Revista Thema
v.21 | n.2 | 2022
p.563-578

DOI: http://dx.doi.org/10.15536/thema.V21.2022.563-578.1745
ISSN: 2177-2894 (online)

CIÊNCIAS HUMANAS

A desigualdade isoperimétrica: aspectos históricos e um esboço de sua demonstração para alunos do Ensino Médio

***Isoperimetric inequality**: historical aspects and an outline of its demonstration to high school students*

Marcos Melo[1], Carlos Henrique Sales Martins[2]

RESUMO

Este artigo apresenta um recorte de uma dissertação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, que exibiu uma introdução histórica da desigualdade isoperimétrica e uma abordagem dela para o Ensino Médio. Os objetivos foram mostrar aos alunos como tal desigualdade pode ser facilmente verificada utilizando figuras geométricas bem conhecidas por eles, e como essas figuras podem ser usadas para obter um esboço da demonstração desta desigualdade. Adotou-se como metodologia a pesquisa bibliográfica. Como resultado, constatou-se que é possível propor aos alunos do Ensino Médio um estudo de matemática por meio da investigação da resolução de problemas práticos, mesmo que a solução rigorosa deles esteja no contexto de matemática avançada.

Palavras-chave: Área; circunferência; comprimento; desigualdade isoperimétrica; polígonos regulares.

ABSTRACT

This article contains a section of a dissertation from the Professional Master's Degree in Mathematics in National Network - PROFMAT, which showed a historical introduction of isoperimetric inequality and an approach to it at High School level. The objective was to show students how that inequality can be easily verified using geometric figures well known to them, and how these figures can be used to obtain an outline of the demonstration of such inequality. The methodology adopted was bibliographical research. As a result, it was found that it is possible to propose to high school students a study of mathematics through the investigation for solving practical problems, even though their rigorous solution lies in the realm of the advanced mathematics.

***Keywords**: Area; circle; length; isoperimetric inequality; regular polygons.*

[1] Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza/CE – Brasil. E-mail: mcosmelo@mat.ufc.br
[2] E-mail: cahesama@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Visto que a palavra *isoperimétrico* significa "que tem perímetro igual", um *problema isoperimétrico* é um problema matemático em que se discute certa propriedade de uma determinada coleção de curvas mantendo-se fixos os perímetros de todas as curvas dessa coleção. Segundo do Carmo (2005), o problema isoperimétrico mais antigo que talvez tenha sido proposto consiste no seguinte:

Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento L, qual delas limita a maior área?

Nesta forma, o problema era conhecido pelos gregos, que também conheciam a solução: uma circunferência. No entanto, muito tempo se passou até aparecer uma prova satisfatória para o fato de o círculo ser uma solução deste problema isoperimétrico. A dificuldade em resolver tal problema consistia principalmente em provar que ele efetivamente possuía solução, uma vez que em várias tentativas de prova assumia-se, *a priori*, que uma solução deveria existir. Foi só em 1870 que Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) observou que muitas questões similares não tinham solução, e apresentou uma prova completa da existência de uma solução para o problema isoperimétrico. Mais tarde, outras provas foram encontradas. Em resumo, a resposta ao problema enunciado acima é:

Teorema 1. *Seja C uma curva plana simples e fechada com comprimento L, e seja A a área da região limitada por C. Então*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

e verifica-se a igualdade se, e somente se, C é uma circunferência.

A desigualdade acima é conhecida como a *desigualdade isoperimétrica*. Observando as equivalências resultantes da desigualdade isoperimétrica

$$L^2 - 4\pi A \geq 0 \iff L^2 \geq 4\pi A \iff A \leq L^2/4\pi$$

e o fato de a circunferência de comprimento L ter raio $r = L/2\pi$ e área $A = \pi r^2 = \pi(L/2\pi)^2 = L^2/4\pi$, percebe-se a razoabilidade da resposta dada pelos gregos para o problema isoperimétrico em questão.

Esta proposta de trazer a desigualdade isoperimétrica à atenção de alunos do ensino médio encontra inspiração na própria história de vida de Karl Weierstrass, quem primeiro demonstrou rigorosamente a veracidade do teorema 1 acima. Segundo Eves (2004), Weierstrass dedicou muitos anos de sua vida ao ensino elementar. Só aos quarenta anos de idade deixou o ensino secundário para se tornar instrutor na Universidade de Berlim, passando assim a se dedicar integralmente à matemática avançada. Nunca lamentando os anos gastos no ensino elementar, ele transferiu sua notável capacidade pedagógica para o trabalho universitário, tornando-se provavelmente o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve.

Figura 1 – Karl Weierstrass.

Fonte: http://www.learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Weierstrass.
Acesso em: 4 fev. 2020.

Nas belas páginas da história da matemática, há muitos outros problemas interessantes e práticos envolvendo curvas. Por exemplo, podemos mencionar a descoberta da chamada *isócrona* (ou curva ao longo da qual um corpo cairá com velocidade vertical uniforme), o problema da *braquistócrona* (isto é, a determinação da curva de descida mais rápida no seguinte sentido: dados dois pontos num plano vertical, a alturas diferentes, que trajetória do plano deve seguir uma partícula material para ir do ponto mais alto ao mais baixo no menor espaço de tempo possível?) e o problema da *tautócrona* (isto é, a determinação da curva plana ao longo da qual uma partícula material atinge um ponto dado da trajetória num espaço de tempo que não depende do ponto onde ela saiu). Entretanto, neste artigo nossa atenção estará exclusivamente voltada para o problema isoperimétrico que originou *desigualdade isoperimétrica.*

Na seção *Fundamentação Histórica* será apresentada uma fundamentação histórica destacando problemas práticos que exigiram o conhecimento e o uso da desigualdade isoperimétrica. Em seguida, na seção *Fundamentação Teórica*, introduziremos a fundamentação teórica, estabelecendo o formalismo matemático por trás do enunciado e da demonstração da desigualdade isoperimétrica. Por exemplo, ao ler o enunciado do teorema 1, alguém poderia levantar os seguintes questionamentos: O que é uma curva *simples*? Qual é a definição de curva *fechada*? Na sequência, a seção *Metodologia e Abordagem para o Ensino Médio* exibirá um procedimento que possibilitará a todo estudante de ensino médio, com conhecimento básico em trigonometria elementar, entender a veracidade da desigualdade isoperimétrica para uma família bastante ampla de curvas simples e fechadas, bem como executar um esboço de sua demonstração. Embora esse esboço de prova esteja um tanto distante de uma demonstração matematicamente rigorosa, ele não tem a pretensão ardilosa de enganar o estudante, fazendo-o pensar que foi produzida uma demonstração completa do resultado. Na verdade, a intenção é motivar o aluno a trilhar um caminho (incompleto, mas matematicamente prazeroso) que conduz à conclusão desejada, o enunciado no teorema 1. Na seção *Resultados e Discussões,* faremos uma análise da metodologia de ensino proposta na seção *Metodologia e Abordagem para o Ensino Médio* e veremos como ela se harmoniza com o que é discutido e proposto atualmente na área da Educação Matemática. Por fim, a seção *Conclusões* trará conclusões e ponderações decorrentes deste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

Cartago era uma colônia tíria localizada numa região da costa africana em frente à Sicília. Ela era dirigida pela Rainha Dido (Elisa), e estavam sendo lançadas ali as bases de um Estado que se tornaria o rival da própria Roma. Segundo a Mitologia Romana, Dido era filha de Belo, rei de Tiro, e irmã de Pigmalião, que sucedera seu pai no trono. Era casada com um homem riquíssimo, Siqueu (Acerbas), que acabou tendo a morte encomendada por Pigmalião, que lhe cobiçava a riqueza. Depois da morte de Siqueu, Dido reuniu um numeroso grupo de amigos e partidários em diversos barcos, fugiu de Tiro, levando os tesouros de Siqueu, e refugiou-se na costa do Mediterrâneo, no Norte da África, lugar escolhido para sede de sua futura pátria. Lá chegando, esses exilados tírios pediram aos nativos que lhes concedessem apenas uma extensão de terra que ficasse abrangida pelo couro de um boi. Tendo sido aceita imediatamente essa condição, a esperta Dido mandou cortar o couro de um boi em várias tiras muito estreitas, ligou-as pelas extremidades e com isso cercou uma área de terra desejada. A área por ela escolhida era ao longo do mar e em forma de semicírculo, visto que não era preciso usar fitas ao longo da costa marítima. Nessa região (semicircular) de máxima área possível, Dido construiu uma cidade a que chamou de Birsa (couro), e em torno desse forte, ergueu-se a cidade de Cartago, que logo se tornou próspera e florescente [veja Bulfinch (2017), por exemplo].

Figura 2 – Rainha Dido ordenando o corte do couro em tiras finas.

Fonte: http://concursobrasileirodeenredos.blogspot.com.br/2017/03/enredo-1105-lenda-de-dido.html.
Acesso em: 4 fev. 2020.

Conta ainda a lenda que, depois de um tempo vivendo em Cartago, Dido casou-se com Eneias, um bem-sucedido guerreiro troiano que a encantou num festim quando teve a oportunidade de lhe narrar suas peregrinações e façanhas. Após terem-se passado meses, gastos em agradável convívio, Eneias recebe uma ordem de Júpiter, pai dos deuses e dos homens, ordenando-lhe que reiniciasse viagem, pois parecia que a Itália e o Império destinado a ser fundado em suas terras estavam esquecidos. Atendendo à determinação de Júpiter, Eneias separou-se de Dido, que quando viu que ele partira realmente, subiu a uma pira funerária que mandara erguer e, apunhalando-se, foi consumida pelo fogo [veja Bulfinch (2017), por exemplo].

Figura 3 – Dido construindo Cartago.

Fonte: https://www.nationalgallery.org.uk/paintings/joseph-mallord-william-turner-dido-building-carthage. Acesso em: 4 fev. 2020.

Sobre Dido, há o seguinte epigrama latino:

Com teus esposos, Dido, certamente

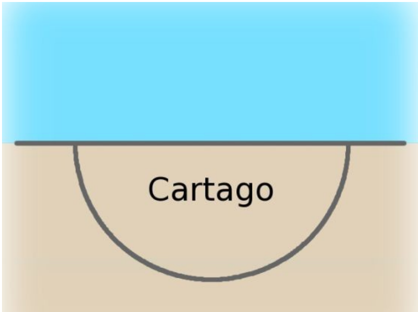
Foi bem desventurada a tua sorte

Pois um, morrendo, te levou à fuga

E o outro, fugindo, te levou à morte.

Em termos da linguagem matemática apresentada na introdução deste artigo, ao estender o couro em forma de semicírculo a Rainha Dido de Cartago tinha em mente a solução do problema isoperimétrico que consistia em encontrar a maior região costeira que poderia ser limitada pelas tiras de couro emendadas umas às outras, já que estas tiras emendadas tinham agora um perímetro fixo.

Figura 4 – Problema isoperimétrico resolvido pela Rainha Dido.



Fonte: https://www.gaussianos.com/2008/06/. Acesso em: 4 fev. 2020.

É importante destacar que este problema resolvido por Dido *não é idêntico* ao problema 1 abaixo. Na verdade, a princesa Dido deparou-se com o seguinte problema:

Dado um fio com um determinado comprimento, qual é a maior porção de terra que se consegue delimitar com esse fio?

Mais precisamente, enuncia-se o seguinte problema, naturalmente designado por *problema de Dido:*

Problema 1. *Dentre todas as curvas planas de comprimento L com pontos inicial e final fixos numa reta dada, qual é a que juntamente com essa reta delimita a maior área possível?*

É também interessante ressaltar que este mesmo problema pode surgir em outros contextos. Por exemplo, em Limberger (2011), encontra-se um problema de otimização semelhante ao seguinte:

Problema 2. *Um fazendeiro possui L metros de tela, e decide fazer um cercado que terá como um dos limites a margem de um rio. Qual será o contorno que maximiza a área?*

Ainda neste mesmo contexto, pode-se perguntar o seguinte:

Problema 3. *Um fazendeiro possui L metros de tela, e decide fazer um cercado que terá como um dos limites uma longa cerca já existente em sua propriedade. Visto que ele deseja deixar algumas vacas pastando na região, qual será o contorno que maximizará a área de pastagem?*

Finalmente, mas ainda neste mesmo contexto, podemos propor um problema semelhante, só que desta vez *idêntico* ao nosso problema original, o problema enunciado no teorema 1:

Problema 4. *Um fazendeiro possui L metros de tela, e decide fazer um cercado em sua vasta propriedade. Visto que ele deseja deixar algumas vacas pastando na região, qual será o contorno que maximizará a área de pastagem?*

Como já foi dito, sabe-se que a solução dos problemas (idênticos) 1-3 é a semicircunferência de raio $r = L/2\pi$, e a solução do problema 4 é a circunferência de mesmo raio. É fácil pensar em diversos outros problemas práticos semelhantes a estes. A tarefa árdua é enunciar tais problemas numa linguagem matematicamente precisa, e apresentar demonstrações rigorosas de que é possível resolvê-los.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma breve apresentação teórica do conceito de curvas parametrizadas faz-se necessária para que se tenha o entendimento preciso do enunciado do problema isoperimétrico (problema enunciado no teorema 1) e sejam introduzidas as ferramentas básicas para a compreensão de sua solução.

Uma *curva parametrizada* é uma aplicação contínua $\beta:I \longrightarrow R^2$ de um intervalo I da reta real R no plano R^2. Diz-se que uma curva $\beta:[a,b] \longrightarrow R^2$ é *fechada* quando $\beta(a) = \beta(b)$; se sua extensão periódica, definida por $\beta(s+n(b-a)) = \beta(s)$, para $s \in [a,b]$ e n inteiro, for *suave* ou infinitamente diferenciável (i.e., C^∞), a curva é dita fechada regular; e se não tiver autointerseções – ou seja, se sua restrição a [a,b) for injetiva – dizemos que ela é *simples* (veja Araújo (1998), por exemplo). As curvas exibidas nos problemas 1 e 4 são exemplos de curvas simples, fechadas e regulares.

De acordo com do Carmo (2005), o *comprimento de arco* (ou o perímetro) $L(\beta)$ de uma curva suave (por partes) $\beta:[a,b] \longrightarrow R^2$ é dado pela integral definida

$$L(\beta) = \int_a^b |\beta'(t)|dt,$$

onde β' é a velocidade escalar de β. Em particular, considerando a circunferência de centro na origem de R^2 e raio *r* como a curva parametrizada $\beta:[0,2\pi] \longrightarrow R^2$, dada por $\beta(t) = (r\cdot\cos(t), r\cdot \text{sen}(t))$, tem-se que $\beta'(t) = (-r\cdot\text{sen}(t), r\cdot\cos(t))$, $|\beta'(t)| = r$ e, consequentemente,

$$L(\beta) = \int_0^{2\pi} r\cdot dt = 2\pi r,$$

o que já era esperado.

Com estas definições apresentadas, podemos enunciar novamente o teorema 1, mas desta vez com a linguagem e as notações que usamos aqui, conforme aparece em Araújo (1998):

Teorema 2. *(Desigualdade isoperimétrica) Seja β uma curva fechada simples e regular, de comprimento $L(\beta)$, e que limita uma região Ω de área $A(\Omega)$. Então*

$$A(\Omega) \leq L(\beta)^2/4\pi$$

e somente há igualdade quando β é uma circunferência.

Podemos observar novamente, assim como fizemos na *Introdução*, que para o caso de β ser uma circunferência de raio *r* e Ω ser o disco limitado por β , tem-se que $L(\beta) = 2\pi r$, $A(\Omega) = \pi r^2$ e, consequentemente,

$$L(\beta)^2/4\pi = (2\pi r)^2/4\pi = 4\pi^2 r^2/4\pi = \pi r^2 = A(\Omega),$$

ou seja, é trivialmente verificado o caso da igualdade mencionada no teorema 2.

Com tudo isso em mente, temos condições de discutir brevemente como Karl Weierstrass chegou à prova do teorema 2. Considerando uma curva (qualquer) $\beta:[0,2\pi]\longrightarrow R^2$ simples e fechada, dada por $\beta(t) = (x(t),y(t))$, expressa-se a área da região limitada por β (veja Simmons e Roberston (1991)) por

$$A(\beta) = (1/2)\int_a^b(x\cdot dy/dt - y\cdot dx/dt)dt$$

e o perímetro de β por

$$L(\beta) = \int_a^b[(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{1/2}dt.$$

Em seguida, trata-se de maximizar a área sujeita à restrição de o perímetro ser mantido constante. Com isto, o que se deseja é encontrar condições que as funções x(t) e y(t) devem satisfazer, condições essas que irão determinar as funções x(t) e y(t), produzindo assim a solução do problema isoperimétrico. Na prática, a menos de uma mudança de coordenadas, Karl Weierstrass concluiu que (x(t),y(t)) maximiza a área quando se tem algo do tipo

$$[x(t) - c_1]^2 + [y(t) - c_2]^2 = r^2,$$

para certas constantes reais c_1 , c_2 e r reais. Note que esta última equação nos diz que a solução do problema isoperimétrico está contida na circunferência de centro (c_1,c_2) e raio r.

4. METODOLOGIA E ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Embora a ideia de Karl Weierstrass de maximizar o funcional área

$$A(\beta) = (1/2)\int_a^b(x\cdot dy/dt - y\cdot dx/dt)dt$$

sujeito ao vínculo perímetro constante

$$L(\beta) = \int_a^b[(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{1/2}dt.$$

pareça natural, ela talvez não seja muito pertinente para uma discussão com alunos do Ensino Médio, pois o que está por trás da determinação da circunferência como solução do problema isoperimétrico é o chamado *cálculo das variações*, um ramo da análise, descoberto por Leonhard Euler (1707-1783) em 1744, que generalizou o famoso *cálculo ordinário* inventado por Newton e Leibniz. Visto que o cálculo das variações está no contexto da matemática avançada que era usada por Weierstrass, surge a pergunta: que abordagem poderia ser usada para que um aluno do ensino médio possa compreender o enunciado da desigualdade isoperimétrica e ainda trilhar um caminho rumo à demonstração dela, usando apenas ferramentas matemáticas do seu cotidiano escolar?

Nesta pesquisa, fizemos uso de nosso conhecimento básico sobre polígonos regulares para pôr à prova a desigualdade isoperimétrica, ou seja, analisamos diversas figuras geométricas da rotina escolar do ensino médio para calcular áreas e perímetros, verificando a veracidade da desigualdade para todas essas figuras e dando passos naturais para chegar à peça chave da desigualdade, a circunferência, a figura maximizante do funcional área, a solução do problema isoperimétrico (que enunciamos na *Introdução*).

Assim, para colocarmos à prova o enunciado do teorema 1 (que é o mesmo do teorema 2), inicialmente, procedemos da seguinte maneira:

1. Fixamos arbitrariamente um número real positivo L para fazer o papel de perímetro;
2. Selecionamos uma figura geométrica (polígono regular) P com perímetro L;
3. Calculamos a área A(P) da figura selecionada; e,
4. Verificamos que vale a desigualdade *estrita*

$$A(P) < L^2/4\pi.$$

Após darmos estes 4 passos, teremos analisado o quanto a desigualdade estrita acima se aproxima de uma igualdade, ao passo que forem considerados polígonos P com número cada vez maior de lados. Visto que esse aumento no número de lados faz com que os polígonos se aproximem cada vez mais de uma circunferência, a sucessão de desigualdades estritas culminando numa igualdade nos dá o que pretendíamos, um *esboço da demonstração* da desigualdade isoperimétrica. É apropriado que esse procedimento seja chamada de esboço de demonstração, pois não se trata de uma demonstração completa, uma vez que foram utilizados *apenas* polígonos regulares, enquanto a pergunta proposta originalmente (problema isoperimétrico original) é acerca de *todas* as curvas simples e fechadas (com um perímetro fixado). No entanto, discutiremos brevemente como é possível usar propriedades de polígonos para reduzir o caso geral para o caso de polígonos regulares, e assim obtemos uma *demonstração completa* da desigualdade isoperimétrica.

No que segue, L é um número real positivo e, para cada inteiro positivo n, P_n é o polígono regular com n lados e perímetro L.

4.1. A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA P3 :TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Se P_3 é o triângulo equilátero de perímetro L, então todos os lados de P_3 têm o mesmo comprimento L/3. Visto que a área de um triângulo equilátero de lados iguais a X é $(3^{1/2}/4)X^2$, fazendo X = L/3, obtemos, usando a mesma notação para área que aparece no Teorema 2,

$$A(P_3) = (3^{1/2}/4)(L^2/9) = 3^{1/2}L^2/36.$$

Isto implica que

$$(4\pi/L^2)\cdot A(P_3) = 3^{1/2}\pi/9 \approx 0{,}604599788$$

ou seja,

$$A(P_3) \approx 0{,}604599788\cdot(L^2/4\pi).$$

Isto mostra que a desigualdade isoperimétrica $A(P_3) < L^2/4\pi$ é satisfeita no caso do triângulo equilátero.

4.2. A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA P4 : QUADRADO

Se P_4 é o quadrado de perímetro L, então todos os lados de P_4 têm o mesmo comprimento L/4. Visto que a área de um quadrado de lados iguais a X é X^2, fazendo X = L/4, obtemos, usando a mesma notação para área que aparece no Teorema 2,

$$A(P_4) = L^2/16.$$

Isto nos dá

$$(4\pi/L^2)\cdot A(P_4) = \pi/4 \approx 0,785398163,$$

ou seja,

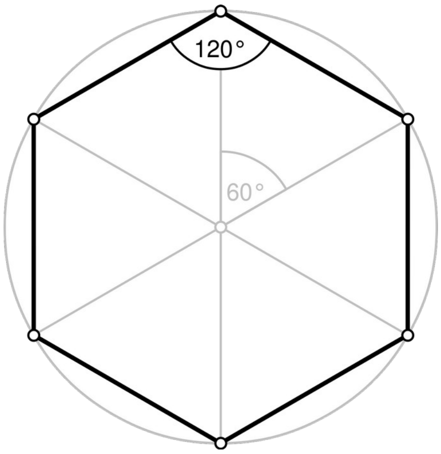
$$A(P_4) \approx 0,785398163\cdot(L^2/4\pi).$$

Assim como observamos no caso do triângulo P_3, vemos agora que a estimativa acima confirma a veracidade da desigualdade isoperimétrica $A(P_4) < L^2/4\pi$ para o quadrado P_4. Comparando as estimativas $A(P_3) \approx 0,604599788\cdot(L^2/4\pi)$ e $A(P_4) \approx 0,785398163\cdot(L^2/4\pi)$, vemos que houve um avanço de cerca de 18% rumo à igualdade (na desigualdade isoperimétrica), que é o nosso destino final.

4.3. A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA P6 E P12: HEXÁGONO E DODECÁGONO

O polígono regular P_6 (hexágono) de perímetro L é formado por 6 triângulos equiláteros de lado L/6, conforme a figura abaixo.

Figura 5 – Hexágono.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Hex%C3%A1gono.
Acesso em: 4 fev. 2020.

Consequentemente, a área de P_6 é dada por

$$A(P_6) = 6[(3^{1/2}/4)(L/6)^2] = 3^{1/2}L^2/24.$$

Isto implica que

$$(4\pi/L^2)\cdot A(P_6) = 3^{1/2}\pi/6 \approx 0,906899682,$$

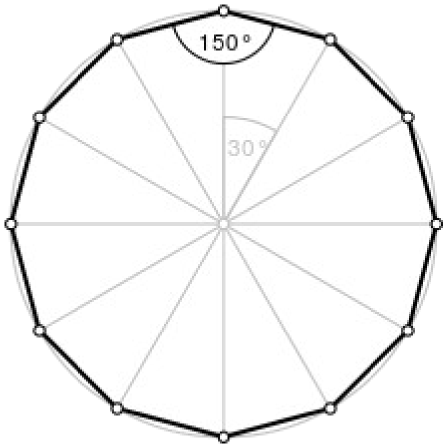
o que nos dá

$$A(P_6) \approx 0{,}906899682\cdot(L^2/4\pi).$$

Do mesmo modo como verificamos no caso do quadrado P_4, confirmamos a validade da desigualdade isoperimétrica para o hexágono P_6, sendo que neste caso avançamos mais cerca de 12% (compare com a estimativa $A(P_4) \approx 0{,}785398163\cdot(L^2/4\pi)$) em direção ao nosso ponto de chegada, que está quase 10% a nossa frente.

O caso do dodecágono P_{12} de perímetro L é semelhante.

Figura 6 – Dodecágono.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Dodec%C3%A1gono.
Acesso em: 4 fev. 2020.

Visto que P_{12} pode ser dividido em 12 triângulos isósceles de base $X = L/12$, necessita-se calcular a área de cada um desses triângulos e depois multiplicar o resultado por 12. Sabendo que a altura desses triângulos é $h \approx 1{,}866025404\cdot X$ (isto será justificado a seguir na seção *A desigualdade isoperimétrica para P_n*) e que a área de cada um desses triângulos é $Xh/2$ segue-se que

$$A(P_{12}) = 6Xh \approx 0{,}077751058\cdot L^2,$$

donde

$$(4\pi/L^2)\cdot A(P_{12}) \approx 4\pi\cdot 0{,}077751058 = 0{,}977048617,$$

ou seja,

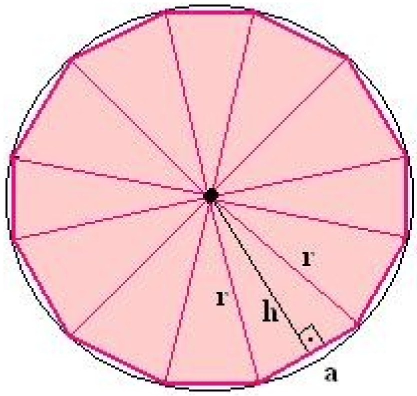
$$A(P_{12}) \approx 0{,}977048617\cdot(L^2/4\pi),$$

e isto nos coloca a cerca de 3% da igualdade.

4.4. A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA P_N

Para o caso geral do polígono regular P_n com n lados e perímetro L, a ideia é generalizar o que foi feito para o dodecágono P_{12} na seção anterior, justificando o valor da altura utilizado lá. Ora, P_n pode ser dividido em n triângulos congruentes de base $a = L/n$, conforme a figura abaixo.

Figura 7 – Polígono regular.



Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/area-circulo.htm.
Acesso em: 4 fev. 2020.

Como o ângulo central está dividido em n partes iguais, segue-se que cada triângulo tem ângulo interno central (relativo ao centro da circunferência circunscrita) medindo $2\pi/n$ e ângulos nas bases medindo $\pi/2 - \pi/n$ cada. Assim, a altura de cada um desses triângulos é dada por

$$h = (a/2)\cdot\text{cotg}(\pi/n).$$

Com isso, conclui-se que a área de P_n é dada por

$$A(P_n) = (na^2/4)\cdot\text{cotg}(\pi/n) = (L^2/4n)\cdot\text{cotg}(\pi/n).$$

Finalmente, observamos que provar a veracidade da desigualdade estrita

$$A(P_n) < L^2/4\pi$$

é equivalente a mostrar que vale a desigualdade

$$(\pi/n)\cdot\text{cotg}(\pi/n) < 1,$$

para todo inteiro positivo n. Ora, esta última desigualdade é consequência do seguinte resultado:

Lema 1. *A função $f:(0,\pi/2)\longrightarrow R$, dada por $f(t) = t\cdot\text{cotg}(t)$, é estritamente decrescente e $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$.*

A prova deste lema é imediata[3]. Com efeito, derivando, tem-se

$$f'(t) = \text{cotg}(t) - t\cdot\text{cosec}^2(t) = [\text{sen}(2t) - 2t]/2\text{sen}^2(t) < 0,$$

para todo $0 < t < \pi/2$, provando que f é decrescente. Usando limite fundamental trigonométrico, obtém-se

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} t\cdot\text{cotg}(t) = \lim_{t\to 0} \cos(t)/[\text{sen}(t)/t] = 1,$$

[3] Esta prova pode ser apresentada para alunos do ensino médio com conhecimento básico de cálculo ordinário, por exemplo, alunos de turmas especiais ou olímpicas.

o que conclui a prova.

Portanto, fazendo uso deste lema, chega-se ao clímax do que chamamos de *esboço de demonstração* da desigualdade isoperimétrica. De fato, se m e n são inteiros positivos, tem-se a sequência de implicações

$$m < n \Rightarrow \pi/n < \pi/m \Rightarrow (\pi/m)\cdot \mathrm{cotg}(\pi/m) < (\pi/n)\cdot \mathrm{cotg}(\pi/n),$$

provando que $A(P_n)$ cresce ao passo que *n* cresce. Por fim, o limite

$$\lim_{n\to\infty} A(P_n) = \lim_{n\to\infty} (L^2/4n)\mathrm{cotg}(\pi/n) = (L^2/4\pi)\cdot\lim_{n\to\infty} (\pi/n)\cdot \mathrm{cotg}(\pi/n) = L^2/4\pi$$

mostra que as áreas dos polígonos regulares P_n convergem para a área da circunferência.

4.5. A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA: CASO GERAL

Na seção anterior, ficou provado o teorema 1 para a coleção particular dos polígonos regulares, que são curvas planas simples e fechadas. Para enfatizar isso, resumimos o que foi feito até agora no seguinte resultado (que é, como já mencionado, um caso particular do teorema 1):

Teorema 3. *Seja Σ_L a coleção de todos os polígonos regulares do plano*[4] *com perímetro L, em que L > 0 é um número real fixado. Então*

$$L^2 - 4\pi\cdot A(P) \geq 0,$$

para todo $P \in \Sigma_L$, e verifica-se a igualdade se, e somente se, P é uma circunferência.

de A. Moreira e Saldanha (1993) obtiveram uma demonstração do teorema 1 reduzindo esse caso geral ao caso de polígonos regulares. O roteiro deles foi mostrar:

a) Dentre todos os triângulos ABC de base fixa AB e perímetro dado, o de maior área é o isósceles;

b) Dentre todos os quadriláteros com lados dados, o de maior área é o inscritível; e,

c) Dado qualquer polígono não regular, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual, e área maior.

Com isto em mente, para uma curva fechada de comprimento *L*, eles fixam (arbitrariamente) uma quantidade de pontos igualmente espaçados sobre a curva, ligam esses pontos por linhas retas, formando um polígono, e utilizam o roteiro acima para concluir a demonstração.

[4] Aqui a circunferência está incluída, sendo considerada um polígono regular com infinitos lados.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

De acordo com Ausubel (2000), para que ocorra uma aprendizagem significativa é preciso que o estudante interaja de maneira substancial e não-arbitrária com aquilo que ele já sabe. A essência do chamado *processo de aprendizagem significativa* é a aquisição de novos significados por meio do uso de materiais de instrução que têm relevante interseção com o conteúdo cognitivamente estruturado do aprendiz. Nesse processo, quando há interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, o aluno solidifica seus conhecimentos básicos, que adquirem novos significados, e os conhecimentos novos adquirem significado para ele.

Com isso em mente, o resultado desta pesquisa é um material didático que pode ser utilizado pelo professor de matemática do ensino médio que busca conteúdos novos visando promover aprendizagem significativa, pois:

- O conhecimento de figuras geométricas básicas, como polígonos regulares, do cálculo de comprimento e área, e das noções de trigonometria faz parte do conteúdo cognitivamente estruturado dos estudantes de ensino médio;
- A apresentação da desigualdade isoperimétrica (conhecimento considerado novo) por meio do uso de polígonos regulares promove uma interação significativa com conhecimentos prévios;
- A desigualdade isoperimétrica adquire significado para os estudantes, pois é verificada em casos concretos, como triângulos equiláteros, quadrados, hexágonos e dodecágonos; e,
- A versão geral da desigualdade isoperimétrica (conhecimento novo) adquire significado após ser solidificado o conhecimento de sua versão particular (para polígonos regulares).

Para discutir e fundamentar ainda mais o que foi dito acima, consideramos a tabela 1 (produzida através do que foi feito na seção *Metodologia e abordagem para o Ensino Médio*). Com o auxílio desta tabela, temos um resumo de como procedemos para apresentar um esboço da demonstração da desigualdade isoperimétrica, conhecimento novo adquirido pelos passos nela descritos, a saber:

- Selecionamos um polígono regular com perímetro l fixado;
- Calculamos a área desse polígono em função do parâmetro l;
- Comparamos o valor da área obtida com o valor da área da circunferência de perímetro l; e,
- Verificamos que, ao passo que o número de lados aumenta, a área também aumenta, tornando-se cada vez mais próxima da área da circunferência de perímetro l.

Este *ancoramento de ideias* relacionando, de forma cadenciada, conhecimentos prévios com novos é o que dá luz à aprendizagem significativa, segundo Ausubel (2000). Por fim, o resultado geral (Teorema 1) adquire significado para o estudante do ensino médio, pois, independente de se fazer a demonstração dele (cujo roteiro, via polígonos quaisquer, foi mencionado na seção *A* *desigualdade isoperimétrica: caso geral*), a veracidade da desigualdade isoperimétrica, para qualquer que seja a curva simples e fechada, tem-se tornado (na estrutura cognitiva do aluno) um fato incontestável.

Tabela 1 – Esboço de demonstração da desigualdade isoperimétrica.

Polígono P_n com perímetro L	**Área de P_n:** $A(P_n)= (L^2/4n)\cdot\text{cotg}(\pi/n)$	**Valor de** $(4\pi/L^2)\cdot A(P_n)$	**Valor de** $1-\frac{4\pi}{l^2}A(P_n)$
Triângulo P_3	$3^{1/2}L^2/36$	0,604599788	39;5400212%
Quadrado P_4	$L^2/16$	0,785398163	21;4601837%
Pentágono P_5	$0,068819096\cdot L^2$	0,864806266	13;5193734%
Hexágono P_6	$3^{1/2}L^2/24$	0,906899682	9;3100318%
Dodecágono P_{12}	$0,077751058\cdot L^2$	0,977048616	2;2951384%
Icoságono P_{20}	$0,078921894\cdot L^2$	0,991761768	0;8238232%
Pentacontágono P_{50}	$0,079472724\cdot L^2$	0,998683706	0;1316294%
Hectágono P_{100}	$0,079551289\cdot L^2$	0,999670991	0;0329009%
Quiliágono P_{1000}	$0,0795772097\cdot L^2$	0,999996710	0;0003290%
Circunferência P_∞	$L^2/4\pi$	1	0;0000000%

Fonte: Autores.

6. CONCLUSÕES

De acordo com Brasil (2006), a forma como o professor de matemática trabalha os conteúdos nas aulas do ensino médio deve sempre agregar valor formativo, no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isto significa que, pelo modo como o professor apresenta problemas, questiona a existência de soluções, analisa hipóteses e tira conclusões, ele deve valorizar o raciocínio matemático dos alunos. Para isso, ele pode usar exemplos e contraexemplos, generalizar situações e criar modelos.

A contribuição deste artigo foi apresentar ao professor uma proposta de trabalho com um tema, geralmente estudado por alunos de cursos iniciais de pós-graduação em matemática, que lhe possibilite agregar valor formativo, no sentido acima descrito por Brasil (2006). De fato, o problema isoperimétrico foi apresentado em sua formulação mais geral, sendo analisada histórica e matematicamente a questão da sua solubilidade. Em seguida, verificou-se a veracidade dessa desigualdade por meio de diversos exemplos concretos, culminando num esboço de sua demonstração, fora discussões abrangentes acerca de demonstrações de seu caso geral.

Por fim, enfatizando o que foi destacado na seção *Resultados e discussões*, este trabalho também pretendeu compartilhar com o professor de matemática do ensino médio um material didático que pode ser por ele utilizado para fomentar em suas classes um processo de aprendizagem significativa, no sentido de Ausubel (2000), pois, conforme visto, demos destaque a como os alunos podem ancorar conhecimentos prévios em conhecimentos novos, solidificando os prévios ao passo que são adquiridos os novos.

7. REFERÊNCIAS

ARAÚJO, P. V. **Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

AUSUBEL, D. P. **The Acquisition and retention of knowledge**: a cognitive view. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2006. v.2.

BULFINCH, T. **O livro de ouro da mitologia**: histórias de deuses e heróis. Rio de Janeiro: Harpercollins Brasil, 2017.

MOREIRA, C. G. T. de A.; SALDANHA, N. C. A desigualdade isoperimétrica. **Revista Matemática Universitária**, n.15, p.13-19, 1993.

CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

LIMBERGER, R. **Abordagens do problema isoperimétrico**. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

SIMMONS, G. F.; ROBERSTON, J. S. **Differential equations with applications and historical notes**. New York: McGraw-Hill, 1991.

Submetido em: **04/02/2020**

Aceito em: **27/11/2021**