá não era uma estrutura convencional de prova consistentemente invocada como essencial para a validação de declarações matemáticas. Verdadeira percepção, raciocínio e a autoridade deveria harmonizar-se um com o outro e cada uma delas tinha uma parte em apoiar a verdade da matemática (Plofker, 2009, p. 12).

Das considerações de Plofker (2009) depreendemos um conjunto de características marcantes da atividade dos matemáticos indianos, quando comparada ao estilo da Matematica ocidental, com raizes essencialmente helênicas. Antes de concluir a seção atual advertimos que não constitui nossa intenção a apresentação de um robusto e profundo tratado sobre a natureza do pensamento matemático indiano, embora, observamos o carater imprescindível de agregar outras formas de compreensão para a construção do pensamento matemático que deve ser registrado desde o passado (Cajori, 1894; Joseph, 2009; Sarasvati, 2007; Sarma, 1972). Por conseguinte, tal perspectiva pode proporcionar uma compreensão do seu progresso matemático atual (Dhanave; Kangale, 2014; Tularam, 2010).

Isso posto, na seção subsequente, abordaremos a noção de sequência de Narayana que revelará um viés histórico-matemático e evolutivo.

## 3. A SEQUÊNCIA DE NARAYANNA

Narayana Pandita (1340 - 1400) foi um importante matemático da Índia que autor da obra *Ganita Kaumudi* (Puttaswamy, 2012, p. 541). Plofker (2012) escreve que seus textos eram os tratados de matemática sânscrito mais significativos depois dos de Bhaskara II, além da escola de *Kerala* (Sarma, 1972). Katz (2007) comenta sobre o predomínio e influência do pensamento de Bhaskara, registrado em um momento de transição do pensamento matemático indiano, como observamos abaixo.

> A predominância duradoura dos textos de matemática de Bhaskara II e a ignorância de muitos historiadores sobre o trabalho posterior, como a da escola de Kerala, ajudaram a promover a noção de que a matemática indiana após o século do século XV estagnou. De fato, além do trabalho de Keralese, houve um fluxo persistente de escrita sânscrita em assuntos matemáticos no resto do segundo milênio. Os livros clássicos continuaram sendo copiados, estudados e ensinados, e novos comentários foram escritos sobre eles; já vimos uma amostra de tais esforços no comentário do século XVI de Suryadasa sobre o Bijaganita” (Katz, 2007, p. 498).

O tratado de aritmética de Narayana, intitulado “o luar da matemática"(*Moonlight of Computation)*, afirma em seu versículo final que Narayana "navegador no oceano da matemática" completou-o em uma data correspondente a 10 de novembro de 1356. Plofker (2009, p. 208) comenta que "tratamentos de permutações e combinações e quadrados mágicos são muito abrangentes ". De acordo com Plofker (2009, p. 208-209) Narayana parece ter sido “um dos primeiros autores a introduzir quadrados mágicos como um tópico na aritmética indiana, embora eles certamente fossem conhecidos". Katz (2007), por sua vez, confirma a introdução pioneira dos trabalhos de Narayana envolvendo os quadrados mágicos em Matemática (ver figura 4).

> Um dos mais conhecidos é o Ganitakaumudi (*Moonlight of Computation*), completado em 1356 por Narayana Pandita, sobre cuja vida poucos outros detalhes estão disponíveis. Nós sabemos que ele também escreveu um trabalho de álgebra parcialmente existente, o *Bijaganitavatamsa* (*Garland of Algebra*), mencionado acima por *Suryadasa* em seu comentário sobre Bijaganita 10. A estrutura de *Ganitakaumudi* é em grande parte baseada na *Lilavafi*, mas também contém alguns investigações mais extensas de vários tópicos, incluindo permutações e combinações (a "rede de números"), acompanhada por uma longa seção em quadrados mágicos. O primeiro dos seguintes trechos mostra algumas das regras combináticas de Narayana, em particular o diagrama chamado Meru parcial (chamado para o Monte Meru na mitologia hindu) para classificar permutações. A última parte é a introdução de Narayana à matemática dos quadrados mágicos. Os versos numerados de *Ganitakaumudi* são complementados por um comentário em prosa, que pode ou não ser pelo próprio Narayana” (Katz, 2007, p. 498).

Por outro lado, não podemos desconsiderar uma dimensão fortemente condicionada influenciada pelo pragmatismo religioso e místico que influenciou uma maneira especial de produzir a Matemática indiana, como podemos deduzir da afirmação abaixo.

> Então, uma classe de boa matemática conectada com a série foi ensinada ao espírito *Manibhadra*, que estava interessado por Siva, professora dos três mundos. Descreverei sua essência, chamada *bhadraganita*, para surpreender os bons matemáticos, a fim de agradar aqueles que conhecem diagramas mágicos, e para dissipar o orgulho dos pobres matemáticos (Katz, 2007, p. 501-502).

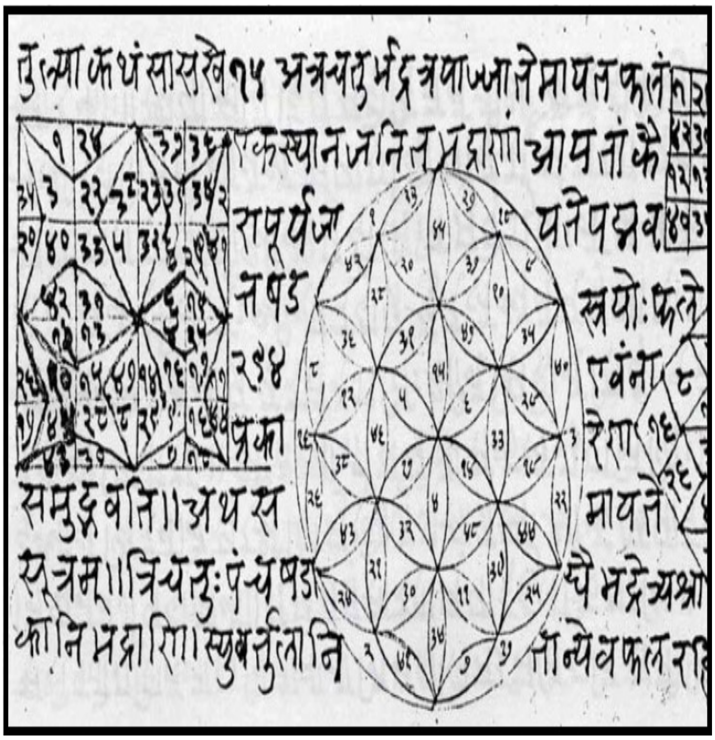
Plofker (2009, p. 211) apresenta o questionamento: "O que isso implica sobre as idéias dos matemáticos indianos sobre o que pertence à matemática propriamente dita e o que constitui uma espécie de conhecimento matemático aplicado ou esotérico?” E, pouco mais adiante, acrescenta que “o oceano proverbial do *gan* é claramente muito mais amplo e profundo do que pensamos, e muito da sua extensão significação permanece desconhecido".

Finalmente, a sequência de Narayana é derivada do seguinte problema que foi proposto por Narayana no século 14: "Uma vaca dá à luz um bezerro todos os anos. Por sua vez, o bezerro dá à luz outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual é o número de progênies produzido durante vinte anos por uma vaca?" (Ramírez; Sirvent, 2005, p. 91; Wilmott, 2015). Nós assumimos que começamos com um bezerro recém-nascido, que e apresentamos o conjunto numérico: $\{1,1,1,2,3,4,6,9,13,19,\ldots,x_n,\ldots\}$.

Reparamos que podemos comparar os valores do conjunto anterior com a figura 2, com valores estritamente positivos indicados por Sivaraman (2020). Por outro lado, quando consultamos o trabalho de Bezerra (2021), podemos ainda descrever o seguinte conjunto ampliado $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\{\ldots,x_{-n},\ldots,-2,1,1,-1,0,1,0,0,1,1,1,2,3,4,6,9,13,19,\ldots,x_n,\ldots\} \quad (*)$$

**Figura 4** – Plofker (2009) comenta um manuscrito produzido por Narayana Pandita (1340 - 1400) envolvendo a noção de quadrados mágicos.



Fonte: Plofker (2009, p. 209).

Na figura 5 observamos a indicação do estudante do matemático indiano Citrabahanu (1475–1550) que foi, segundo Joseph (2009, p. 21), junto a Narayana Pandit, que completou seus estudos matemáticos na escola indiana Kerala (*Kriyakramakari)* em 1556. O itinerário apontado por Joseph (2009) explica uma tradição de ensinamentos transmitidos pelo pensamento de vários matemáticos, dentre eles, Narayana.

**Figura 5** – Joseph (2009, p. 8) indica uma cadeia de tradição de passagem dos conhecimentos matemáticos na escola Kerala indiana.

*Madhava* (fl. 1340–1425) ==> *Paramesvara* (fl. 1360–1460) ==> Damodara (fl. 1410–1510) ==> *Nilakantha* (fl. 1443–1560) ==> Citrabhanu (fl. 1475–1550) ====> Narayana (fl. 1500–1575) and *Sankara Variyar* (fl. 1500–1560)

**Also** Damodara ==> *Jyesthadeva* (fl. 1500–1610) ==> *Acyuta Pisarati* (fl. 1550–1621)

Fonte: Joseph (2009).

A partir do problema da reprodução das vacas anterior e a descrição da lista indicada em (*), segundo uma notação atual, podemos definí-la formalmente.

Definição: A sequência de Narayana é definida pela seguinte recorrência $x_0 = x_1 = x_2 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + x_{n-3}, n \geq 3$.

Segundo uma discussão que temos introduzido em nossos trabalhos, envolvendo o processo matemático de expansão ao campo de índices inteiros, reparemos que podemos tomar para $n = 2 \therefore x_2 = x_1 + x_{-1} \therefore x_{-1} = 0$. Em seguida, fazendo $n = 1 \therefore x_1 = x_0 + x_{-2} \leftrightarrow x_{-2} = 0$. Ainda, se tomarmos $n = 0 \therefore x_0 = x_{-1} + x_{-3} \leftrightarrow x_{-3} = 0$.

Sucessivamente, determinaremos o seguinte conjunto abstrato generalizando a lista numérica indicada em (*):

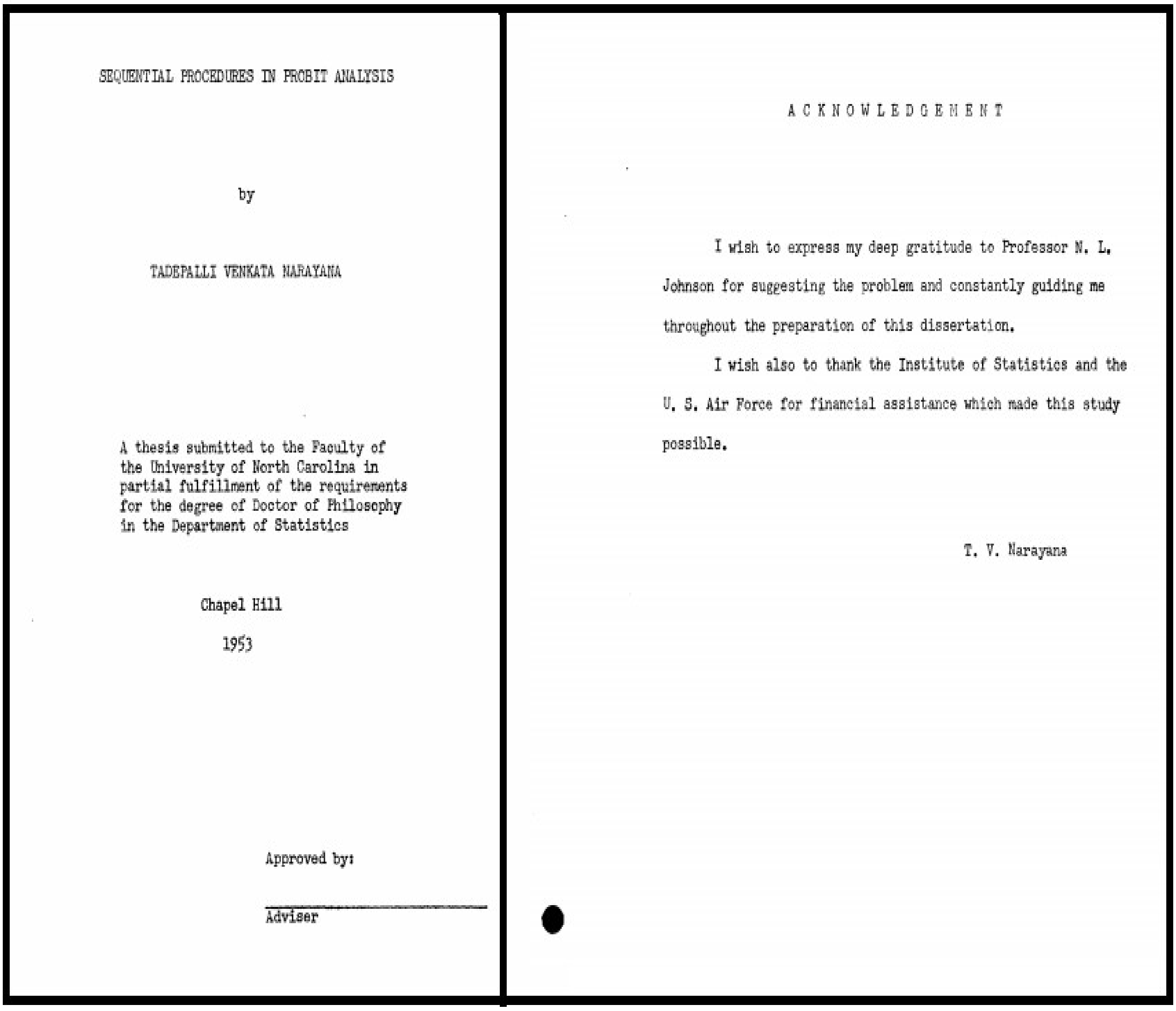
$$\{\ldots,\ldots,x_{-n},x_{-n+1},x_{-n+2},\ldots,x_{-5},x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}.$$

Na próxima seção falaremos sobre os números de Narayana. A despeito de suscitar por vezes uma falsa compreensão de que se trata do mesmo matemático, os elementos históricos mais recentes, apontados no próximo segmento, devem nos orientar para a compreensão que de fato tratam-se de dois matemáticos indianos distintos.

## 4. OS NÚMEROS DE NARAYANNA

Stanley (2015, p.162) menciona com precisão que os números de Narayana foram descobertos pelo matemático britânico Percy Alexander MacMahon (1854-1929). Eles foram redescobertos por Tadepalli Venkata Narayana (1930 - 1987). Petersen (2015) define os números Eulerianos a partir de intimas relações com os números de Narayana, por intermédio de interpretação combinatória. Abaixo trazemos para o leitor a figura com os dados da tese de doutorado, defendida em 1953 e intitulada *Sequential procedures in probit analysis.* Tadepalli Venkata Narayana abordou um problema no campo da estatistica, probabilidade envolvendo a modelação e aplicação de uma método sequencial. Ao leitor interessado sugerimos a apreciação do documento original de Narayana (1953, 1979) e discussão de métodos estatísticos explorados em sua tese (ver figura 6).

**Figura 6** – Capa e a agradecimentos declarados na tese de doutorado de T. V. Narayana em 1953 no campo de aplicação de Estática.


SEQUENTIAL PROCEDURES IN PROBIT ANALYSIS

by

TADEPALLI VENKATA NARAYANA

A thesis submitted to the Faculty of
the University of North Carolina in
partial fulfillment of the requirements
for the degree of Doctor of Philosophy
in the Department of Statistics

Chapel Hill

1953

Approved by:

Adviser

A C K N O W L E D G E M E N T

I wish to express my deep gratitude to Professor N. L. Johnson for suggesting the problem and constantly guiding me throughout the preparation of this dissertation.

I wish also to thank the Institute of Statistics and the U. S. Air Force for financial assistance which made this study possible.

T. V. Narayana

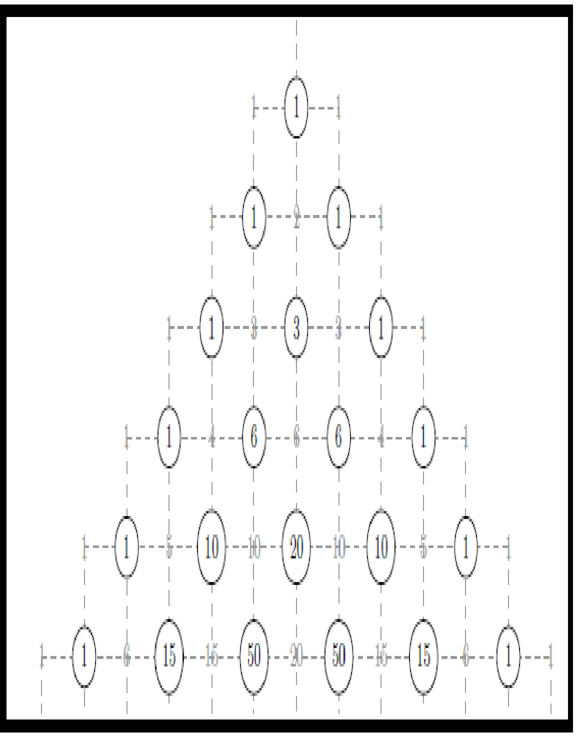
Fonte: Narayanna (1953).

Por outro lado, podemos vislumbrar, também, intrinsecas interrelações dos números de Narayana com os números de Catalan ou os números Eulerianos, por exemplo. Petersen (2015, p. xi) comenta que "outra coisa que provavelmente não era aparente em 1970, mas desde então permaneceu na vanguarda deste assunto é que os números eulérianos possuem íntimas relações próximas conhecidas como os números de Narayana".

Um pouco mais adiante, Petersen (2015) assinala que estes são nomeados após Tadepalli Venkata Narayana, que "descreveu esses números em um artigo de 1959 contando certos tipos de caminhos de rede. Os números Narayana possuem muitas das mesmas propriedades como os números eulérianos e têm muitas das mesmas conexões geométricas".

**Figura 7** – Petersen (2015) descreve uma interpretação combinatória dos números de Narayana.

| n\k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 6 | 6 | 1 | | | | | | |
| 5 | 1 | 10 | 20 | 10 | 1 | | | | | |
| 6 | 1 | 15 | 50 | 50 | 15 | 1 | | | | |
| 7 | 1 | 21 | 105 | 175 | 105 | 21 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 28 | 196 | 490 | 490 | 196 | 28 | 1 | | |
| 9 | 1 | 36 | 336 | 1176 | 1764 | 1176 | 336 | 36 | 1 | |
| 10 | 1 | 45 | 540 | 2520 | 5292 | 5292 | 2520 | 540 | 45 | 1 |




Fonte: Petersen (2015, p. 209).

Por sua vez, Petersen (2015, p. 23) fornece a definição formal extraída do arranjo triangular que observamos na figura 5). Neste caso, o número de Narayanna, que é denotado por $N_{n,k}$ é interpretado como o número de permutações definidas a partir de uma forma particular, para valores descendentes de 'k', com a condição $0 \leq k \leq n$. Com origem nessa descrição combinatória, Petersen (2015) fornece a definição formal que apresentamos em seguida.

Definição : Para os inteiros $0 \leq k \leq n$, os números de Narayana são dados pela seguinte fórmula fechada indicada por $N(n,k) = N_{n,k} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}$.

Petersen (2015, p. 23) define a seguinte matriz $M_{n,k} = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{vmatrix}$, cujo determinante pode ser obtido $\det(M_{n,k}) = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1}$.

Por outro lado, podemos determinar, fácilmente, que: $\det M_{n,k} =$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)} \times \left[ \frac{n!}{n \cdot k!(n-k-1)!}\frac{(n+1)\,\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)!}{\mathrm{k}!(n-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{\mathrm{k}!(n-k-1)!} \right] =$$

$$= \frac{n!(n-1)!}{k!(k+1)k!} \times \left[ \frac{1}{n \cdot (n-k-1)!}\frac{(n+1)\,\mathrm{n}}{(n-k)!} - \frac{n}{(n-k)!}\frac{1}{(n-k-1)!} \right] =$$

$$= \frac{1}{(k+1)}\frac{n!}{k!(\mathrm{n}-\mathrm{k})!}\frac{(n-1)!}{k!(\mathrm{n}-\mathrm{k})!} \times \left[ \frac{1}{n \cdot 1}\frac{(n+1)\,\mathrm{n}}{1} - \frac{n}{1}\frac{1}{1} \right] = \frac{1}{(k+1)}\frac{n!}{k!(\mathrm{n}-\mathrm{k})!}\frac{(n-1)!}{k!(\mathrm{n}-\mathrm{k})!} \times [n+1-n] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{k}+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{1}{\mathrm{k}+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{\mathrm{k}} = N(n,k) = N_{n,k}.$$

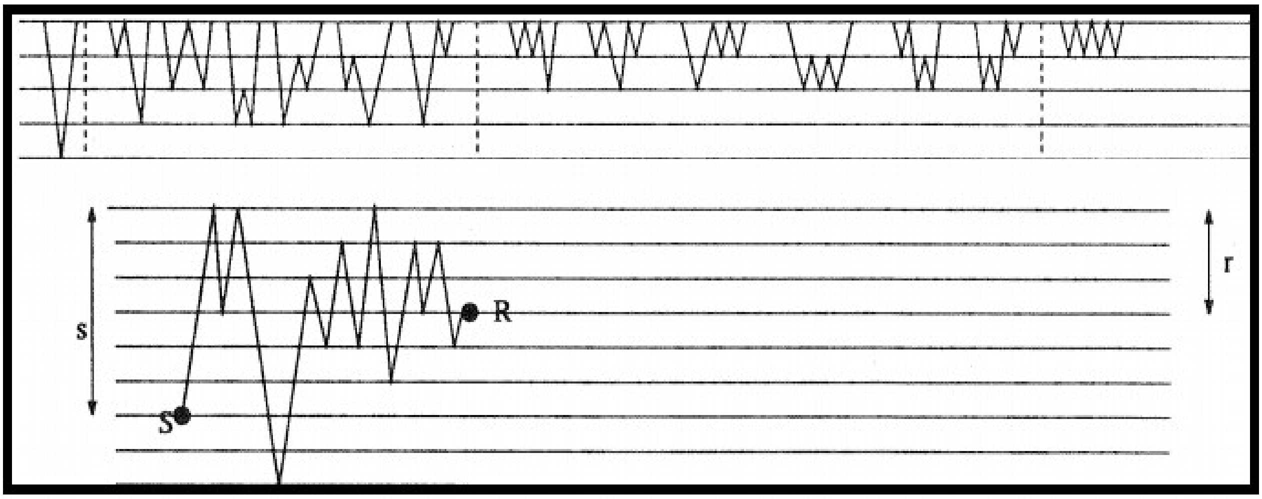
Em seguida apenas enunciaremos um teorema (Grimaldi, 2012) que, a partir da definição anterior, constitui um ótimo exercício de aplicação da definição anterior e pode proporcionar um acrescimo de familiariedade com esse sistema simbólico.

Teorema (Grimaldi, 2012): Para quaisquer inteiros ‘n’ e ‘k’ e de acordo com a definição de um número de Narayana, temos as seguintes propriedades.

(i) $N(\mathrm{n},\mathrm{k}) = N(n, n+1-k),\ n \geq k \geq 1$ (propriedade da simetria); (ii) $\binom{k+1}{2} N(\mathrm{n}+1,\mathrm{k}+1) = \binom{n+1}{2} N(n,k),\ n \geq k \geq 0$ (propriedade de absorção); (iii) $\binom{n}{k-1} N(\mathrm{n},\mathrm{k}+1) = \binom{n}{k+1} N(n,k),\ n \geq k \geq 1$; (iv) $\binom{n-k+2}{2} N(\mathrm{n}+1,\mathrm{k}) = \binom{n+1}{2} N(n,k)$, para quaisquer inteiros $n \geq k \geq 1$; (iv) $(n+1)N(n,k) = (n-1)\left[N(n-1,k-1) + N(n-1,k)\right] + 2\binom{n-1}{k-1}^2$, para $n \geq k \geq 2$; (v) $N(n+1,k+1) = \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}$, para $n \geq k \geq 1$.

Em cenário mais recente de aplicação dos números de Narayana sublinhamos, por exemplo, na figura 8, um mapa para o comportamento sismológico visando a modelação de ondas de choque que possuem um comportamento matemático. Wehrhahn (1995) explica, logo no início do artigo científico que este artigo surgiu “na tentativa de resolver um problema de contar certos caminhos de raios em sismologia. O ingrediente chave da solução é uma fórmula descoberta pela primeira vez por Narayana”. Esse estudo revela um caráter de vigor e do potencial de aplicabilidade dos números de Narayanna, em outros campos da Ciência.

**Figura 8** – Wehrhahn (1995) aplica modelos probabilísticos descobertos por Tadepalli Venkata Narayana.




Fonte: Wehrhahn (1995, p. 209).

Encerramos a seção atual observando que a generalização dos números de Narayana não finalizam por aquí e, em Petersen (2015, p. 273) ainda deparamos a noção abstrata de W-números de Narayana, que extrapolam os limites de interesse do trabalho atual. Por outro lado, na seção seguinte, vamos retomar a noção de sequência de Narayana que, como pontuamos, foi originada de um problema de reprodução de vacas, por outro indiano. Veremos que, de forma semelhante ao caso de Fibonacci, que podemos alterar e determinar a quantidade que desejamos envolvendo a produção de coelhos, no caso da Sequência de Narayana, o mesmo modelo pode ser descrito, com a designação de um número inteiro ‘k’.

## 5. A SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE NARAYANNA (SGN)

Encontramos no trabalho de Ramirez e Sirven (2015) a definição da sequência k de Narayna indicada pela seguinte definição.

Definição: Dado um inteiro ‘k’ não nulo e denotando o conjunto dos números $\{b_{k,n}\}_{k=0}^{\infty}$, com a seguinte condição inicial $b_{k,0}=0, b_{k,1}=1, b_{k,2}=k$. Definimos a seguinte recorrência $b_{k,n}=k\cdot b_{k,n-1}+b_{k,n-3}$. (RAMÍREZ & SIRVEN, 2015).

Na figura 9 podemos observar que, para valores particulares, digamos $k=1$, podemos verificar que $(0,1,1,1^1,1^3+1,1^4+2\cdot 1,1^5+3\cdot 1^2,1^6+4\cdot 1^3+1,...,...)$ que corresponde, de modo preciso, ao conjunto numérico indicado na figura 2.

**Figura 9** – Ramírez e Sirven (2015) descrevem uma
lista dos primeiros elementos da sequência k-Narayanna.

$$0,\ 1,\ k,\ k^2,\ k^3+1,\ k^4+2k,\ k^5+3k^2,\ k^6+4k^3+1,\ k^7+5k^4+3k,\ \ldots$$

Fonte: Definir a fonte da figura!!!!

Ramírez e Sirven (2015) definem a seguinte matriz $Q(k)=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A partir da mesma, podemos determinar as seguintes potências: $Q(k)^2=\begin{pmatrix} k^2 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$Q(k)^3=\begin{pmatrix} k^3+1 & k & k^2 \\ k^2 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q(k)^4=\begin{pmatrix} k^4+2k & k^2 & k^3+1 \\ k^3+1 & k & k^2 \\ k^2 & 1 & k \end{pmatrix}$, $Q(k)^5=\begin{pmatrix} k^5+3k^2 & k^3+1 & k^4+2k \\ k^4+2k & k^2 & k^3+1 \\ k^3+1 & k & k^2 \end{pmatrix}$,

$Q(k)^6=\begin{pmatrix} k^6+4k^3+1 & k^4+2k & k^5+3k^2 \\ k^5+3k^2 & k^3+1 & k^4+2k \\ k^4+2k & k^2 & k^3+1 \end{pmatrix}$, $Q(k)^6=\begin{pmatrix} k^6+4k^3+1 & k^4+2k & k^5+3k^2 \\ k^5+3k^2 & k^3+1 & k^4+2k \\ k^4+2k & k^2 & k^3+1 \end{pmatrix}$.

Por outro lado, reparemos que $Q(k)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{k,0} & b_{k,-2} & b_{k,-1} \\ b_{k,-1} & b_{k,-3} & b_{k,-2} \\ b_{k,-2} & b_{k,-4} & b_{k,-3} \end{pmatrix}$. Assim, repetindo um argumento anterior e aplicando uma noção fácil do produto de matrizes, determinadaremos as potências: $Q(k)^{-1}, Q(k)^{-2}, Q(k)^{-3}, Q(k)^{-4},, Q(k)^{-5} \ldots, Q(k)^{-n}$. Abaixo trazemos exemplos iniciais: $Q(k)^{-2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{k,-1} & b_{k,-3} & b_{k,-2} \\ b_{k,n} & b_{k,n-2} & b_{k,n-1} \\ b_{k,n-1} & b_{k,n-3} & b_{k,n-2} \end{pmatrix}$,

$Q(k)^{-3}=\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ -k & k^2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q(k)^{-4}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -k \\ -k & k^2 & 1 \\ 1 & -2k & k^2 \end{pmatrix}$, $Q(k)^{-5}=\begin{pmatrix} k & k^2 & 1 \\ 1 & -2k & k^2 \\ k^2 & -k^3+1 & -2k \end{pmatrix}$,

$Q(k)^{-6}=\begin{pmatrix} 1 & -2k & k^2 \\ k^2 & -k^3+1 & -2k \\ -2k & 3k^2 & -k^3+1 \end{pmatrix}$, $Q(k)^{-7}=\begin{pmatrix} k^2 & -k^3+1 & -2k \\ -2k & 3k^2 & -k^3+1 \\ -k^3+1 & k^4-3k & 3k^2 \end{pmatrix}$.

Com origem nas expressões preliminares acima, trazemos um item (i) demonstrado por Ramírez e Sirve (2015) e no item (ii) a sua extensão para índices inteiros, desconsiderada pelos autores. Empregaremos um expediente semelhante ao processo de extensão indicado em Alves (2017), cujo cenário histórico de origem pode ser encontrado em Brother (1965).

Teorema: Para todo ‘n’ natural, teremos que:

(i) $$Q(k)^n = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} b_{k,n+1} & b_{k,n-1} & b_{k,n} \\ b_{k,n} & b_{k,n-2} & b_{k,n-1} \\ b_{k,n-1} & b_{k,n-3} & b_{k,n-2} \end{pmatrix}, n \geq 3$$ (Ramírez; Sirvent, 2015);

(ii) $$Q(k)^{-n} = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n} = \begin{pmatrix} b_{k,-n+1} & b_{k,-n-1} & b_{k,-n} \\ b_{k,-n} & b_{k,n-2} & b_{k,-n-1} \\ b_{k,-n-1} & b_{k,-n-3} & b_{k,-n-2} \end{pmatrix}, n \geq 1$$ ;

(iii) para quaisquer inteiros positivos ‘m’ e ‘n’ temos que $b_{k,n+m} = b_{k,n} b_{k,m+1} + b_{k,n-2} b_{k,m} + b_{k,n-1} b_{k,m-1}$; (iv) para quaisquer inteiros ‘m’ e ‘n’ positivos temos que $b_{k,-n-m} = b_{k,-n} b_{k,-m+1} + b_{k,-n-2} b_{k,-m} + b_{k,-n-1} b_{k,-m-1}$.

Demonstração: Para verificar o ítem (i), por indução, vamos admitir que $Q(k)^n = \begin{pmatrix} b_{k,n+1} & b_{k,n-1} & b_{k,n} \\ b_{k,n} & b_{k,n-2} & b_{k,n-1} \\ b_{k,n-1} & b_{k,n-3} & b_{k,n-2} \end{pmatrix}$. Logo em seguida, basta empregar a seguinte identidade matricial $Q(k)^{n+1} = Q(k)^n Q(k) = \begin{pmatrix} b_{k,n+1} & b_{k,n-1} & b_{k,n} \\ b_{k,n} & b_{k,n-2} & b_{k,n-1} \\ b_{k,n-1} & b_{k,n-3} & b_{k,n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} kb_{k,n+1} + b_{k,n-1} & b_{k,n} & b_{k,n+1} \\ kb_{k,n} + b_{k,n-2} & b_{k,n-1} & b_{k,n} \\ kb_{k,n-1} + b_{k,n-3} & b_{k,n-2} & b_{k,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k,n+2} & b_{k,n} & b_{k,n+1} \\ b_{k,n+1} & b_{k,n-1} & b_{k,n} \\ b_{k,n} & b_{k,n-2} & b_{k,n-1} \end{pmatrix}$$. Em seguida, para determinar a propriedade correspondente para expoentes negativos, vamos observar que $Q(k)^{-n-1} = Q(k)^{-n} Q(k)^{-1}$. Para veficar o ítem (iii) os autores obsrvam a seguinte identidade $Q(k)^{n+m} = Q(k)^n Q(k)^m$. Finalmente, empregando o teorema 1, vamos tomar agora a identidade $Q(k)^{-n-m} = Q(k)^{-n} Q(k)^{-m}$ e repetimos o argumento de (i).

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas seções passadas apresentamos alguns aspectos históricos, matemáticos e epistemológicos-evolutivos relacionados com os números de Narayana e a Sequencia de Narayana (ver figura 2), sobretudo, com ênfase ao processo matemático que permite a sua generalização. Dessa forma, acentuamos, ao decorrer das seções que a sequência de Narayana representou uma contribuição do matemático indiano Narayana Pandit (1340 – 1400) enquanto que, no caso dos números de Narayana, registramos uma outra contribuição do matemático indiano Tadepalli Venkata Narayana (1930–1987). No primeiro caso, divisamos um cenário primitivo de uma matemática indiana produzida em meio a um forte pragmatismo social, místico (AGORAMOORTHY & HSU, 2012) e religioso e que, de certa forma, como observamos, determinou determinadas distinções genuinas da natureza epistemológica do conhecimento matemático indiano, quando comparado com nossa cultura matemática ocidental, condicionada sob a égide do pensamento grego.

Em nossos trabalhos (ALVES, 2017; 2018; 2020; 2022; ALVES & CATARINO, 2020) temos propugnado um caráter essencial de uma imprescindivel compreensão do progresso matemático irrefreável, por vezes, identificado de forma inercial ou estático, entretanto, a partir da contribuição, por vezes aleatória, de vários matemáticos profissionais, e em períodos históricos não contíguos, possibilitam uma trajetória de progresso, sistematização e da evolução, o que confirma um vigor epistêmico indene da Matemática. Tal compreensão requer um cenário de discussão ampliada, desde o seu estádio de nascedouro, passando pela constatação da pesquisa mais atual, o que fortalece um viés de completude para a dimensão histórica da Matemática.

Para concluir, Singh (1985, p. 229) adverte que, o que costumeiramente atribuímos ao antigo matemático Leonardo Pisano ou Leonardo Biggollo, já tinha sido discutido pelo matemático indiano Virahanka (entre 600 e 800 d. C.), Gopâla (em 1135 d. C.), Hemacandra (em 1150 a. C.). E, finalmente adquiriu popularidade com Leonardo Pisano. Singh (1985) explica que Narayana Pandita estabeleceu relações que envolvem, de modo particular, os números de Fibonacci. Seu problema envolvendo a reprodução de vacas, como buscamos indicar inicialmente, constitui um exemplo de produção e interpretação matemática sob influência de sua cultura religiosa e não pode ser confundido com o trabalho do outro matemático indiano Tadepalli Venkata Narayana. Em todo caso, urge uma maior divulgação das ideias históricas matemáticas não apenas de herança originária no pensamento helênico.

## 7. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor é bolsista-CNPq-PQ2-Processo 305495/2022-4 e agradece o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil.

## 8. REFERÊNCIAS

ALLOUCHE, J. P.; JOHNSON, F. Narayana's cows and delayed morphisms. In: SLOANE, N. J. A. **The on-line encyclopedia of integer sequences**. 2008. Disponível em: http://kalvos.org/johness1.html. Acesso em: 13 mar. 2023.

AGORAMOORTHY, G.; HSU, M. J. The significance of cows in Indian society between sacredness and economy. **Journal of Anthropological Notebooks**, v. 18, n. 3, p. 1–8, 2012.

ALVES, Francisco, R. V. Fórmula de de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci – SGF, **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, n. 33, p. 1–16, 2017.

ALVES, F. R. V. The Quaterniontonic and Octoniontonic Fibonacci Cassini’s Identity: an historical investigation with the Maple´s Help. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 13, n. 3, p. 125-138, 2018.

ALVES, F. R. V. Brahmagupta e alguns elementos históricos da matemática hindu. **Revista Thema**, v. 16, n. 4, p. 755-773, 2020.

ALVES, Francisco, R. V. Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): a proposal of his historical research in Brazil on Recurring Sequences Numbers. **The Montana Enthusiast**, v. 19, n. 1, p. 239-274, 2022.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. Uma proposta de investigação histórico-epistemológica sobre sequências recorrentes de 2ª ordem. **Revista Paradigma**, v. 61, n. 2, p. 404-426, 2020.

BAG, A. K. **Mathematics in ancient and mediaval India**. Bombai: Chaukhamba Orientalia, 1979.

BEZERRA, F. H. **Engenharia Didática com o tema**: a sequência e os números de Narayanna. 2021. 170 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2021.

BROTHER, A. U. **An introduction to Fibonacci Discovery**. Santa Clara: Fibonacci Association, Santa Clara University, 1965.

CAJORI, F. **A history of Mathematics**. New York: Macmillan Co., 1894.

CHECCOLI, S.; D’ADDERIO, M. Perfect powers in Catalan and Narayana numbers. **MATHARXIV**, v.1, p. 1-15, jun. 2013. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1306.5929.pdf. Acesso em: 13 mar. 2023.

DATTA, B; SINGH, A. N. **History of Hindu Mathematics**. Bombay: Asia Publishing House, 1962.

DHANAVE, M. N.; KANGALE, M. A. The implementation of vedic Mathematics to Algebra and Geometry. **Journal of Mathematics**. v. 10, n. 2, p. 33-36, 2014.

FLAUT, C.; SHPAKIVSKYI, V. On generalized Fibonacci Quaternions and Fibonacci-Narayana Quaternions. **Advances in Applied Clifford Algebras**, n. 23, p. 673-688, 2013.

GRIMALDI, R. P. **Fibonacci and Catalan Numbers**: an introduction. New York: Wiley and Sons Publishers, 2012.

GULLBERG, J. **Mathematics from birth to Numbers**. New York: Norton Company, 1997.

JOSEPH, G. **A passage to Infinity**: medieval indian mathematics from Kerala and It´s impact. India: Sage Publishers, 2009.

KATZ, V. **The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam**. Princeton: Princeton University Press, 2007.

MONTELLE, C. Having the answers': writing the history of mathematics in India. **Historia Mathematica**, v. 38, p. 111-122, 2011.

NARAYANA, T. V. **Sequential procedures in probit analysis**. 1953. 115 f. Thesis (Doctorate in Philosophy and Statistics) – North Carolina University, North Carolina, 1953.

NARAYANA, T. V. A partial order and its applications to probability theory. **Sankya**, v. 21, p. 91-8, 1959.

NARAYANA, T. V. Lattice path combinatorics with statistical applications. **Expositiones Mathematicae**, University of Toronto Press, n. 23, 1979.

PETERSEN, T. K. **Eulerien Numbers**. New York: T. Kyle Petersen, 2010.

PETKOVIC, M. D.; WATERFORD, N. P. B. Closed-form expression for hankel determinants of the narayana polynomials. **Czechoslovak Mathematical Journal**, n. 62, p. 39-57, 2012.

PLOFKER, K. **Mathematics in India**. Princeton: Princeton University Press, 2012.

PUTTASWAMY, T. K. **Mathematical achievements of pre-modern Indian Mathematicians**. New York: Elselvier, 2012.

RAMÍREZ, J. L.; SIRVEN, V. F. A note on the k-Narayana sequence. **Annales Mathematicae et Informaticae**, n. 41, p. 91-105, 2015.

SARASVATI. A. **Geometry and ancient and medieval indian**. Delhi: Motilal Sanardilas Publishers, 2007.

SARMA, K. V. **A history of Kerala School in Hindy Astronomy**. Panjab: Panjab University, 1972.

SATYA, A.; SHIVAKUMAR, N. On the history of indian mathematics. **International journal of Innovative Technology and Research**, v. 3, n.2, p. 1915-1924, feb.–mar. 2015.

SINGH, A. N. On the use of series in Hindu mathematics. **Osiris**, p. 606-628, 1936.

SINGH, P. The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India. **Historia Mathematica**, n. 12, p. 229-244, 1985.

SIVARAMAN, R. Knowing Narayana cows sequence. **Advances in Mathematics: Scientific Journal**, v. 9, n. 12, p. 10219-10224, 2020.

STANLEY, R. P. **Catalan Numbers**. New York: Cambridge University Press, 2015.

SYKOROVÁ. I. Ancient indian mathematics. **WDS'06 Proceedings of Contributed Papers**, Part I, p. 7–12, 2006.

SYKOROVÁ. I. Fractions in Ancient Indian Mathematics. **WDS'10 Proceedings of Contributed Papers**, Part I, p. 133–138, 2010.

TULARAM, G. A. Vedas and the development of arithmetic and algebra. **Journal of Mathematics and Statistics**. v. 6, n. 4, p. 468-480, 2010.

WEHRHAHN, K. H. Applications of Narayana's formula. **Australasian Journal of Combinatorics**, n. 11, p. 44-57, 1995.

WILMOTT, C. M. From Fibonacci to the mathematics of cows and quantum circuitry. **Journal of Physics: Conference Series**, n. 574, p. 1-5, 2015.

Submetido em: **13/03/2023**

Aceito em: **29/04/2024**