Revista Thema
v.21 | n.1 | 2022
p.274-288

DOI: http://dx.doi.org/10.15536/thema.V21.2022.274-288.2359

ISSN: 2177-2894 (online)

CIÊNCIAS HUMANAS

Estudo da integral definida por meio de problemas interdisciplinares do Cálculo com a Físico-Química

Study of the definite integral through interdisciplinary problems of Calculus with Physical Chemistry

Janice Rachelli[1], Vânia Bolzan Denardi[2], Vanilde Bisognin[3]

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo investigar como a resolução de problemas, com base na interdisciplinaridade entre o Cálculo e a Físico-Química, contribui para o ensino e aprendizagem do conceito de integral definida. Relatamos, neste artigo, uma experiência desenvolvida junto a 25 estudantes do curso de Engenharia Química de uma instituição de ensino superior pública e federal do Rio Grande do Sul, matriculados na disciplina de Cálculo A. A Resolução de Problemas de George Polya foi considerada como aporte teórico e metodológico. O estudo teve uma abordagem qualitativa em que as produções dos alunos foram analisadas e organizadas em duas categorias: conhecimentos mobilizados pelos alunos em relação ao conceito de integral definida e dificuldades apresentadas por eles na resolução dos problemas. Os resultados evidenciaram que os problemas propostos contribuíram para a compreensão do conceito de integral definida e da importância dos conhecimentos da Matemática para entender os fenômenos e as teorias associadas à formação profissional, tornando o conteúdo mais significativo para o aluno e despertando o interesse e uma participação ativa nas aulas de Cálculo.

Palavras-chave: Integral definida; resolução de problemas; interdisciplinaridade; Cálculo; Físico-Química.

ABSTRACT

This study investigates how problem-solving, based on the interdisciplinary relation between Calculus and Physical Chemistry, contributes to the teaching and learning of the concept of the definite integral. We report, in this paper, an experience carried out with 25 students enrolled in the course of Calculus A from the Chemical Engineering program in a Federal Higher Education institution in the State of Rio Grande do Sul. The theoretical and methodological contribution of the Resolution of Problems by George Polya is the foundation of this study, which has a qualitative approach. The students' production was analyzed and organized into two categories: knowledge mobilized by students concerning the concept of definite integral and difficulties in problem solving. The results showed that the proposed problems contributed to comprehending the definite integral concept as well as the importance of Mathematics for understanding the phenomena and theories associated with professional training, making the content more meaningful for the students, arousing interest, and active participation in Calculus classes.

***Keywords**: Definite integral; problem solving; interdisciplinarity; calculus; physicochemical.*

[1] Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Santa Maria/RS – Brasil. E-mail: janicerachelli@gmail.com
[2] E-mail: vania_denardi@hotmail.com
[3] E-mail: vanildebisognin@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral constitui-se em uma ferramenta poderosa de trabalho para cursos de engenharias e ciências em geral, cujas aplicações não se limitam a problemas padronizados apresentados em livros didáticos para a aprendizagem de conceitos e técnicas matemáticas. Para a Engenharia, torna-se necessário a aplicação de conhecimentos matemáticos para lidar com situações que atentam a problemas a serem resolvidos pelos estudantes (SOARES; LIMA; SAUER, 2004), problemas esses integrados "àqueles conteúdos das disciplinas específicas e profissionalizantes do curso e contextualizado ao futuro cotidiano profissional daquele que está sendo formado." (LIMA *et al.*, 2019, p.7). Lima (2015) defende a necessidade da construção de uma identidade própria para o Cálculo Diferencial e Integral, levando em conta as exigências e os objetivos específicos de cada curso.

No entanto, o que se observa é que ainda hoje as disciplinas de Cálculo, geralmente, são tratadas de forma independente das disciplinas específicas, provocando assim, uma dissociação entre as disciplinas básicas da área de Matemática e àquelas da área específica de cada curso. Como consequência observa-se que o conhecimento adquirido pelos estudantes pode ser útil para resolver exercícios rotineiros, porém quando eles enfrentam contextos e situações que requerem maior conhecimento conceitual, a maioria falha e não sabe como abordar a situação. (SELDEN; SELDEN; MASON, 1994). Nas disciplinas de Cálculo é importante não apenas prover o aluno de técnicas para que ele utilize na obtenção de respostas corretas aos problemas apresentados, mas que ele efetivamente compreenda determinado conceito, bem como outros relacionados a ele, "seus significados para o campo de conhecimento em questão, suas aplicações na própria Matemática e em outras áreas." (LIMA, 2015, p.6).

O Cálculo tem sido um dos maiores responsáveis pela não aprovação e evasão de estudantes desde o primeiro ano da Universidade. As causas deste baixo desempenho são notadas por alguns pesquisadores que evidenciam a formação deficiente no ensino básico (MARINI, 2014); métodos tradicionais de ensino que estão centrados em instruções expositivas dos professores e em práticas algorítmicas e algébricas (MENDES; BURIASCO, 2018; MORENO, 2005); dificuldades de natureza epistemológica (RESENDE, 2003) e inerentes aos próprios conceitos (BARUFFI, 1999; SILVA, 2011), dentre outros, como alguns dos obstáculos geradores de altos índices de reprovação.

Segundo Alvarenga, Dorr e Vieira (2016) várias iniciativas têm sido buscadas como forma de qualificar a aprendizagem do Cálculo; essas iniciativas "revelam a preocupação de uma comunidade de acadêmicos com as consequências dos altos índices de reprovação e o desejo de se encontrarem caminhos que promovam a aprendizagem." (p.55). Diferentes abordagens didático-pedagógicas "que visam atender à personalização da educação dos estudantes, ao aperfeiçoar o aproveitamento do tempo das aulas e ao melhorar o rendimento dos mesmos no que refere à aprendizagem" (ELMÔR FILHO *et al.*, 2019, p.8), têm sido investigadas.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia - Parecer CNE/CES nº: 1/2019, o aprendizado baseado em atividades, "que exijam conhecimentos interdisciplinares, são alguns dos instrumentos que podem ser acionados para elevar a melhoria do ensino e para combater a evasão escolar." (BRASIL, 2019a, p.30).

A resolução de problemas no ensino de Cálculo pode ser vista como uma estratégia que não só permite aplicar técnicas para a solução de um problema, como também constituir-se de um meio para apresentar e construir conhecimentos. Ela possibilita transformar a sala de aula em um ambiente de aprendizagem que permite ao estudante encontrar, por si mesmo, com a ajuda e orientação do professor, o significado dos conceitos matemáticos envolvidos. (POLYA, 2006).

Ao trabalhar com pesquisas relacionadas ao ensino de Matemática em cursos de Engenharia, Camarena (2017) afirma que problemas que desempenham papéis integradores entre disciplinas matemáticas e não-matemáticas em cursos de Engenharia, devem ser concebidos e utilizados em sala de aula. Em sua teoria, chamada *A Matemática no Contexto das Ciências*, a autora estabelece que na fase didática, deve-se buscar uma abordagem interdisciplinar da Matemática e contextualizada nas futuras áreas de atuação profissional do estudante. Segundo a pesquisadora, as demais ciências que o aluno estuda constituem-se fontes para a formulação de problemas contextualizados. A contextualização da Matemática, a que a teoria se refere, não é a ideia, de um modo geral, difundida atualmente nos discursos de professores e estudantes de abordar conceitos matemáticos por meio de situações do dia a dia; os contextos explorados "são aqueles referentes às disciplinas não-matemáticas presentes nos currículos de diferentes habilitações de Engenharia ou, especialmente, aqueles oriundos de situações enfrentadas pelos engenheiros em seus cotidianos profissionais." (LIMA *et al*., 2019, p.6).

Por outro lado, as próprias Diretrizes Curriculares para o Ensino de Engenharia - Parecer CNE/CES nº: 1/2019 preconizam e recomendam que nos cursos de Engenharia sejam trabalhadas questões relativas ao processo de aprendizagem centrado no estudante, ao trabalho colaborativo, à interdisciplinaridade, à formação integral do estudante e à autonomia, ou seja, problemas interdisciplinares devem estar presentes na formação do engenheiro.

Neste sentido, é que propomos esta pesquisa, com o objetivo de investigar como a resolução de problemas, com base na interdisciplinaridade entre o Cálculo e a Físico-Química, contribui para o ensino e aprendizagem do conceito de integral definida. Para tanto, selecionamos problemas no contexto da disciplina de Físico-Química e desenvolvemos uma sequência de atividades junto a 25 estudantes do curso de Engenharia Química de uma instituição de ensino superior pública e federal do Rio Grande do Sul, matriculados na disciplina de Cálculo A.

Destacamos que, ao tratar sobre investigações realizadas pelos membros do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior GT04 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, no que se refere ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, os pesquisadores Lima, Bianchini e Gomes (2017), observaram que há uma predominância de estudos sobre a derivada, enquanto há um número bastante reduzido a respeito do estudo de integrais, sendo necessário que mais pesquisas sobre o assunto sejam realizadas.

Por outro lado, Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) indicam que pesquisas que examinam de perto como as ideias do Cálculo estão presentes em conceitos tratados nas áreas da Engenharia, Física, Biologia e Química são necessárias. Desta forma, podemos verificar se os estudantes entendem a matemática presente nas aplicações e compreendem as relações entre todos os elementos que configuram o Cálculo.

2. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A pesquisa sobre resolução de problemas teve início nos estudos de George Polya, considerado o pai da Resolução de Problemas. Em seu trabalho, Polya (2006) defende uma proposta de ensino sobre diferentes heurísticas e passos na resolução de problemas. O enfoque principal desta proposta era o de descobrir como resolver problemas e ensinar a enxergar caminhos para resolver problemas. Segundo Polya (2006), o professor que "desafia a curiosidade dos alunos apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes alguns meios para alcançar este objetivo" (p.v).

O método estabelecido por Polya (2006) compreende quatro fases para a resolução de um problema, as quais são descritas a seguir:

1. Compreender o problema – é necessário inicialmente perceber quais são os dados; ver como os diversos itens estão relacionados; como a incógnita está relacionada aos dados.

2. Estabelecimento de um plano – temos um plano quando conhecemos quais são as contas, os cálculos, os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita.

3. Execução do plano – para a resolução do problema, por meio do plano estabelecido, é preciso, além de conhecimentos anteriores, utilizar hábitos mentais e concentração no objetivo a ser atingido. É importante que o professor insista para que o aluno verifique cada passo que foi estabelecido no plano.

4. Reflexão - após chegar à solução do problema e tendo escrito sua resolução, uma fase importante é fazer a reflexão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o que levou até este. Nesta fase é possível ao aluno consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas.

Após as ideias de Polya, novas propostas sobre a resolução de problemas para o ensino e aprendizagem de Matemática surgiram mundialmente e inclusive no Brasil. O foco, nessa fase, "foi colocado sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas." (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.78). Há diferentes concepções sobre a resolução de problemas no ensino da Matemática. Para Schroeder e Lester (1989), a atividade de resolver problemas envolve três concepções: ensinar para resolver problemas; ensinar sobre a resolução de problemas e ensinar através da resolução de problemas.

Ao ensinar para resolver problemas, o professor ensina o conteúdo matemático, para depois apresentar alguns problemas para o estudante. A concepção de estudar sobre a resolução de problemas está centrada nos procedimentos e métodos que o aluno utiliza para resolver problemas. Nesta abordagem, podem-se utilizar as quatro fases descritas por Polya (2006) para a resolução de problemas, as quais devem auxiliar os alunos a compreender o problema e a dispor de recursos para resolvê-lo. Por último, ensinar através da resolução de problemas é considerado uma metodologia de ensino que consiste em um caminho para se ensinar matemática e não apenas para ensinar a resolver problemas.

Para a nossa pesquisa, usamos uma mescla das três abordagens indicadas por Schroeder e Lester (1989), com o propósito de fazer uso de problemas que propiciem aos estudantes desenvolver a compreensão de conceitos e técnicas do cálculo de integrais para resolver problemas no contexto da Físico-Química. No trabalho em sala de aula, optamos em seguir os passos estabelecidos por Polya sobre a resolução de problemas como forma de fazer com que o aluno realize seu estudo de maneira autônoma e que o conhecimento construído faça mais sentido para ele.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia da pesquisa utilizada nesta investigação é de abordagem qualitativa. De acordo com Creswell (2014), na pesquisa qualitativa a coleta de dados ocorre no contexto natural dos participantes, a análise dos dados estabelece padrões e o relatório final inclui as vozes dos sujeitos, a reflexão, descrição e interpretação do problema pelo pesquisador, além de sua contribuição para a literatura.

Os participantes desta pesquisa são 25 estudantes do curso de Engenharia Química de uma instituição de ensino superior pública e federal do estado do Rio Grande do Sul, matriculados na disciplina de Cálculo A. Essa disciplina contempla o estudo de limites, derivadas e integrais de funções de uma variável real.

A coleta de dados foi realizada a partir do desenvolvimento de uma sequência de atividades, em sala de aula, com o uso de problemas elaborados no contexto da Físico-Química, nos quais foram abordados os conceitos de trabalho, pressão externa, calor total, capacidade calorífica, energia total e probabilidade de um elétron estar em certa região. Os dados foram coletados por uma das professoras pesquisadoras, responsável pela disciplina, por meio dos registros dos alunos nos problemas propostos e das anotações no diário de campo.

Apresentamos neste artigo três problemas que foram planejados e desenvolvidos com os estudantes. Esses problemas foram retirados, com algumas adaptações, de BALL (2014) e para resolvê-los o estudante precisa usar o conceito e as propriedades de integral definida, os procedimentos de cálculo de primitivas de funções e o Teorema Fundamental do Cálculo.

O desenvolvimento da sequência de atividades ocorreu em duas aulas de 2 horas/aula cada, sendo que em uma delas foram propostos os problemas 1 e 2, os quais utilizam o cálculo de integrais imediatas e, em outra, após o estudo de integrais de funções trigonométricas foi proposto o Problema 3. Os problemas estão apresentados, junto com a análise, na próxima seção.

Na busca da solução dos problemas propostos, ao longo das discussões dos alunos, reunidos em grupos, procuramos observar os conhecimentos mobilizados pelos estudantes durante a realização do trabalho e, ao mesmo tempo, as dificuldades apresentadas. Assim, a partir das discussões em grupos e dos dados obtidos, surgiram os seguintes aspectos de análise: quais os conhecimentos mobilizados e desenvolvidos por eles, relacionados aos conceitos de integral definida envolvidos nos problemas e quais as dificuldades apresentadas na resolução dos problemas. Também, procuramos analisar as possibilidades que a metodologia de Resolução de Problemas pode oferecer para qualificar a aprendizagem dos estudantes.

4. ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

Apresentamos, nesta seção, uma descrição de como os alunos resolveram os problemas juntamente com as análises das suas produções, apontando os principais aspectos identificados, bem como os resultados alcançados. Esta análise, como mencionado anteriormente, contempla duas categorias que estão relacionadas aos conhecimentos mobilizados pelos alunos em relação à construção do conceito de integral definida e às dificuldades apresentadas por eles na resolução dos problemas.

Cabe destacar que antes da resolução dos problemas os alunos já haviam estudado, por meio de aula expositiva, de exemplos e de resolução de exercícios, os conceitos de primitiva, de integral indefinida e integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo.

A ideia de trabalhar problemas interdisciplinares surgiu do fato de saber que os estudantes estavam cursando a disciplina de Físico-Química concomitante com Cálculo A. Assim, esta proposta de trabalho insere-se no que preconiza os documentos que versam sobre o ensino de Engenharia no Brasil ao se referir a atividades que tratam de conhecimentos interdisciplinares. (BRASIL, 2019b).

Inicialmente, procuramos orientar os estudantes para que seguissem as etapas sugeridas por Polya (2006) para a resolução dos problemas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e refletir sobre a resolução.

O Problema 1 aborda a relação entre o conceito de trabalho, pressão interna e externa, conhecendo-se o volume inicial e final.

Problema 1. Sabendo que p_{ext} é a pressão externa, V_i é o volume inicial e V_f é o volume final, a quantidade total de trabalho w pressão-volume quando um sistema muda de volume pode ser expresso por

$$\boxed{w = -\int_{V_i}^{V_f} p_{ext} dV}$$

Fonte: BALL, 2014, p. 26 (Adaptado).

a) Se a pressão externa é constante, encontre o trabalho w.

b) Se a pressão externa for igual a pressão interna, então $p_{ext} = p_{int} = \frac{nRT}{V}$ (lei do gás ideal) em que n e R são constantes e T é a temperatura. Determine o trabalho w supondo que a temperatura permanece constante.

Em (a) é considerada a pressão externa p_{ext} constante e em (b) como sendo $p_{ext} = p_{int} = \frac{nRT}{V}$. Para resolver este problema o estudante deve substituir a pressão externa na integral e resolvê-la utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, propriedades e fórmulas de integração: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)d$, $\int_a^b kdx = k(b-a)$ e $\int_a^b \frac{1}{x}dx = ln|x|]_a^b$, sendo k uma constante, f uma função integrável e a e b os limites de integração.

Após a leitura do problema, feita individualmente, os alunos foram questionados sobre de que se tratava o problema e qual seria um plano para resolvê-lo. A resolução do Problema 1, realizada por três estudantes, dois em (a) e outro em (b), está apresentada na Figura 1.

Figura 1 – Resolução do Problema 1.

$$a) -P_{ext}\int_{V_i}^{V_f} dV = -P_{ext}\cdot V\Big]_{V_i}^{V_f} = \boxed{-P_{ext}\cdot \overbrace{(V_f - V_i)}^{\Delta V}}$$

$$a) \; -P(ext)\int_{V_i}^{V_F} dV = -P\int V_F - V_i$$

$$b) \; w = -\int_{V_i}^{V_F} \frac{nRT}{V}\cdot dV \qquad w = -nRT\int_{V_i}^{V_F}\frac{dV}{V}$$

$$w = -nRT\cdot \ln V\Big]_{V_i}^{V_F} \qquad w = -nRT\cdot(\ln V_F - \ln V_i)$$

$$w = -nRT\cdot \ln\left(\frac{V_F}{V_i}\right)$$

Fonte: Dados da pesquisa.

O que podemos inferir sobre a resolução do Problema 1, apresentada na Figura 1, é que os estudantes, de modo geral, compreenderam o problema e após utilizaram teorias, procedimentos e métodos do Cálculo, de forma coerente, para resolvê-los.

No que se refere aos conhecimentos mobilizados em relação à exploração do conceito de integral definida, em (a), foi possível identificar que o aluno fez uso de uma propriedade de integração, estabeleceu a relação entre a função constante e sua primitiva e, em seguida, utilizou o Teorema Fundamental do Cálculo, para determinar o trabalho W solicitado. Observamos, também, que ele mobilizou conhecimentos em relação ao conceito de incremento, uma vez que indicou que $(V_f - V_i)$ é ΔV, fato observado na maioria das respostas dos 25 estudantes, e que deve ser usual utilizar na disciplina de Físico-Química.

Quanto às dificuldades apresentadas na resolução do item (a), percebemos a falta de rigor com a escrita matemática, visto que um dos alunos continuou utilizando o sinal de integração mesmo após ter realizado esta operação.

Na resolução de (b), dentre os conhecimentos mobilizados podemos destacar: propriedades e fórmulas de integração, Teorema Fundamental do Cálculo e propriedades de logaritmos, dado que o aluno, após substituir a função pressão externa, colocou a constante fora do sinal de integração, determinou a primitiva da função dada por $\frac{1}{V}$, substituiu os limites de integração e ainda simplificou sua resposta, obtendo $w = -nRT\cdot\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$.

Cabe destacar que, em (b), observamos dificuldades, que foram apresentadas por cinco estudantes, para estabelecer a relação entre a função $f(v) = \frac{1}{v}$ e sua primitiva, $F(v) = \ln v$. Além disso, a análise dos dados revelou dificuldades ao lidar com as propriedades de logaritmos. Dois alunos escreveram $w = -nRT \cdot (\ln V_f - \ln V_i) = -nRT \cdot \ln(V_f - V_i)$, o que é um equívoco.

O Problema 2 envolve os conceitos de calor total e capacidade calorífica, conhecendo-se a temperatura inicial e final do sistema.

> **Problema 2**. Em um sistema, o calor total é dado por
>
> $$q_V = \int_{T_i}^{T_f} C_V dT = \Delta U$$
>
> Fonte: BALL, 2014, p. 40.
>
> em que C_V é a capacidade calorífica a volume constante do sistema, T_i é a temperatura inicial, T_f é a temperatura final e U é a energia total do sistema. Para n mols de gás, $C_V = n\overline{C_V}$, sendo $\overline{C_V}$, a capacidade calorífica molar.
> Avalie ΔU para um mol de oxigênio, O_2, indo de -20°C (253K) até 37°C (310K) a volume constante nos seguintes casos:
>
> a) É um gás ideal com $\overline{C_V} = 20{,}78\, J/mol \cdot K$.
>
> b) É um gás real com $\overline{C_V} = 21{,}6 + (4{,}18 \times 10^{-3})T - (1{,}67 \times 10^{5})/T^2$ determinado experimentalmente.

Para resolvê-lo, o aluno deve substituir a capacidade calorífica e resolver a integral. Neste problema torna-se necessário usar propriedades já citadas para a resolução do Problema 1, além da propriedade $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, sendo f e g funções integráveis e a e b os limites de integração, e das fórmulas de integração: $\int_a^b x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_a^b$ e $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \left.-\frac{1}{x}\right]_a^b$.

Embora o Problema 2 trate de outro conceito de Físico-Química, o de calor total, sua resolução é semelhante ao que foi feito no Problema 1. Sendo assim, os alunos tiveram facilidade em compreender o que deveria ser feito para resolvê-lo. A resolução realizada por dois estudantes, um em (a) e outro em (b) pode ser visualizada na Figura 2.

Na resolução do item (a), em se tratando dos conhecimentos mobilizados, observamos que os alunos compreenderam as propriedades da integral definida, da relação entre a função constante e sua primitiva e do Teorema Fundamental do Cálculo, visto que todos chegaram à resposta que $q_v = 1.184{,}46$. No entanto, destacamos que alguns não utilizaram a unidade de medida para o calor total e outros se equivocaram ao considerar J/mol (como na Figura 2), ou $J/mol \cdot K$, quando deveria ser J, visto que, $q_V = \int_{T_i}^{T_f} C_V dT$, sendo $C_V = n\overline{C_V}$ com n em mol e $\overline{C_V}$ em $J/mol \cdot K$, ou seja, alguns alunos demonstraram falta de rigor com a escrita matemática, enquanto outros revelaram dificuldades na identificação da unidade de medida da grandeza em questão.

Figura 2 – Resolução do Problema 2.

$$a)\ qV = \int_{V_i}^{V_f} 20{,}78\, dT \quad qV = 20{,}78 \int_{V_i}^{V_f} dT \quad qV = 20{,}78\, T \Big|_{T_i}^{T_f} \quad qV = 20{,}78\,(T_f - T_i)$$

$$qV = 20{,}78\,(310 - 253) \quad \boxed{qV = 1184{,}46\ J/mol}$$

$$b)\ qV = \int_{T_i}^{T_f} \left(21{,}6 + (4{,}18 \times 10^{-3})T - (1{,}67 \times 10^{5}).T^{-2}\right) dT$$

$$= \int_{T_i}^{T_f} 21{,}6 . dT + \int_{T_i}^{T_f} 4{,}18 \times 10^{-3} . dT - \int_{T_i}^{T_f} 1{,}67 \times 10 . dT$$

$$= 21.6T + 4{,}18 \times 10^{-3} \frac{T^2}{2} - \frac{1{,}67 \times^{-1}}{-1} , \Big]_{253}^{310}$$

$$= \left(21{,}6 . 310 + 4{,}18 . 10^{-3} . \frac{310^2}{2} - 1{,}67 . 10^{-5} . \frac{310^{-1}}{-1}\right) -$$

$$\left(21{,}6 . 253 + 4{,}18 . 10^{-3} . \frac{253^2}{2} - 1{,}67 . 10^{-5} \frac{253}{-1}\right)$$

$$qV: (6696 + 200.849 . 10^{3} + 5{,}39\ 10^{-8}) - (546{,}48 + 13.3778{,}81 + 6{,}6 . 10^{-8})$$

$$qV: (7435{,}55) - (6258{,}65)$$

$$\boxed{qV: 1.176{,}89\ J}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução feita em (b) do Problema 2, nos mostra que o estudante utilizou a propriedade da integral da soma de funções e as fórmulas de integrais imediatas, o Teorema Fundamental do Cálculo e obteve o resultado correto para o calor total de acordo com os dados fornecidos no problema. Porém, em sua escrita, na segunda linha, faltou T e T^{-2}, na segunda e terceira integrais, respectivamente e, usou a letra x ao indicar a integral de T^{-2} como sendo $\frac{x^{-1}}{-1}$, ao invés de $\frac{T^{-1}}{-1}$. Isto não significa que o aluno não tenha compreendido o problema ou que não tenha conseguido executar seu plano para a resolução dele; apenas faltou usar corretamente a escrita na sua solução. Podemos observar que ele mobilizou conhecimentos construídos anteriormente sobre o cálculo de integrais e cálculos algébricos e numéricos ao resolvê-lo corretamente.

No entanto, quando olhamos para o total de participantes, somente 7 dos 25 alunos chegaram à resposta correta. A análise das resoluções revelou que muitos alunos tiveram dificuldades na resolução da integral $\int_{T_i}^{T_f}(21{,}6 + (4{,}18 \times 10^{-3})T - (1{,}67 \times 10^{5})/T^{2})dT$, utilizada para determinar o calor total em (b), e, mesmo tendo feito o cálculo da integral correto, não obtiveram êxito nos cálculos numéricos. Cabe destacar que os cálculos, bastante trabalhosos, foram realizados com o auxílio da calculadora em seus celulares. Este fato foi amplamente discutido com os alunos de forma que eles compreendessem a necessidade de atender à hierarquia nas operações com os números reais, independente de fazer os cálculos manualmente ou com o uso de uma calculadora.

Alertamos aos alunos que, sempre na resolução de um problema, é necessário fazer uma reflexão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, como forma de perceber se a resolução está correta ou se contém erros. Esta é a quarta etapa da resolução de problemas, que para Polya (2006) consiste em uma "fase importante e instrutiva do trabalho da resolução" (p.12) e serve para que os alunos consolidem o seu conhecimento e aperfeiçoem a sua capacidade de resolver problemas.

Conforme já citado, após o estudo de integrais de funções trigonométricas, foi proposto o Problema 3. Tal problema trata de a probabilidade de um elétron estar em certa região, conhecendo-se a função de onda unidimensional, tendo por base a interpretação do cientista Max Born.

Problema 3. O cientista alemão Max Born (1882-1970) afirmou que a probabilidade P de um elétron estar em certa região entre dois pontos a e b no espaço é, especificamente,

$$P = \int_a^b \Psi^* \Psi \, d\tau$$

onde Ψ^* é o complexo conjugado de Ψ, sendo Ψ a função de onda e $d\tau$, o infinitésimo a ser integrado (BALL, 2014). Usando a interpretação de Born para um elétron que tem uma função de onda unidimensional $\Psi = \sqrt{2} sen(\pi x)$ para $0 < x < 1$, calcule a probabilidade do elétron estar entre

a) $x = 0$ a $0{,}5$.

b) $x = 0{,}25$ a $0{,}75$.

Para encontrar a probabilidade, o estudante deve substituir a função de onda Ψ na integral definida e considerar os dois intervalos com x da a até b. Com a função $\Psi = \sqrt{2} sen(\pi x)$, a integral a ser calculada é $\int_a^b 2 \cdot \text{sen}^2(\pi x) dx$. Uma das formas de resolver esta integral é utilizar a identidade trigonométrica $\text{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$, usar as propriedades já citadas anteriormente neste artigo e que $\int_c^d \cos(u) \, du = \text{sen}(u)]_c^d$. O cálculo da integral também pode ser feito usando a técnica de integração por partes: $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x) dx$.

Os estudantes tiveram facilidade na compreensão do problema, substituindo a função de onda na integral que representa a probabilidade.

No que tange aos conhecimentos mobilizados em relação ao conceito de integral definida, podemos destacar que, de um modo geral, os alunos estabeleceram a relação entre a função trigonométrica $f(u) = \cos u$ e sua primitiva, pois o cálculo da integral trigonométrica foi realizado com facilidade.

No que se refere às dificuldades apresentadas na resolução do Problema 3, destacamos que houve alguns equívocos, como o que pode ser visto na Figura 3, em que o estudante, ao resolver a integral $\int \cos u \, du$, escreve $-\text{sen}\, u$, ao invés de $\text{sen}\, u$ e mantém os limites de integração, mesmo feito uma mudança de variáveis. Ao substituir $u = 2\pi x$, os limites ficam corretos, porém sua resposta é $x]_a^b + \frac{1}{2\pi} \text{sen}(2\pi x)]_a^b$, quando deveria ser $x]_a^b - \frac{1}{2\pi} sen(2\pi x)]_a^b$. Isto revela que os estudantes apresentaram dificuldades nos procedimentos de cálculo de integrais envolvendo funções trigonométricas e com a técnica de integração por substituição algébrica.

Figura 3 – Resolução do Problema 3.

$$\int_a^b \sqrt{2}\cdot sen(\pi x)\cdot\sqrt{2}\, sen(\pi x)\,dx = \int_a^b 2\cdot sen^2(\pi x)\,dx = 2\int_a^b sen^2(\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_a^b \frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\,dx = \frac{2}{2}\int_a^b 1-\cos(2\pi x)\,dx = \int_a^b 1\,dx - \int_a^b \cos(2\pi x)\,dx$$

$$= x\Big]_a^b - \int_a^b \cos u\cdot\frac{du}{2\pi} = x\Big]_a^b - \frac{1}{2\pi}(-sen\,u)\Big]_a^b = x\Big]_a^b + \frac{1}{2\pi}\cdot sen(2\pi x)\Big]_a^b$$

a. $x\Big]_0^{0{,}5} + \frac{1}{2\pi}\cdot sen(2\pi x)\Big]_0^{0{,}5}$

$$=(0{,}5-0)+\frac{1}{2\pi}\left[sen(2\pi\cdot 0{,}5)-sen(2\pi\cdot 0)\right] = 0{,}5+\frac{1}{2\pi}\cdot(0-0) = 0{,}5$$

b. $x\Big]_{0{,}25}^{0{,}75} + \frac{1}{2\pi}\cdot sen(2\pi x)\Big]_{0{,}25}^{0{,}75} = 0{,}75-0{,}25+\frac{1}{2\pi}\left[sen(2\pi\cdot 0{,}75)-sen(2\pi\cdot 0{,}25)\right]$

$$=0{,}5+\frac{1}{2\pi}\left[sen\left(\frac{3}{2}\pi\right)-sen\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right]=0{,}5+\frac{1}{2\pi}\left[-1-1\right]=0{,}5+\frac{1}{2\pi}\left[-2\right]$$

$$=0{,}5-\frac{1}{\pi} = 0{,}181$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Pela Figura 3, podemos observar que o aluno, inicialmente, resolveu a integral definida, para após em (a) substituir os limites $a = 0$ e $b = 0{,}5$ e em (b), $a = 0{,}25$ e $b = 0{,}75$, obtendo resposta correta em (a), visto que o erro de sinal não alterou o valor, porém, em (b), quando a resposta deveria ser $0{,}5 + \frac{1}{\pi} = 0{,}818\ldots$, ele obteve $0{,}5 - \frac{1}{\pi} = 0{,}181$.

Ao analisarmos todas as resoluções dos alunos, obtivemos, como resposta para (b), 15 respostas com probabilidade iguais a $0{,}818$ ou $0{,}81$, consideradas corretas e 10 respostas iguais a $0{,}181$. Nas respostas incorretas, o erro se deu, principalmente, pelo trato com os sinais. Todas as respostas para (a) estavam corretas, visto que o erro cometido no sinal, por alguns alunos, não alterou o resultado. Com a resolução feita, os alunos concluíram que a probabilidade de o elétron estar no intervalo $[0.25, 0.75]$ é maior que a do intervalo $[0, 0.5]$.

Ainda quanto às dificuldades apresentadas destacamos que na fase da execução do plano foi necessário auxiliar os estudantes no que tange aos valores das funções trigonométricas e às identidades trigonométricas, visto que muitos não conseguiram resgatar os conhecimentos que tinham sobre esse assunto e, não sabiam, por exemplo, o valor da função seno em arcos notáveis, bem como a identidade $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$. Por meio da resolução de problemas, os estudantes passam a compreender como determinadas ideias matemáticas estudadas anteriormente são necessárias quando resolvem um problema. (SCHROEDER; LESTER, 1989).

A partir dos resultados aqui discutidos, organizamos o Quadro 1 que apresenta uma síntese dos principais aspectos identificados nas duas categorias elencadas.

Quadro 1 – Síntese dos resultados.

Categorias	**Principais aspectos identificados**
Conhecimentos mobilizados pelos alunos em relação ao estudo da integral definida.	• Propriedades da integral definida: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ • Fórmulas de integrais imediatas: $\int kdx = kx + c$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$ • Teorema Fundamental do Cálculo: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ • Propriedade dos logaritmos: $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ • Conceito de incremento: $\Delta V = V_f - V_i$ • Cálculos algébricos e numéricos.
Dificuldades apresentadas na resolução dos problemas.	• Na escrita matemática • Nos cálculos numéricos • No reconhecimento da unidade de medida para o calor • Na técnica de integração por substituição algébrica • Na resolução da integral $\int \frac{dv}{v} = \ln v + c$ • No valor da função seno em arcos notáveis • Na identificação da identidade trigonométrica: $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Conforme podemos observar no Quadro 1, a análise dos dados revelou diferentes conhecimentos mobilizados e dificuldades apresentadas pelos estudantes ao resolverem os problemas propostos. No que se refere aos conhecimentos mobilizados e desenvolvidos pelos estudantes, foi possível identificar, que eles tinham como conceito estabelecido que a operação de integração é a inversa da operação de derivação e que para resolver a integral é necessário obter a primitiva das funções integrandos. Cabe destacar que todas as funções abordadas nos problemas propostos possuíam primitivas e para resolver os problemas era necessário utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Diante do exposto, podemos afirmar que a análise desenvolvida, a partir das resoluções dos alunos e das anotações no diário de campo, forneceu indícios de que houve aprendizagem dos conceitos associados ao estudo da integral. Ademais, foi possível perceber que o uso de problemas interdisciplinares, como os propostos, pode facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos entre si e suas relações com outras áreas de conhecimentos, visto que os estudantes se sentiram motivados em trabalhar, na disciplina de Cálculo, com problemas tratados na Físico-Química e resolveram, de forma correta, a maioria dos problemas apresentados, dando mais significado aos conceitos matemáticos envolvidos.

Além disso, na medida em que os estudantes seguiram as fases propostas por Polya (2006), foi possível constatar que a metodologia de Resolução de Problemas contribuiu para a melhoria do ensino e da aprendizagem do conceito de integral definida. A compreensão do que trata o problema e quais são os conhecimentos necessários para a sua resolução, para após estabelecer e executar o plano de resolução e, por último, fazer uma reflexão, constituem-se passos fundamentais para que o aluno avalie a sua resolução e possa efetuar possíveis correções para chegar à resolução correta do problema.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo apresentamos um relato de experiência com os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo investigar como a resolução de problemas, com base na interdisciplinaridade entre o Cálculo e a Físico-Química, contribui para o ensino e aprendizagem do conceito de integral definida.

Ao levar em conta as vozes dos estudantes, acreditamos que o trabalho desenvolvido, tenha favorecido a compreensão de que estudar integrais não é só aplicar fórmulas e técnicas, mas que vai além e envolve o que realmente está intrínseco neste conceito, que é fundamental para o desenvolvimento das ciências. Trabalhos desta natureza servem para mostrar ao aluno que o conceito de integral definida está associado à sua área de estudo e atuação, não servindo apenas para determinar áreas, comprimento de arcos e volumes, o que é usualmente enfatizado em disciplinas básicas de Cálculo.

Acreditamos que os problemas propostos serviram para envolver os estudantes em atividades para pensar sobre a matemática que eles precisam aprender para compreender fenômenos e teorias associados à sua formação profissional. O estudo de integrais, por meio da interdisciplinaridade, tornou o conteúdo mais significativo para o aluno, despertando o interesse e uma maior participação nas aulas de Cálculo.

Neste trabalho, os problemas propostos e desenvolvidos tiveram um papel central, pois possibilitaram aos estudantes a retomada de conceitos matemáticos prévios e o estabelecimento de relações entre os conceitos da disciplina de Cálculo e da Físico-Química. Além disso, o modo como esses problemas foram trabalhados, com os estudantes reunidos em pequenos grupos, possibilitou discussões ricas entre os pares, além de uma vivência diferenciada do trabalho em sala de aula.

De tal modo, entendemos que problemas contextualizados, vinculados às disciplinas que o aluno estuda, devem fazer parte das disciplinas matemáticas para cursos de engenharias e ciências em geral, e que pesquisas futuras, com outros conceitos matemáticos, possam ser realizadas, para avaliar o desempenho dos estudantes considerando dois grupos de estudo, um deles utilizando a resolução de problemas contextualizados e outro com problemas tradicionais.

Por fim, salientamos que, após a implementação da sequência de problemas interdisciplinares, o estudo poderia avaliar a aprendizagem de conceitos relacionados à integral definida em outras situações-problemas. Entendemos este fato como limitações deste estudo, visto que só avaliamos a compreensão e resolução de problemas que foram tratados e discutidos em pequenos grupos de estudantes com o auxílio do professor.

6. REFERÊNCIAS

ALVARENGA, K. B.; DORR, R. C.; VIEIRA, V. R. O ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. **Revista Brasileira de Educação Superior**, Passo Fundo, v.2, n.4, p.46-57, 2016.

BALL, D. W. **Físico-Química**. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 195 f. Tese (Programa de Pós-graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**. Parecer CNE/CES nº: 1/2019. Aprovado em 23/01/2019. Brasília: Ministério da Educação, Conselho Nacional de Educação, 2019a.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**. Resolução CNE/CES nº: 1/2019. Aprovado em 24/04/2019. Brasília: Ministério da Educação, Conselho Nacional de Educação, Câmara de Educação Superior, 2019b.

CAMARENA, P. Didáctica de la Matemática en Contexto. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.2, p.1-26, 2017.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa**: escolhendo entre cinco abordagens. Porto Alegre: Penso, 2014.

ELMÔR FILHO, G. *et al*. **Uma nova sala de aula é possível**: aprendizagem ativa na educação em engenharia. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. Cálculo e Análise: mapeamento das pesquisas do GT04 - Educação Matemática no Ensino Superior. **VIDYA**, Santa Maria, v.37, n.2, p.314-334, 2017.

LIMA, G. L. *et al*. O modelo didático da Matemática em Contexto como possibilidade para um ensino de Matemática consonante às novas Diretrizes Curriculares Nacionais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 47., 2019, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: ABENGE, 2019, p.1-9.

LIMA, G. L. Em busca de uma identidade para a disciplina de Cálculo: primeiras reflexões. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais...** Pirenópolis: Pousada dos Pirineus, 2015. p.1-12.

MARINI, W. **Um panorama de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral**: 2003 a 2013. 2014. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

MENDES, M. T.; BURIASCO, R. L. C. A utilização da prova em fases como recurso de ensino em aulas de Cálculo. **RPEM-Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.7, n.14, p.39-53, 2018.

MORENO, M. M. M. El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. In: SIMPÓSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EM EDUCATIÓN MATEMÁTICA, 9., 2005, Córdoba. **Anais ...** Córdoba: Universidad de Córdoba, 2005. p.81-96.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v.25, n.41, p.73-98, 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM Mathematics Education**, Berlim, v.46, p.507-515, 2014.

RESENDE, W. M. **O Ensino do Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Programa de Pós-graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p.31-42.

SELDEN, J.; SELDEN, A; MASON, A. Even good Calculus students can't solve nonroutine problems. In: KAPUT, J. J.; DUBINSKY, E. **Research issues in undergraduate matemathics learning**. MMA 3, p.19-26, 1994.

SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem de Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.3, p.393-413, 2011.

SOARES, E. M. S.; LIMA, I. G.; SAUER, L. Z. Discutindo alternativas para ambientes de aprendizagem de Matemática para cursos de Engenharia. In: WORLD CONGRESS ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDUCATION, 2004, São Paulo. **Anais...** São Paulo: COPEC, 2004. p.1159-1162.

Submetido em: **17/03/2021**

Aceito em: **25/11/2021**