Revista Thema
v.21 | n.3 | 2022
p.920-941

DOI: http://dx.doi.org/10.15536/thema.V21.2022.920-941.2092
ISSN: 2177-2894 (online)

CIÊNCIAS HUMANAS

Construção Axiomática dos Números Racionais à Luz dos Três Mundos da Matemática: experiência com alunos de Licenciatura em Matemática

***The Axiomatic Construction of Rational Numbers in the Light of the Three Worlds of Mathematics**: an experience with undergraduate Mathematics students. undergraduate students*

Marcia Viaro Flôres[1], Vanilde Bisognin[2]

RESUMO

Os números racionais são trabalhados na Educação Básica, porém se questiona qual o lugar que ocupam nos cursos de licenciatura e qual abordagem é dada quando esse conteúdo é ministrado para futuros professores de matemática. Nesse contexto, o objetivo do trabalho é investigar como os princípios da teoria dos Três Mundos da Matemática, preconizada por David Tall, podem sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em matemática sobre conceitos relacionados aos números racionais e perceber quais resultados a proposta produz nas aprendizagens desses conceitos. Os sujeitos desse estudo são oito estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática. Essa pesquisa é qualitativa, sendo organizada com base em uma sequência de ensino fundamentada na teoria escolhida. Além do auxílio na construção das tarefas, a teoria também foi utilizada nas análises dos dados, os quais foram coletados por meio das produções dos estudantes. Com os resultados, percebeu-se que a maioria dos estudantes teve suas produções com características do Mundo Simbólico, com indícios do Mundo Formal, ilustrando, assim, a importância da construção axiomática dos números racionais na formação dos estudantes.

Palavras-chave: Ensino; aprendizagem; formação de professores.

ABSTRACT

Rational numbers are taught in Basic Education, but the question is what place they occupy in undergraduate courses and what approach is taken when this content is taught to future Mathematics teachers. In this context, this work aims to investigate how the principles of the theory of the Three Worlds of Mathematics, advocated by David Tall, can support a proposal for educating future Mathematics graduates on concepts related to rational numbers and to understand what results the proposal produces in the learning of these concepts. The subjects of this study are eight students from a Mathematics Undergraduate Course. This is a qualitative research, based on a teaching sequence founded on the chosen theory. In addition

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – IFFar, Santa Maria/RS – Brasil. E-mail: marciaviaroflores@gmail.com
[2] E-mail: vanildebisognin@gmail.com

to assisting in the construction of tasks, this theoretical framework was also used in the analysis of the data, which were collected through the students' productions. With the results, it was noticed that most students had characteristics of the Symbolic World in their productions, with some evidence of the Formal World, thus illustrating the importance of the axiomatic construction of rational numbers in the students' education.

***Keywords**: Teaching; learning; teacher education.*

1. INTRODUÇÃO

Os números racionais são estudados desde os anos iniciais da Educação Básica e ocupam um lugar de destaque nos currículos de matemática das escolas. Porém, nos cursos de formação de professores de matemática, esse destaque, em geral, não é dado e, frequentemente, esse estudo se restringe a uma pequena parte de uma disciplina que, geralmente, aborda vários outros assuntos relacionados à Teoria dos Números.

Nessa direção, destacamos a pesquisa de Elias, Savioli e Ribeiro (2017), a qual apresenta uma análise documental de alguns cursos de Licenciatura em Matemática abrangendo todas as regiões do país, com o objetivo de investigar qual é o espaço dado aos números racionais nos currículos desses cursos. Como resultado desse estudo, os autores perceberam que a maioria das instituições pesquisadas dá grande importância para o conteúdo de estruturas algébricas na formação de professores em detrimento da Teoria de Números. Por outro lado, em muitos casos, os números racionais são tomados como já conhecidos pelos estudantes, e seu tratamento não é priorizado ao longo do curso, e, ainda, muitas vezes, esse assunto é trabalhado apenas como exemplo de estrutura e não como foco de estudo. Os autores ressaltam que essas constatações sugerem uma mudança nos currículos de formação inicial de professores, sendo necessária a abordagem dos números racionais como objeto de estudo.

Concordando com as evidências do quão importante é trabalhar com esses conceitos nos cursos de formação inicial de professores de matemática, é que propomos uma pesquisa em que o objetivo foi saber como os princípios da teoria dos Três Mundos da Matemática, preconizada por David Tall, podem sustentar uma proposta de formação de futuros licenciados em matemática sobre conceitos relacionados com os números racionais, com ênfase nos conceitos ligados à equivalência, e perceber quais resultados a proposta produz sobre as aprendizagens de tais conceitos.

Para alcançar o objetivo proposto, elaboramos uma sequência de ensino envolvendo a construção axiomática dos números racionais, baseada no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Essa foi aplicada a estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal do estado do Rio Grande do Sul.

Neste trabalho, apresentamos, na seção que segue, os aspectos da teoria dos Três Mundos da Matemática. Logo a seguir, apresentamos as tarefas que compõem a primeira parte da sequência de ensino, cuja ênfase foi nos conceitos relacionados à equivalência nos números racionais, que foram trabalhadas com os estudantes, bem como os resultados obtidos, os quais são analisados à luz do quadro teórico escolhido. Ainda, apresentamos uma seção que trata das conexões realizadas pelos estudantes entre os conceitos de equivalência estudados na proposta de ensino e a forma com que são trabalhados na Educação Básica.

2. CONCEPÇÕES NORTEADORAS: IMAGEM DO CONCEITO, DEFINIÇÃO DO CONCEITO E OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

David Tall, ao procurar responder como os indivíduos aprendem a pensar matematicamente, formulou o quadro teórico intitulado Três Mundos da Matemática. Uma das bases dessa teoria são as ideias sobre imagem do conceito e a respeito de definição do conceito, desenvolvidas por Tall e Vinner (1981). Para esses autores, a compreensão de um conceito matemático é dada pelas experiências do indivíduo relacionadas a esse conceito, sendo mais desenvolvida quanto mais variadas e ricas forem essas vivências.

A imagem do conceito inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados a ele, e essa é construída ao longo da vida do indivíduo, podendo mudar conforme os estímulos recebidos. Já a definição do conceito, é dada pelo conjunto de palavras utilizadas pelo indivíduo para definir um conceito matemático, sendo que essa pode coincidir com a definição formal da matemática ou pode ser uma reinterpretação feita pelo indivíduo de acordo com suas experiências. A definição do conceito está ligada à imagem do conceito. Nesse sentido, é mais completa quanto mais rica for a imagem construída. (TALL; VINNER, 1981).

> As ideias de imagem de conceito e de definição de conceito apresentadas por Tall e Vinner (1981) sugerem que a compreensão de um conceito matemático acontece pelo enriquecimento das ideias associadas a ele e os autores sugerem que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos alunos. (POGGIO, 2012, p.41).

Segundo já mencionado, as ideias relacionadas à imagem do conceito e à definição do conceito auxiliam David Tall a formular o seu quadro teórico ao observar o desenvolvimento cognitivo na matemática, propondo a existência de três diferentes tipos, os quais chamou de mundos: o Mundo Conceitual Corporificado, o Mundo Operacional Simbólico e o Mundo Formal Axiomático.

O primeiro deles, o Mundo Conceitual Corporificado, ou apenas Mundo Corporificado, desenvolve-se a partir de como sentimos o mundo, consistindo no pensamento acerca do que percebemos, não somente no mundo físico, mas também em nossas concepções internas sobre as imagens que criamos em relação aos objetos matemáticos. É o mundo que se apresenta na base do conhecimento matemático, podendo ser observado desde os nossos primeiros contatos, ainda enquanto crianças, com a matemática.

Conforme Tall (2013, p.16), esse mundo baseia-se “nas percepções e ações do indivíduo, que desenvolvem imagens mentais que são verbalizadas e se tornam cada vez mais sofisticadas até tornarem-se entidades mentais perfeitas em nossa imaginação.” De acordo com a evolução de nossas experiências matemáticas, o Mundo Corporificado também cresce em refinamento.

Como exemplos do desenvolvimento nesse mundo, podemos citar o uso de figuras geométricas para deduzir propriedades, ou a ideia de utilizar o equilíbrio de uma balança para auxiliar na resolução de equações.

Para representar as ações e as percepções do Mundo Conceitual Corporificado, Tall propõe a existência de um segundo mundo, denominado Mundo Operacional Simbólico, também chamado de Mundo Proceitual Simbólico ou apenas Mundo Simbólico. Esse pode ser entendido como “o mundo dos símbolos que usamos para o cálculo e manipulação em aritmética, álgebra, cálculo e assim por diante.” (TALL, 2004, p.3).

A palavra proceitual, na denominação do segundo mundo, deriva da palavra proceito, que indica o poder que os símbolos matemáticos têm para evocar tanto processos como conceitos. (GRAY *et al*., 1999). Por exemplo, quando consideramos o símbolo 5+6, esse indica o processo de adição e o conceito de soma.

Já o Mundo Formal Axiomático, ou apenas Mundo Formal, está baseado em propriedades que são derivadas de uma estrutura axiomática contendo definições, axiomas e teoremas e na qual outros teoremas e conceitos são derivados dessa estrutura. Para ilustrar isso, temos as estruturas algébricas grupo, anel, corpo, entre outras.

Cabe destacar que o Mundo Formal, geralmente, não é construído ao longo da matemática escolar, porém, na Educação Básica, já pode haver indícios do começo de uma jornada por ele quando os estudantes se deparam com processos de generalizações ou mesmo algumas demonstrações vistas nesse nível de ensino.

Apesar de cada um dos mundos apresentar algumas características próprias, eles não são considerados independentes. Ao contrário, Tall (2013) destaca que os três mundos são intimamente integrados em um quadro mais amplo, podendo, inclusive, haver interseções entre dois desses mundos ou, até mesmo, entre os três.

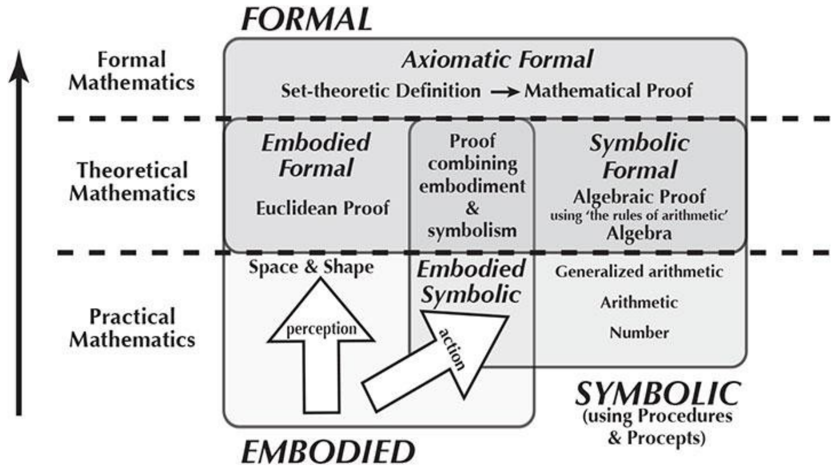
Para se referir às ligações entre os mundos, Tall faz uma junção de suas denominações. A denominação “Corporificado Simbólico” é utilizada para se referir à transição entre os mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico e se relaciona à ação sobre um objeto matemático por meio do uso de um símbolo. A expressão “Corporificado Formal” se relaciona aos mundos Conceitual Corporificado e Formal Axiomático, sendo essa interseção ligada à percepção do indivíduo sobre seu objeto de estudo. Por fim, a denominação “Simbólico Formal” se refere à transição entre os mundos, isto é, Operacional Simbólico e Formal Axiomático e se apresenta quando expressamos ideias formais com o uso de símbolos.

Podemos visualizar, na figura 1, o desenvolvimento dos Três Mundos da Matemática.

É importante destacar que a jornada matemática por esses três mundos é individual e depende de como cada um encara os obstáculos que encontra no caminho e da forma como ele os resolve. Além disso, à medida que o indivíduo vai se desenvolvendo, cada mundo vai crescendo com ele em sofisticação.

Ao observar a Figura 1, verificamos a indicação de três estágios de matemática, denominados Matemática Prática, Matemática Teórica e Matemática Formal, nos quais as interseções entre os mundos podem ser distribuídas.

Figura 1 – Desenvolvimento dos Três Mundos da Matemática.



Fonte: Tall (2013, p.19).

A Matemática Prática relaciona-se ao Corporificado Simbólico e envolve experiências com atividades práticas e simbólicas como, por exemplo, reconhecer e descrever figuras, utilizar símbolos, fazer cálculos aritméticos e algébricos, sem adentrar em experiências formais axiomáticas. Já o estágio da Matemática Teórica relaciona-se ao Corporificado Formal, ao Simbólico Formal e à interseção entre os três, sendo a elaboração e o uso de provas euclidianas e algébricas bons exemplos desse estágio. Por fim, a Matemática Formal está associada ao Formalismo Axiomático e engloba os sistemas axiomáticos de provas e definições.

A partir da identificação desses três estágios de desenvolvimento da matemática, podemos atribuir diferentes noções de justificativa e de prova em cada um dos mundos, ainda que essas sejam diferentes em muitos sentidos.

No Mundo Conceitual Corporificado, a validação de determinada propriedade ou resultado se dá pela visualização e pela intuição; no Mundo Operacional Simbólico, a prova ocorre pela manipulação de símbolos; já no Mundo Formal Axiomático, a prova só é aceita quando deriva, exclusivamente, dos axiomas, das definições e de outros resultados já provados antes na teoria.

Um exemplo que podemos apresentar, relacionado às diferenças das justificativas em cada um dos mundos, é o que se refere à propriedade comutativa. Quando estamos no Mundo Corporificado, o argumento de que 2+3 é igual a 3+2 é dado pela visualização, no sentido de que tomar dois objetos e juntar com outros três é o mesmo que tomar três objetos e juntar com outros dois. No Mundo Simbólico, a igualdade 2+3=3+2 é válida, porque podemos calcular o valor de cada uma das parcelas e verificar que é igual. No entanto, no Mundo Formal, precisamos recorrer a uma estrutura axiomática para verificar sua veracidade.

> Isso leva a métodos muito diferentes de fazer argumentos nos três mundos da matemática. No mundo corporificado, 3 + 2 é o mesmo que 2 + 3 porque posso *ver* que é verdade. No mundo simbólico, 3 + 2 é o mesmo que 2 + 3 porque eu posso *calcular* isso. No mundo formal x + y

> = y + x, em uma específica estrutura matemática, *porque isto é um axioma*[3]. (TALL, 2005, p.9).

A transição para a matemática formal, em geral, causa dificuldades de compreensão aos estudantes, pois pode diferir das experiências anteriores com corporificação e com simbolismo. Isso ocorre porque passa a se desenvolver em um novo contexto, no qual um resultado provado é válido em qualquer sistema que também satisfaça aos axiomas dados.

Por fim, outros aspectos que têm tido destaque, na Teoria dos Três Mundos da Matemática, são os conceitos de *met-before* e *met-after,* que foram traduzidos por Lima (2007), como “já-encontrados” e “a-encontrar”. Os já-encontrados são considerados como experiências anteriores, as quais emergem quando o indivíduo se depara com alguma situação familiar, alguma já vivenciada. Nessa nova situação, ele usa um conhecimento ou um procedimento que já conhece, tornando válido para o momento atual. (LIMA, 2007). Já o termo a-encontrar refere-se a experiências posteriores, que podem interferir em aprendizados anteriores.

Os já-encontrados podem ser tanto benéficos quanto atuar de uma forma negativa, conduzindo o indivíduo ao erro. Por exemplo, quando aprendemos a ideia de subtração com objetos físicos, temos a noção de que a subtração representa o “tirar”. Dessa forma, não poderíamos tirar mais do que temos inicialmente, pois, fisicamente, isso é impossível. Porém, esse aspecto muda quando se trata de temperaturas negativas, de saldos bancários ou da reta numérica. Ainda, podemos pensar na ideia de conjuntos finitos, em que tirar elementos de um conjunto finito deixa o conjunto resultante com um número menor de elementos. No entanto, quando tratamos com conjuntos infinitos, esse pensamento não funciona sempre (por exemplo, ao retirarmos do conjunto dos números naturais, o conjunto dos números pares, o conjunto que resulta é o conjunto dos números ímpares).

Tall (2013) destaca que ao pensar no currículo das escolas, especialistas, frequentemente, concentram-se mais nos efeitos positivos desses já-encontrados do que em seus efeitos negativos, pois é difícil conceber estratégias para lidar com esses.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa aqui relatada é do tipo qualitativa, tendo em vista que nosso objetivo foi responder a questões vinculadas a um universo particular e, segundo Minayo (2001, p.21), a pesquisa qualitativa é aquela que “trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis”. De acordo com Creswell (2007), os métodos empregados devem ser interativos, humanísticos e necessitam envolver a participação ativa dos pesquisados.

[3] Tradução nossa: This leads to very different methods of making arguments in the three worlds of mathematics. In the embodied world 3+2 is the same as 2+3 because I can *see* it is true. In the symbolic world 3+2 is the same as 2+3 because I can *calculate* it. In the formal world $x + y = y + x$ in a specific mathematical structure *because it is an axiom*.

Os participantes da pesquisa foram oito estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal, localizado no estado do Rio Grande do Sul e matriculados no segundo semestre do ano de 2018, na disciplina de Fundamentos de Análise, segundo Projeto Pedagógico de Curso dessa instituição. A escolha dos estudantes matriculados nessa disciplina se deu ao observar a trajetória deles, por meio da matriz curricular do curso, e em função de ter percebido que eles já haviam cursado disciplinas de Fundamentos de Matemática, que abordam conteúdos, geralmente, vistos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, disciplinas de Álgebra, entre outras. Todas essas são importantes bases para o desenvolvimento dos conceitos relacionados ao nosso estudo.

A coleta de informações ocorreu por meio dos registros escritos dos estudantes – aqui denominados E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 e E_8 – ao resolverem as tarefas propostas na sequência de ensino elaborada. Além destes, utilizamos o diário de campo da pesquisadora, que serviu para registrar o desenvolvimento da sequência, possíveis problemas e mudanças que ocorreram, bem como as nossas impressões sobre o andamento da proposta, bem como diálogos realizados entre pesquisadora e estudantes, durante a aplicação da sequência de ensino, para sanar eventuais dúvidas que permaneceram após a leitura das produções escritas, sendo os diálogos gravados com o propósito de se evitar a perda de informações importantes.

Por meio desses registros e com base no referencial teórico adotado, analisamos as informações que emergiram das resoluções. Isso foi feito sempre se considerando as características dos Três Mundos da Matemática evidenciadas.

Foram propostas quatro tarefas aos sujeitos participantes do estudo que tratavam dos conceitos relacionados à equivalência que permeiam os números racionais, buscando a construção do conjunto via classes de equivalência.

A análise dos dados baseou-se na forma como Tall define cada um dos mundos. No caso do Mundo Corporificado, focamos nas percepções e nas ações sobre os objetos matemáticos, sejam eles físicos ou mentais e, nesse sentido, entendemos que o pensamento matemático que se manifesta, nesse mundo, em geral, está baseado nas relações criadas com objetos corporificados, como gráficos, tabelas, diagramas, figuras, exemplos, dentre outros. (TALL, 2013).

No Mundo Simbólico, apontamos o uso e manipulação da simbologia matemática vinculada aos números racionais para representar e efetuar ações, bem como para produzir conclusões baseadas no simbolismo. (TALL, 2004).

Ainda, no caso do Mundo Formal, há o desenvolvimento baseado em definições, axiomas e teoremas, consistindo na estrutura axiomática da matemática. Portanto, entendemos que o Mundo Formal necessita de uma linguagem matemática adequada, de uma estrutura lógica correta e de justificativas das passagens realizadas no sistema axiomático considerado. (TALL, 2013).

A partir das respostas dos estudantes para as questões, propomos uma categorização, apresentada no Quadro 1, explicitando as características observadas para o enquadramento em cada um dos mundos. Salientamos que, nas análises, igualmente, consideramos as interseções entre os mundos, segundo destaca Tall.

Quadro 1 – Categorização para as respostas dos estudantes.

Mundo	**Evidências observadas**
Mundo Corporificado	As respostas são baseadas em textos com o uso de linguagem corrente ou em exemplos do cotidiano. O estudante faz uso de desenhos, de esquemas, de diagramas ou de gráficos para produzir sua resposta. Quando solicitado a fazer a prova de uma afirmação, o aluno se baseia no uso de exemplos ou de imagens.
Mundo Simbólico	As respostas são apoiadas no uso da linguagem matemática, utilizando sua simbologia. O estudante consegue associar imagens, esquemas ou gráficos a uma linguagem simbólica. Quando solicitado a fazer a prova de uma afirmação, ela é baseada no uso de cálculos aritméticos específicos ou em manipulações algébricas.
Mundo Formal	As respostas são fundamentadas no uso correto da linguagem matemática. O estudante consegue, a partir das corporificações e simbolismos, fazer as generalizações solicitadas. Quando solicitado a fazer a prova de uma afirmação, baseia-se no sistema axiomático, percorrendo uma estrutura lógica de demonstração.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

As características anteriormente apresentadas, em cada um dos mundos, para a análise dos resultados, estão descritas de uma forma geral. É preciso ressaltar que as discussões foram realizadas para cada uma das tarefas desenvolvidas e quaisquer peculiaridades, as quais eventualmente tenham surgido, nas respostas, classificaram-se levando em consideração o quadro teórico empregado.

4. A EQUIVALÊNCIA NOS NÚMEROS RACIONAIS

Ao pensar na proposta de construção axiomática do conjunto dos números racionais para um curso de licenciatura, as primeiras indagações começaram a surgir. Por onde deveríamos começar? Quais conceitos sustentam a construção desse conjunto?

Procurando as respostas a essas perguntas, encontramos, no conceito de relação de equivalência, o alicerce para a construção desejada, uma vez que, assim como ocorre com outros conjuntos numéricos, como, por exemplo, o conjunto dos números inteiros, o conceito de equivalência é a base de sua construção.

Optamos, dessa maneira, por explorar o conceito de forma não só a apresentá-lo aos estudantes como algo pronto, mas procurando construí-lo conjuntamente, identificando quais ideias os participantes da pesquisa já possuíam a esse respeito e quais as imagens conceituais foram elaboradas ao longo de sua trajetória acadêmica, pois, em muitas disciplinas cursadas por eles, esse conceito já havia estado presente.

Desse modo, propomos, na primeira tarefa, que os estudantes explorassem os significados de relação e de equivalência separadamente, no primeiro momento. Logo após, foi solicitado o conceito de relação de equivalência de uma forma geral.

Com o objetivo de facilitar a leitura, apresentamos, no Quadro 2, os enunciados dos itens que compõem a primeira tarefa, seguidos da análise das produções feitas pelos estudantes. A partir da forma como esses se expressaram, procuramos identificar quais as características dos Três Mundos da Matemática estavam presentes nas imagens do conceito e na definição do conceito evocadas por eles.

Quadro 2 – Enunciado das questões que compõem a Tarefa 1.

Tarefa 1. 1) O conceito de relação de equivalência é central para o desenvolvimento da matemática, sendo relevante que conheçamos o seu significado. Nesse sentido, com o auxílio de um dicionário, dê o significado das palavras **relação** e **equivalência**. 2) Evoluindo no sentido de entender esse conceito, descreva qual o significado matemático que você atribui para os termos **relação** e **equivalência**, comparando com as respostas obtidas anteriormente. Para desenvolver suas ideias, você pode fazer uso de figuras, diagramas, esquemas, etc. 3) No seu entendimento, existe diferença de significado entre as palavras igual e equivalente no contexto matemático? Explique sua resposta. 4) No contexto matemático, como se define uma relação de equivalência? Caso necessário, você poderá consultar um livro didático.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

No primeiro item, para a palavra relação, a maioria dos estudantes destacou os significados usuais que o dicionário apresenta, tais como “vinculação”, “ligação” ou “contato”. Além desses, a maioria também chamou a atenção para outros dois significados, os quais estão ligados às ideias matemáticas, sendo o primeiro a “comparação entre duas quantidades mensuráveis”, e o segundo, a “correspondência entre elementos de dois conjuntos”.

Já para a palavra equivalência, foram destacados dois significados, a saber: de “igual valor” ou “aquilo que equivale”. O estudante E_4 também destacou outro significado dado por: “relação de igualdade lógica ou implicação mútua entre duas proposições”.

Ao analisar as respostas, um fato que chamou a atenção foi que a maioria dos estudantes procurou dar o significado mais próximo da matemática que o dicionário apresentava. Nos diálogos realizados, durante a aplicação da proposta, eles destacaram que procuraram escolher as respostas apresentadas com um olhar mais matemático.

Nesse momento, cabe salientar que, principalmente no caso da palavra equivalência, os significados trazidos pelo dicionário não foram tão esclarecedores. Isso foi destacado pelos estudantes ao resolverem a tarefa.

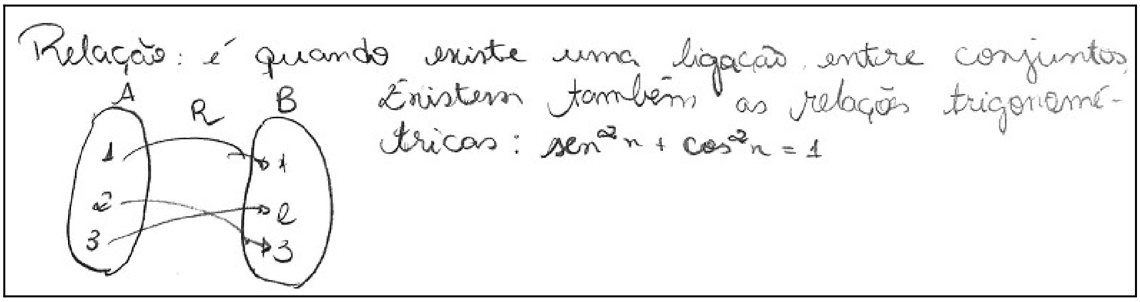
O intuito do primeiro item foi auxiliar na evocação das imagens conceituais dos sujeitos da pesquisa para as expressões relação e equivalência, sendo que, para conhecê-las, propomos o segundo item da tarefa.

Para o termo relação, as respostas apresentadas nos conduziram, em específico, a significados relacionados à ligação entre conjuntos, como constatado nos protocolos de quatro dos estudantes, que, além do significado colocado em forma de textos, apresentaram figuras representando dois conjuntos e a ligação entre os elementos deles por meio de flechas. Na Figura 2 destacamos, como exemplo, a resposta de E_5 para o significado do termo relação.

De forma geral, para o termo relação, constatamos que as imagens conceituais são, para uma parcela dos estudantes, ligadas aos usos cotidianos para o termo e, para outra parcela, estão ligadas às ideias de funções. Assim, a maioria apresenta características do Mundo Corporificado, com algumas características do Mundo

Simbólico emergindo nas respostas quando os estudantes apresentaram os exemplos de relações.

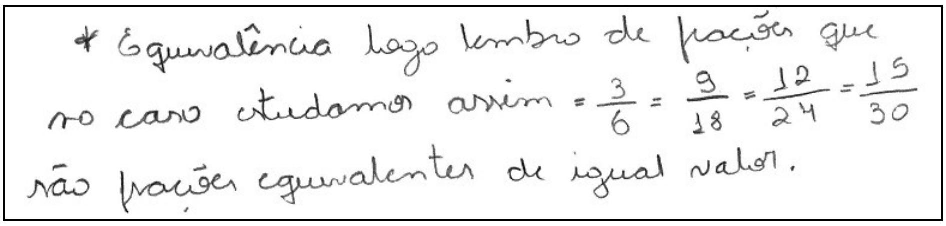
Figura 2 – Resposta de E_5 para o significado matemático de relação.



Fonte: Dados da pesquisa.

Já para o termo equivalência, as imagens do conceito evocadas pelos estudantes ficaram, basicamente, restritas às frações equivalentes, da forma como foram estudadas na sua trajetória escolar na Educação Básica. Ao que tudo indica, a trajetória no Ensino Superior, até esse momento, propiciou um enriquecimento reduzido das imagens conceituais para esse conceito.

Figura 3 – Resposta de E_3 para o significado de equivalência.



Fonte: Dados da pesquisa.

Para o terceiro item da tarefa, que questionou sobre a diferença entre os termos igual e equivalente, a maioria dos estudantes respondeu afirmativamente à pergunta feita, ou seja, que existe diferença. Apenas um estudante respondeu negativamente a esse questionamento.

Acerca do significado para igual, cinco estudantes destacaram expressões como “mesma aparência”, “o mesmo valor”, “ser idêntico” e, após isso, apresentam algum exemplo. Para as ideias relacionadas ao termo equivalente, apresentaram exemplos de frações equivalentes, destacando que, no caso, não seriam iguais na aparência.

Analisando as respostas para esse item, notamos que apareceram, predominantemente, características do Mundo Corporificado. Em decorrência disso, percebemos que as imagens conceituais construídas, ao longo da vida escolar, foram pouco significativas, uma vez que a maioria dos sujeitos do estudo não conseguiu evocá-las de forma adequada. Essas imagens conceituais permanecem ligadas a significados cotidianos, e esses diferem da noção de igualdade em matemática, porque, matematicamente, um objeto é igual apenas a ele próprio.

No que se refere à definição do conceito de relação de equivalência, essa permanece ainda distante da definição formal para a maioria dos estudantes, visto que, para construir o conceito, foi preciso recorrer ao livro didático.

Nos diálogos realizados após a aplicação das questões, os estudantes relataram que, depois de pesquisarem, no livro, a definição de relação de equivalência, acabaram lembrando-se do que se tratava, porque já tinham estudado esse conteúdo. É provável que o fato de os alunos não conseguirem evocar o conceito, adequadamente, decorra da forma como esse tenha sido trabalhado em momentos anteriores. É possível inferir que as imagens conceituais, criadas ao longo da formação dos sujeitos de nosso estudo, foram pobres de significados e, desse modo, eles tiveram dificuldades de evocá-las quando solicitadas em uma nova situação.

Após a construção da definição de relação de equivalência no sentido geral, foi explorada a relação de equivalência que permite a construção do conjunto dos números racionais como classes de equivalência de pares ordenados, considerando seus aspectos simbólicos e formais. Nesse sentido, essa tarefa teve, como objetivo que o estudante justificasse que a relação dada é uma relação de equivalência e que se aplica a relação para pares ordenados, agrupando-os conforme essa.

No desenvolvimento, o primeiro fato que nos chamou a atenção, na resolução apresentada por três estudantes – E_1, E_4 e E_5 – é que esses fizeram a representação do par ordenado na forma fracionária antes de começar a justificativa da relação de equivalência, apresentando a igualdade $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ seguida da igualdade $ad=bc$. Nesse caso, há o indicativo de que esses estudantes conseguiram fazer a conexão entre o par ordenado, que representa um número racional e a sua respectiva escrita na forma fracionária. Essa representação pode fazer parte de seus já-encontrados, uma vez que é a forma mais usual de se representar um número racional.

Quadro 3 – Enunciado das questões que compõem a Tarefa 2.

Tarefa 2. 1) Considere o conjunto Z × Z*= {(*a*,*b*)|*a* ∈Z, *b*∈ Z*} e a relação: (*a*,*b*) ~ (*c*,*d*) quando *ad* = *bc*. Essa relação é de equivalência? Justifique sua resposta. 2) Considere o conjunto abaixo: {(1,2),(2,5),(1,3),(4,3),(2,7),(2,4),(4,10),(3,6),(2,6),(4,8),(6,15),(3,9),(5,15),(8,20),(8,6),(5,10),(4,12),(12,9),(10,25),(10,15),(6,21),(8,28),(10,35),(16,12),(20,15)} (a) Escolha um critério e faça agrupamentos com os pares ordenados do conjunto, explicando qual foi o critério que você utilizou. (b) Considere os números $\frac{a}{b}$ como o par (a,b) e $\frac{c}{d}$ o par (c,d) e a relação dada, ou seja, (*a*,*b*) ~ (*c*,*d*) tal que *a*.*d*=*b*.*c*. Do conjunto acima, destaque os subconjuntos que satisfazem essa relação. Justifique.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Quanto ao desenvolvimento da questão, os estudantes que fizeram essa mudança de representação apresentaram um desenvolvimento semelhante, trabalhando com características do Mundo Simbólico. Quanto ao Mundo Formal, observamos poucos indícios desses, já que os estudantes cometeram equívocos, em especial, de estrutura lógica de demonstração.

Encontramos algumas características mais desenvolvidas do Mundo Formal nas respostas apresentadas por E_6 e E_7. Nessas respostas, observamos, além do uso correto dos símbolos e da relação dada, algumas justificativas das passagens realizadas.

Para a segunda questão da segunda tarefa, dos oito estudantes, três já fizeram a escolha dos agrupamentos pensando, de alguma forma, na relação de equivalência do item anterior, mesmo que não de uma forma explícita. A título de exemplo, destacamos os agrupamentos e a justificativa trazida por E_5:

-{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)}; {(2,5),(4,10),(6,15),(8,20),(10,25)}; {(1,3),(2,6),(3,9),(4,12),(5,15)}; {(4,3),(8,6),(12,9),(16,12),(20,15)}; {(2,7),(4,14),(6,21),(8,28),(10,35)}.

- A partir do primeiro par, o dobro, depois o triplo, o quádruplo e quíntuplo.

Nas respostas para o item (b), todos os estudantes conseguiram separar os subconjuntos conforme a relação de forma correta. Evidenciamos a resposta do estudante $E_{7,}$ uma vez que ele, além de apresentar os subconjuntos, conseguiu produzir uma generalização:

- (m,2m)={(1,2),(3,6),(4,8),(5,10), (2,4)}

- (m,3m)={(1,3),(2,6),(3,9),(5,15),(4,12),(6,21)}

- (2m,5m)={(2,5),(2,5),(8,20),(10,25),(6,15)}

- (4m,3m)={(4,3),(8,6),(12,9),(16,12),(20,15)}

- (2m,7m)={(2,7),(4,14),(8,28),(10,35)}

Nesse caso, entendemos que E_7 apresentou, além das características do Mundo Simbólico, também características do Mundo Formal.

As questões propostas, na segunda tarefa, conduziram os sujeitos da pesquisa a uma jornada pelo Mundo Simbólico, começando pela justificativa da relação de equivalência, na qual há a necessidade de uma manipulação simbólica acentuada e, após, na aplicação da relação apresentada para agrupar os pares fornecidos.

Ao retomarmos as questões, com a discussão em grupo, um de nossos enfoques foi na demonstração de que a relação dada era de equivalência, procurando detalhar cada um dos passos envolvidos na demonstração das propriedades, bem como justificar as passagens efetuadas.

As duas primeiras tarefas exploraram ideias relacionadas à equivalência. Logo, até esse momento, trabalhamos com a definição de uma relação de equivalência e a aplicação dessa definição para uma relação especial, definida no conjunto $Z \times Z^{¿}$.

A relação de equivalência dada determina, no conjunto $Z \times Z^{¿}$, uma partição, ou seja, o conjunto $Z \times Z^{¿}$ fica dividido em subconjuntos disjuntos, chamados classes de equivalência. Desse modo, podemos perguntar: Quem são as classes de equivalência dessa relação? O que elas representam?

Em busca dessas respostas, propomos a terceira tarefa, cujo intuito foi que os estudantes utilizassem a relação de equivalência estudada na tarefa anterior para constituir as classes de equivalência dos pares dados.

Quadro 4 – Enunciado das questões que compõem a Tarefa 3.

Tarefa 3. Observando a relação de equivalência $\sim$ definida anteriormente (ou seja, em $Z \times Z^{*} = \{(a,b) \mid a \in Z,\ b \in Z^{*}\}$ temos $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a.d = b.c$), encontre elementos que se relacionem com os pares abaixo. (a) (1,2) (e) (−1,2) (b) (1,3) (f) (−7,−3) (c) (2,1) (g) (4,−5) (d) (0,1) (h) (−3,1) 2) Represente, em um diagrama, os resultados encontrados na tarefa anterior. Explique qual foi o raciocínio que você utilizou para realizar a ilustração. 3) Represente em $Z \times Z^{*}$, os elementos que você encontrou para cada par ordenado, utilizando cores diferentes para cada um dos pares dados. O que você observa?

Fonte: Elaborado pelas autoras.

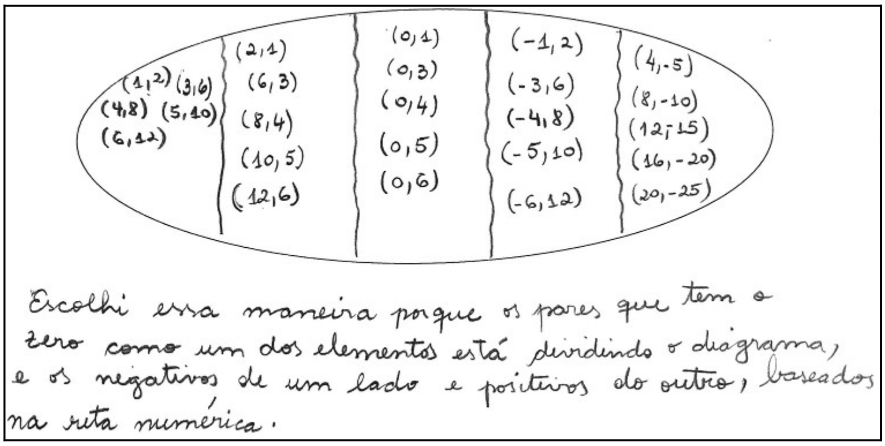
Ao serem analisadas as respostas dadas pelos estudantes, quanto ao primeiro item, detectamos que todos conseguiram encontrar elementos que se relacionassem com os pares dados, inclusive fazendo a conferência por meio da relação de equivalência. Para ilustrar isso, temos os resultados produzidos para o par (-7,-3), dados por (-7,-3)~(-14,-6)~(-21,-9)~(-28,-12)~(-35,-15).

Para esse item, vale destacar a resposta apresentada pelo estudante $E_{7,}$ a qual foi distinta das apresentadas pelos outros estudantes, no sentido de que houve uma generalização do processo. Por exemplo, para o par (1,2), o estudante apresentou a equação d=2c e forneceu a generalização (c,2c); para o par (4,-5) expôs a equação 4d=-5c e, em seguida $d=\frac{-5}{4}c$, fornecendo primeiro o par $\left(c,-\frac{5}{4}c\right)$ e, na sequência, (4c,-5c).

De forma geral, os estudantes apresentaram características do Mundo Simbólico, porque souberam empregar a relação para produzir os pares. O estudante E_7 foi um pouco além, procurando dar uma generalização para o processo de encontrar os pares. Nesse caso, notamos uma transição para o Mundo Formal.

Quanto à representação no diagrama, destacamos duas situações que surgiram nas respostas apresentadas. A primeira foi a separação de acordo com os pares que se relacionavam conforme encontrados no item anterior, sendo essa a forma que imaginamos que os estudantes pensariam caminhando para uma ideia de partição. A segunda situação apareceu com a separação dos pares encontrados levando em consideração os números negativos e positivos que aparecem nas coordenadas, de acordo com o que apresentamos na Figura 4.

Figura 4 – Resposta de E_8 para o item 2 da Tarefa 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Tanto a representação da reta numérica, no sentido de localizar números negativos e positivos, quanto à localização de pontos no plano cartesiano, respeitando os quadrantes, podem ter atuado como já-encontrados, influenciando a forma como alguns estudantes produziram os pares das classes de equivalência e, também, como fizeram a representação no diagrama.

Com relação ao último item, que solicitava a representação gráfica dos pares encontrados, a maioria dos estudantes conseguiu realizá-la.

Observamos que o fato de propor, aos estudantes, uma forma de corporificação, para a ideia de classe de equivalência, com a utilização de cores diferentes para os pares que se encontravam em classes distintas, foi fundamental, já que foi possível notar que o gráfico auxiliou no desenvolvimento das ideias relacionadas à partição que pretendíamos desenvolver com a sequência proposta.

Ao acompanhar o desenvolvimento da questão, constatamos que a construção do gráfico deu um novo sentido às ideias que os estudantes tinham sobre classes de equivalência, ampliando suas imagens conceituais, no sentido de corporificar um conceito que, até então, tinha sido visto apenas como uma definição dentro de uma teoria mais ampla.

Destacamos o comentário feito por E_4 nas observações realizadas após a construção do gráfico:

- Podemos varrer o plano com diferentes relações. Nesse relato, encontramos indícios da transição do Mundo Corporificado para o Mundo Formal.

No decorrer das primeiras tarefas propostas, os estudantes trabalharam com uma relação de equivalência especial, a qual possibilitou a definição de classes de equivalência que geram um conjunto quociente bastante familiar a eles, o conjunto Q.

Nesse sentido, com a quarta tarefa, buscamos fazer essa formalização. No primeiro item, investigamos as imagens conceituais dos estudantes para o termo partição e quais as relações desse conceito com as corporificações produzidas na tarefa anterior. No segundo item, focamos na generalização do processo que trazia consigo características do Mundo Simbólico e do Mundo Formal.

Já nos terceiro e quarto itens, apresentamos as definições de classe de equivalência e de conjunto quociente. A intenção foi que os estudantes aplicassem a definição de classe de equivalência para decidir se os pares dados pertenciam ou não à classe selecionada trabalhando com características do Mundo Simbólico. Por último, tivemos a intenção de conhecer como os alunos caracterizavam um conjunto numérico.

Quadro 5 – Enunciado das questões que compõem a Tarefa 4.

Tarefa 4. 1) (a) Qual significado você atribui para a palavra **partição**? (b) Quais características você observou ao representar os elementos que se relacionam com os pares dados nos itens 2) e 3) da tarefa anterior? Para cada par ordenado (*a,b*) dado, você consegue dimensionar a quantidade de elementos que se relacionam a ele? É possível generalizar o processo de encontrar esses elementos? Para cada par ordenado (*a,b*) conseguimos produzir um conjunto de elementos que se relacionam ao par dado. A esse conjunto, damos o nome de classe de equivalência, referindo-se à relação de equivalência que a produziu. Uma forma de denotar a classe de equivalência do par ordenado (*a,b*) pela relação ~ é utilizar o símbolo $\frac{a}{b}$. Assim, $\frac{a}{b} = \overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x,y) \sim (a,b)\}$. Por exemplo, a classe de equivalência do par ordenado $(3{,}9)$ é dada por $\frac{3}{9} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x,y) \sim (3,9)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 9x = 3y\}$. Observando essa construção, o par ordenado $(1{,}3)$ pertence a essa classe de equivalência? Por quê? E os pares $(-2,-6)$ e$(1{,}2)$ pertencem a $\frac{3}{9}$? Justifique. 4) Quando consideramos o conjunto de todas as classes de equivalência produzidas pela relação de equivalência dada, produzimos o conjunto quociente. Para o nosso caso de estudo, o conjunto quociente de Z × Z* pela relação ~ é denotado por Q e dado por: $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x,y) \sim (a,b)\}$

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Para o significado de partição, em todas as respostas, apareceram as palavras “partir, partes, repartir”. Um dos estudantes mencionou, explicitamente, a relação com conjuntos, citando que seriam “partes de um conjunto”. Assim como aconteceu com o conceito de equivalência, as imagens conceituais foram ligadas, predominantemente, às características do Mundo Corporificado, com os significados usuais dados ao termo.

Quanto às características das representações realizadas na tarefa anterior, três estudantes destacaram que os pontos desenhados formavam “retas imaginárias”, no sentido de que o domínio era discreto e de que não havia repetição de pares em cada uma dessas “retas”.

Os demais estudantes, da mesma maneira, fizeram menção às ideias relacionadas a retas. Eles associaram os pares desenhados com retas crescentes ou com retas numéricas, por exemplo. Além disso, mencionaram a associação com os quadrantes do plano cartesiano.

Nesse caso, os sujeitos da pesquisa procuraram, nos seus já-encontrados, a explicação para o que estava acontecendo na representação, principalmente no gráfico da tarefa anterior. Nenhum deles mencionou, de forma explícita, a ligação entre o discutido na tarefa anterior e o conceito de partição.

Ao responder à segunda questão da Tarefa 4, todas as respostas apontaram que não seria possível dimensionar a quantidade de elementos que se relacionavam a um dado par ordenado, pois se tratavam de infinitos pares que teriam relação com ele. Para a generalização do processo de encontrar os elementos, destacamos três categorias de resposta.

Na primeira categoria, na qual enquadramos quatro estudantes, encontramos respostas de que seria possível a generalização, porém esses estudantes não conseguiram ou não souberam produzi-la. Nesse caso, percebemos emergirem características do Mundo Corporificado, porque as constatações foram baseadas nas tarefas anteriores, sobretudo na construção do gráfico que deu a dimensão de que o processo poderia continuar infinitamente.

As respostas dos outros três estudantes podem ser apontadas como uma segunda categoria, já que, nesse caso, eles conseguiram produzir uma expressão para a generalização do processo de obtenção de elementos que se relacionavam com um par ordenado dado. Na resposta de $E_{1,}$ podemos constatar o que foi destacado:

- Sim, é possível generalizar. A generalização pode ser vista através de um teste com alguns pares ordenados, por exemplo: a partir do par ordenado $(1,2)$ *foram gerados, pela relação escolhida,* $(2,4),(3,6)$ *e, assim, sucessivamente. Desse modo, podemos representar os pares por* $(k.a, k.b)$*, com* $k \in Z^{¿}$*, sendo* k *uma constante.*

Esses estudantes apresentaram uma transição entre o Mundo Corporificado e o Mundo Simbólico, uma vez que empregaram os exemplos para buscar a generalização solicitada.

Por fim, a terceira categoria está relacionada com a resposta do estudante $E_{7,}$ que mencionou, além da expressão para a generalização do processo, uma relação com a reta que passava pelos pontos:

- dado um par genérico (i, j) *para encontrar um par equivalente é na forma* (ik, jk)*, com* $k \in Z^{¿}$*. E a reta que passa pelos pontos da relação são da forma* $y = \frac{jk}{i}$*.*

Observamos, nesse caso, uma interseção entre os Três Mundos da Matemática, pois notamos ideias corporificadas quando o estudante evocou a imagem da reta acompanhada do desenvolvimento simbólico para representar o par ordenado da forma genérica e a relação do coeficiente angular da reta com o par.

Na terceira questão, foi possível detectar que todos os estudantes apresentaram características do Mundo Simbólico em suas resoluções. Além disso, conseguiram responder às questões solicitadas de forma correta.

Após olharmos para as tarefas que exploravam as ideias relacionadas à equivalência nos números racionais, organizamos o quadro que segue para classificar as características encontradas, nas produções dos estudantes, quanto aos Três Mundos da Matemática.

Quadro 6 – Classificação das respostas para as tarefas envolvendo a equivalência nos números racionais.

Tarefas	**Mundo Corporificado**	**Mundo Simbólico**	**Mundo Formal**	**Corporificado Simbólico**	**Corporificado Formal**	**Simbólico Formal**	**3 Mundos**
Significados dos termos	8	5	-	-	-	-	-
Relação de Equivalência	2	6	1	-	-	-	-
Representação	8	7	-	1	-	1	-
Partição e Classes de Equivalência	8	6	-	-	-	1	1

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao término das tarefas propostas para o conceito de equivalência, observamos que a sequência de ensino proporcionou, aos estudantes, a oportunidade de partir do Mundo Corporificado, passar pelo simbolismo até chegar à formalização do conceito. As várias formas de trabalhar com as ideias relacionadas às classes de equivalência possibilitaram que eles construíssem imagens mentais mais ricas.

5. AS CONEXÕES COM A EDUCAÇÃO BÁSICA

Ao planejarmos a sequência de ensino proposta, um de nossos objetivos foi perceber as conexões entre a construção formal dos números racionais com a forma com que estes são abordados na Educação Básica.

Quando consultamos no dicionário os significados relacionados ao termo conexão, encontramos associadas palavras como ligação, relação e junção, por exemplo. Esses significados nos encaminham para compreender porque este termo tem sido amplamente utilizado quando se trata do ensino da matemática.

Segundo Canavarro (2017) o conceito de conexão projeta-se a partir do ano 2000 quando o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) elegeu as conexões como um processo matemático essencial para se desenvolver com estudantes de vários níveis de escolaridade.

Por esse olhar, na literatura, há uma diversidade de perspectivas sob as quais podem ser vistas as conexões, sendo destacado por Canavarro (2017) duas ideias transversais: a primeira refere-se à diversidade das conexões e a segunda é relacionada ao propósito.

Com relação à diversidade, a autora destaca que a literatura apresenta conexões entre a matemática e outras disciplinas, com o cotidiano, com o mundo do trabalho e ainda a referência de conexões dentro da própria Matemática entre conteúdos de áreas distintas, como por exemplo, geometria e aritmética, ou entre conceitos e procedimentos. Ainda,

> Referidas talvez com menos ênfase são as conexões relativas aos diferentes estádios de desenvolvimento das ideias e conceitos matemáticos, que deveriam ter as conceções e conhecimentos prévios que os alunos transportam consigo para a escola como ponto de partida para novas aquisições e ampliações de conhecimentos com vista à construção progressiva de um corpus mais formalizado e abstrato. (CANAVARRO, 2017, p.38).

Quanto ao propósito das conexões, a autora destaca que

> O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, consequentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa - em vez de ser perspetiva da, como recorrentemente acontece, como uma coleção de regras ad-hoc a aplicar em situações particulares pré-determinadas e sem outra utilidade para além da de passar nos testes. (CANAVARRO, 2017, p.38-39).

As conexões estabelecidas são apresentadas e discutidas na sequência do texto e se constituíram em parte importante da pesquisa realizada, proporcionando uma reflexão sobre a prática docente em cursos de formação de professores.

> É preciso coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor. Os professores precisam aprender para também ensinar. E, nesse sentido, é preciso considerar uma peculiaridade muito especial na preparação do professor: ele aprende a profissão num lugar similar àquele em que vai atuar, porém numa situação invertida. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019, p.12).

Sendo assim, após a construção das ideias relacionadas à equivalência, podemos fazer o seguinte questionamento: quais conexões podem ser estabelecidas com os conceitos trabalhados na matemática vista na Educação Básica?

Na primeira tarefa, foi possível observar as primeiras relações que os estudantes fizeram com o que estava sendo proposto e o que era conhecido por eles de acordo com suas trajetórias escolar e acadêmica.

Quando trabalhamos os conceitos de equivalência, em muitas respostas, foram evocadas imagens conceituais ligadas a frações equivalentes, como, por exemplo, na resposta de E_3 quando descreveu o significado que atribuía para o termo equivalência:

- Equivalência logo lembro de frações que no caso estudamos assim $\frac{3}{6}=\frac{9}{18}=\frac{12}{24}=\frac{15}{30}$, *são frações equivalentes de igual valor.*

Para aprofundar essas relações, foi proposta, aos estudantes, uma tarefa relacionada com as frações equivalentes vistas na Educação Básica. Com isso, tivemos o objetivo de estabelecer a relação do conteúdo estudado no nível superior com o que é trabalhado com estudantes de Ensino Fundamental. Para isso, buscamos uma tarefa encontrada em um livro didático do sexto ano do Ensino Fundamental e solicitamos que os estudantes explicassem a situação proposta.

Figura 5 – Enunciado da tarefa relacionando equivalência com a Educação Básica.

(c) Observe o trecho abaixo que traz um exercício encontrado em um livro didático do Ensino Fundamental.

"Para verificar se duas frações são equivalentes, multiplicamos o numerador de uma pelo denominador da outra e vice-versa.

Se os resultados forem iguais, as frações são equivalentes. Veja os exemplos:

$\frac{2}{7}$ e $\frac{8}{28}$, $7.8 = 56$ e $2.28 = 56$

Como 7.8 e 2.28 têm resultados iguais, as frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{8}{28}$ são equivalentes.

$\frac{3}{5}$ e $\frac{12}{25}$, $5.12 = 60$ e $3.25 = 75$

Como 5.12 e 3.25 têm resultados diferentes, as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{12}{25}$ não são equivalentes."(CHAVANTE, 2015a, p. 162)

Como você explica o funcionamento dessa "regra"?

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao responder à questão, a maioria dos estudantes conseguiu relacionar a "regra" apresentada com a relação de equivalência estudada, como mostrado no Quadro 7, no qual estão transcritas algumas respostas extraídas dos protocolos.

Quadro 7 – Respostas relacionando equivalência com a Educação Básica.

Estudante	**Explicação apresentada**
E_1	Por conhecimentos anteriores, conheço a "regra" dos meios e extremos. Também, após a aplicação das atividades anteriores, pode-se perceber que os elementos $\frac{2}{7} e \frac{8}{28}$ se relacionam, valendo $a=2, b=7, c=8, d=28$, assim, $a.d=b.c$.
E_4	A regra funciona pois pela relação de equivalência temos que, seja $(a,b)R(c,d) \Rightarrow emad=bc$, logo a multiplicação do meio pelos extremos são iguais.
E_6	Este exercício trabalha com frações equivalentes a regra seria $\frac{a}{b} e \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se $a.d=b.c$, caso contrário não são frações equivalentes.

E_7	Como no exercício anterior tínhamos uma fração $\frac{a}{b}$ associada a um par (a,b) e $\frac{c}{d}$ associada a um par (c,d) e esses pares se relacionavam se: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$. Note que a aé o numerador de $\frac{a}{b}$ e o d é o denominador da fração $\frac{c}{d}$ e bé o denominador de $\frac{a}{b}$ e o c é o numerador da fração $\frac{c}{d}$. Logo nos exercícios achamos subconjuntos de frações equivalentes. Então duas frações são equivalentes se quando escritas na forma de pares (a,b) equivale a fração (c,d) se $a.d=b.c$. Caso isso não aconteça $(a.d\neq b.c)$ as frações não são equivalentes, pois $(a,b)e(c,d)$ não se relacionam. Resumindo: Se duas frações $\frac{a}{b}$ escrita como o par (a,b) e $\frac{c}{d}$ escrita como par (c,d). As frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes $(a,b)\ \ (c,d)$ com $ad=bc$. Caso $ad\neq bc$ não são equivalentes.

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir das respostas dos estudantes, percebemos que conseguiram fazer a ligação entre as questões que haviam respondido, até então, com a justificativa para uma regra que já conhecem desde o Ensino Fundamental. Ao trilhar esse caminho, foi possível notar uma evolução do conhecimento conceitual dos estudantes ao observar como eles compreenderam a regra e com base nas relações que teceram entre as questões estudadas anteriormente, sob o ponto de vista da matemática superior, e o conteúdo a ser explicado do ponto de vista da Educação Básica. As imagens conceituais construídas, no decorrer da sequência de ensino, tiveram significado para a maioria dos estudantes e os auxiliaram a responder, com clareza, à questão solicitada.

Quando se trata da Educação Básica, o conceito de equivalência está presente desde as primeiras ideias que permeiam o estudo dos números racionais. Isso ocorre quando são abordadas as frações equivalentes e todos os procedimentos que delas derivam.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais já mencionavam a importância das ideias relacionadas à equivalência, destacando que:

> O conceito de equivalência assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números. (BRASIL, 1998, p.103).

No texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também é dado destaque para a noção de equivalência nos números racionais, já que é mencionado que a equivalência é uma das ideias fundamentais que compõem a Matemática, sendo que “essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento." (BRASIL, 2018, p.266).

Portanto, a noção de equivalência é a base para a compreensão do conjunto dos números racionais e, igualmente, essa noção auxilia no desenvolvimento de outros conceitos na trajetória escolar.

> A ideia mais importante sobre frações é a de *frações equivalentes*. É ela que nos permite comparar, somar e subtrair frações, além de ajudar a entender como frações se relacionam a razões e proporções, ideias que aparecem em quase todas as partes da Matemática escolar. (LINS; SILVA, 2007, p.17, grifo no original).

Ao longo do trabalho com o conceito de equivalência, foi possível perceber que as dificuldades perduraram até o Ensino Superior e, nesse sentido, a proposta de discuti-las, com os estudantes participantes do estudo, foi de grande valia.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência de ensino aqui apresentada visou contribuir para o ensino dos números racionais na formação inicial de professores de Matemática, fomentando a discussão de que esses conceitos precisam ter um tempo e um espaço nos cursos de licenciatura.

Procuramos construir a proposta de forma que os conceitos fossem sendo construídos gradualmente pelos estudantes, buscando a compreensão de cada passo envolvido e fazendo com que eles próprios criassem autonomia para buscar a aprendizagem. Ao resgatar as imagens conceituais, oportuniza-se aos estudantes que busquem reconstruí-las de forma que possam enriquecê-las.

O uso do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática possibilitou, aos estudantes, criarem suas próprias jornadas ao pensarem sobre cada um dos conceitos estudados. Ainda, permitiu que conhecêssemos em qual dos mundos cada estudante estava e, a partir desse conhecimento, conseguirmos explorar melhor suas potencialidades, bem como corrigir eventuais fragilidades que cada um deles apresentasse ao longo do caminho.

7. REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. As conexões trabalhadas através da resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática. **REnCiMa**, v.10, n.2, p.1-14, 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC. 2018.

CANAVARRO, A. P. O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. **Educação e Matemática**, Lisboa, n.144-145, p.38-42, out./nov./dez. 2017.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Porto Alegre: Artmed, 2007.

ELIAS, H. R.; SAVIOLI, A. M. P. D.; RIBEIRO, J. A. Números racionais e estrutura algébrica corpo: problematizando o currículo da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.3, p.182-208, 2017.

ELIAS, H. R. Os números racionais na matemática acadêmica: uma discussão visando à formação matemática de professores. **Bolema**, Rio Claro, v.32, n.61, p.439-458, 2018.

GRAY, E. M., *et al*. Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v.38, n.1-3, p.111–133, 1999.

LIMA, R. N. de. **Equações algébricas no ensino médio**: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. 358 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

LINS, R. C.; SILVA, H. D. **Frações**. Brasília: Pró Letramento Matemática, 2007.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Editora Vozes, 2001.

POGGIO, A. M. P. P. **Um diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade de alunos do Ensino Médio na perspectiva dos Três Mundos da Matemática**. 2012. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**: exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. Introducing three worlds of mathematics. **For the learning of mathematics**, v.23, n.3, p.29-33, 2004.

TALL, D. A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. In: INTERNATIONAL COLLOQUIUM ON MATHEMATICAL LEARNING FROM EARLY CHILDHOOD TO ADULTHOOD, 2005, Nivelles. **Anais...** Nivelles: Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2005. p.5-7.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n.12, p.151-169, 1981.

Submetido em: **30/10/2020**

Aceito em: **03/09/2022**