Revista Thema
v.17 | n.3 | 2020
p.754-764

DOI: http://dx.doi.org/10.15536/thema.V17.2020.754-764.1581
ISSN: 2177-2894 (online)

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Interpretação combinatória e propriedades dos números de Narayana

Combinatorial interpretation and properties of Narayana numbers

Francisco Hedyleno Coelho Bezerra[1], Francisco Régis Vieira Alves[2]

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a definição dos números de Narayana e algumas interpretações combinatórias desses números para alguns exemplos que encontramos para os números catalães. Os números de Narayana possuem propriedades matemáticas importantes e têm aplicações em várias áreas da Matemática tais como Análise combinatória, estatística e outras. Algumas propriedades dos números de Narayana são demonstradas a fim de proporcionar um incremento de familiaridade com esse sistema simbólico. Por fim demonstramos uma importante identidade envolvendo os números de Narayana e os números catalães o que proporciona um interesse de pesquisas atuais envolvendo esses números.

Palavras-chave: Números de Narayana; interpretação combinatória; números catalães.

ABSTRACT

In this work we present the definition of the numbers of Narayana and some combinatory interpretations of these numbers for some examples that we find for the Catalan numbers. Narayana numbers have important mathematical properties and have applications in various areas of Mathematics such as combinatorial analysis, statistics and others. Some properties of Narayana numbers are demonstrated in order to provide an increase in familiarity with this symbolic system. Finally we demonstrate an important identity involving the numbers of Narayana and the Catalan numbers which provides an interest of current research involving these numbers

***Keywords**: Numbers of Narayana; combinatory interpretation; Catalan numbers.*

1. INTRODUÇÃO

De acordo com Stanley (2015, p.62) os números de Narayana foram descobertos pelo matemático britânico Percy Alexander MacMahon (1854-1929). Estes números foram redescobertos por Tadepalli Venkata Narayana (1930-1987). Segundo Petersen (2015,

[1] Mestrando em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, Fortaleza/CE - Brasil. E-mail: hedy.cb@hotmail.com
[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, Fortaleza/CE - Brasil. E-mail: fregis@ifce.edu.br

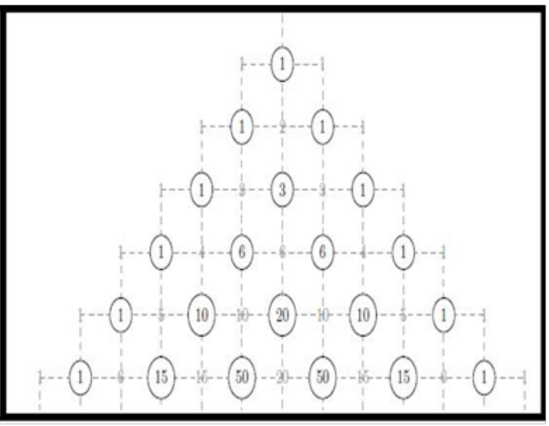
p.23) os números Eulerianos são definidos a partir de intimas relações com os números de Narayana, por meio de interpretação combinatória. Por outro lado, podemos perceber também, intrínsecas inter-relações dos números de Narayana com os números de Catalan.

De acordo com Petersen (2015, p.23) fornecemos uma definição formal extraída do arranjo triangular que observamos na figura 1. Neste caso, o número de Narayana denotado por é interpretado como o número de permutações definidas a partir de uma forma particular, para valores descendentes de k com a condição 0≤k≤n. Os números de Narayana podem ser definidos da seguinte forma:

Definição 1: Para os inteiros 0 ≤k ≤ n, os números de Narayana são dados pela seguinte fórmula: N(n,k)=$N_{n,k}=\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}$, onde $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ é o conhecido coeficiente binomial.

Figura 1 - Valores de $N_{n,k}$ para $1 \le k \le n \le 9$.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	6	1						
5	1	10	20	10	1					
6	1	15	50	50	15	1				
7	1	21	105	175	105	21	1			
8	1	28	196	490	490	196	28	1		
9	1	36	336	1176	1764	1176	336	36	1	
10	1	45	540	2520	5292	5292	2520	540	45	1



Fonte: Petersen (2015, p.209).

A seguinte matriz $M_{n,k}=\begin{pmatrix}\binom{n-1}{k} & \binom{n}{k+1}\\ \binom{n}{k} & \binom{n+1}{k+1}\end{pmatrix}$ é definida em Petersen(2015, p.23) cujo determinante é $\det(M_{n,k})=\binom{n-1}{k}.\binom{n+1}{k+1}-\binom{n}{k}.\binom{n}{k+1}=N(n,k)=N_{n,k}$.

Neste trabalho daremos algumas interpretações combinatórias para os números de Narayana, mostraremos algumas propriedades importantes desses números e demonstraremos uma importante identidade conhecida como identidade de Narayana.

Grimaldi (2012) fornece a seguinte definição para os números de Narayana:

$$N(0,0) = 1$$
$$N(n,0) = 0, n \geq 1$$
$$N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}, n \geq k \geq 1$$

2. INTERPRETAÇÕES COMBINATÓRIAS PARA OS NÚMEROS DE NARAYANA

Quando estudamos os números de Fibonacci percebemos que cada um desses números pode ser expresso como uma soma de coeficiente binomial. Uma situação semelhante ocorre para os números catalães por meio dos números de Narayana. Na tabela abaixo podemos observar alguns valores para N(n,k):

Tabela 1 - valores de para 1≤ k ≤ n ≤ 7.

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	Row Sum
1	1							1
2	1	1						2
3	1	3	1					5
4	1	6	6	1				14
5	1	10	20	10	1			42
6	1	15	50	50	15	1		132
7	1	21	105	175	105	21	1	429

Fonte: Grimaldi (2012, p.268).

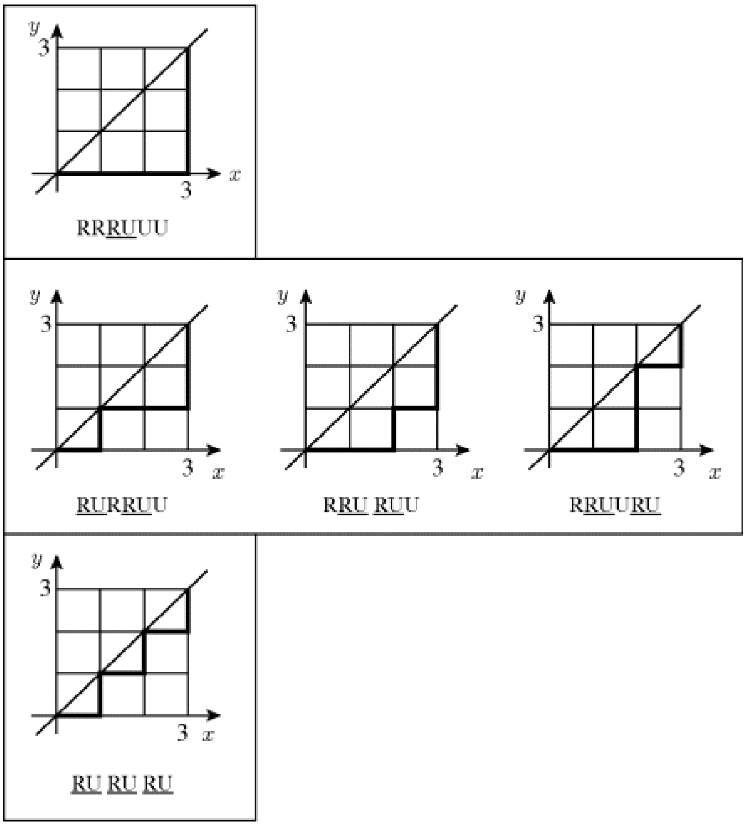
A ultima coluna da tabela acima sugere que para n≥1, é válida a seguinte identidade:

$N(n,1) + N(n,2) + N(n,3) + ... + N(n,n) = \sum_{k=1}^{n} N_{n,k} = C_n$, onde C_n é conhecido como o número de Catalan. Essa identidade será demonstrada, mas antes daremos algumas interpretações combinatórias para os números de Narayana.

De acordo com Grimaldi (2012) fornecemos algumas interpretações combinatórias dos números de Narayana para alguns exemplos que encontramos para os números catalães. Nos exemplos a seguir veremos algumas dessas interpretações.

Na figura 2 temos cinco caminhos de rede de (0,0) à (3,3) que nunca se elevam acima da reta y=x. Vemos que existe 1=N(3,1) caminho com uma abertura de onde existe um R seguido de um U, onde R é considerado como o movimento para a direita e U o movimento para cima. Além disso, temos 3=N(3,2) caminhos com tais voltas e ainda 1=N(3,3) caminho com 3 dessas voltas.

Figura 2 – Caminhos de rede de (0,0) à (3,3)
que nunca se elevam acima da reta y=x.



Fonte: Grimaldi (2012, p.269).

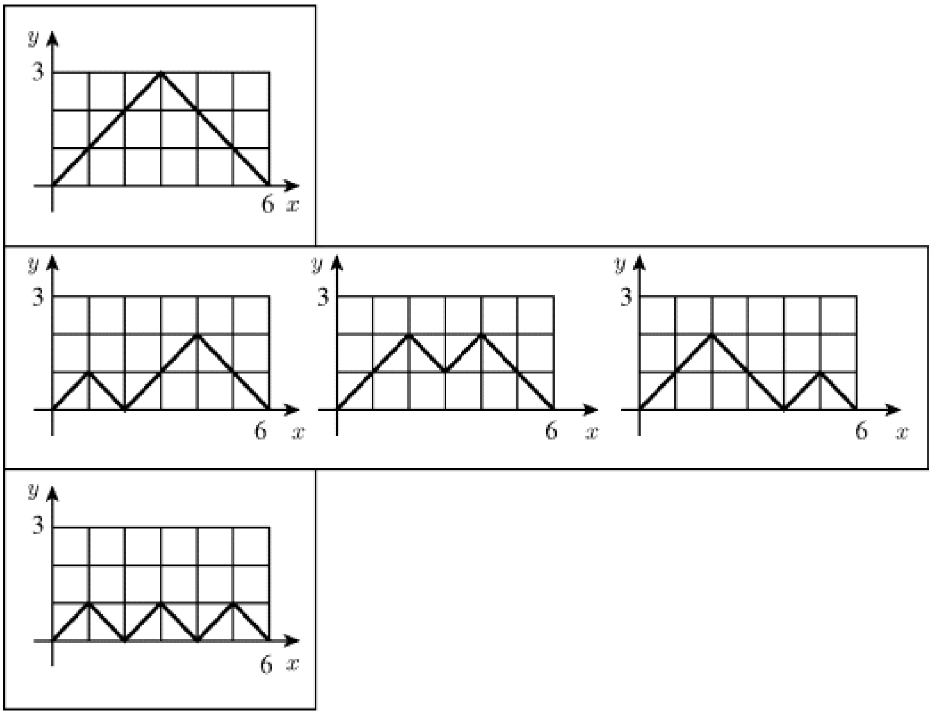
Temos o caso de n parênteses do tipo () e queremos saber de que forma podemos ordenar esses pares de parênteses de forma que não existam pares de parênteses abertos. Para n=3 temos:

((()))   (()())   ()(())   (())()   ()()()

Podemos ver que existe uma expressão com uma ocorrência de “()’’,ou seja N(3,1)=1, existem três expressões com duas ocorrências de “()”,ou seja N(3,2)=3, finalmente existe uma expressão com três ocorrências de “()”, ou seja, N(3,3)=1.

A figura 3 nos mostra como os números de Narayana podem contar os caminhos Dyck (ou cadeias de montanhas). Descobrimos que existe um caminho Dyck com 1 = N (3, 1) pico onde existe um (↗), Seguido por um (↘). Além disso, existem 3 = N (3, 2) caminhos Dyck com dois picos, e 1 = N (3, 3) com caminho Dyck de três picos.

Figura 3 – Caminhos Dycks ou cadeias de montanhas.



Fonte: Grimaldi (2012, p.272).

3. PROPRIEDADES DOS NÚMEROS DE NARAYANA

Além de algumas interpretações combinatórias que demos para os números de Narayana veremos agora que estes números satisfazem determinadas propriedades que são importantes para aplicação da definição e podem proporcionar um acréscimo de familiaridade com essa notação simbólica. Apresentamos, assim, o seguinte teorema:

Teorema 1. (Grimaldi, 2012): Para quaisquer inteiros n e k e de acordo com a definição do número de Narayana, temos as seguintes propriedades:

$$1.\ N(n,k)=N(n,n+1-k),\ n\geq k\geq 1 (\textit{propriedade}\text{ de simetria})$$

$$2.\ \binom{k+1}{2}N(n+1,k+1)=\binom{n+1}{2}N(n,k),\ n\geq k\geq 0 (\textit{propriedade}\text{ de absorção})$$

$$3.\ \binom{n}{k-1}N(n,k+1)=\binom{n}{k+1}N(n,k),\ n\geq k\geq 1$$

$$4.\ \binom{n-k+2}{2}N(n+1,k)=\binom{n+1}{2}N(n,k),\ n\geq k\geq 1$$

$$5.\ (n+1).N(n,k)=(n-1).\left[N(n-1,k-1)+N(n-1,k)\right]+2\binom{n-1}{k-1}^2,\ n\geq k\geq 2$$

$$6. N(n+1,k+1)=\binom{n}{k}^2-\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}, n\geq k\geq 1$$

Neste trabalho iremos demonstrar as propriedades 5 e 6. A propriedade 5 nos permitirá usar o importante resultado: $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$, para n $\geq$r $\geq$1. A propriedade 6 será útil para a demonstração da importante identidade: $N(n,1)+N(n,2)+N(n,3)+...+N(n,n)=\sum_{k=1}^{n} N_{n,k}=C_n$. A seguir daremos as demonstrações das propriedades 5 e 6.

Demonstração da propriedade 5: Temos que:

$$(n-1)[N(n-1,k-1)+N(n-1,k)]+2\binom{n-1}{k-1}^2$$

$$=(n-1)\left[\frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k-2}+\frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}\right]+2\binom{n-1}{k-1}^2$$

$$=\binom{n-1}{k-1}\left[\binom{n-1}{k-2}+\binom{n-1}{k}\right]+2\binom{n-1}{k-1}^2$$

$$=\binom{n-1}{k-1}\left[\binom{n-1}{k-2}+2\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]$$

$$=\binom{n-1}{k-1}\left\{\left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-2}\right]+\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\right\}$$

$$=\binom{n-1}{k-1}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]=\binom{n-1}{k-1}\binom{n+1}{k}=\binom{n+1}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=(n+1)\frac{n!}{k!(n+1-k)!}\frac{n}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=(n+1)\left(\frac{1}{n}\right)\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}$$

$$=(n+1)\left(\frac{1}{n}\right)\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}=(n+1)N(n,k), \quad n\geq k\geq 2.$$

Para a demonstração da propriedade 6 devemos observar que:

$$N(n+1,k+1)=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{n+1}{k+1}\binom{n+1}{k}$$

$$=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$=\frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!}\frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n+1)}{(k+1)(n+1-k)}$$

$$=\binom{n}{k}^2\frac{n+1}{(k+1)(n+1-k)}$$

Assim,

$$\binom{n}{k}^2-\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}$$

$$=\binom{n}{k}^2-\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{k}{k}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$=\binom{n}{k}^2-\frac{n!k}{k!(n-k+1)(n-k)!}\frac{n!(n-k)}{(k+1)k!(n-k)!}$$

$$=\binom{n}{k}^2-\binom{n}{k}^2\frac{k(n-k)}{(n-k+1)(k+1)}$$

$$=\binom{n}{k}^2\left[1-\frac{k(n-k)}{(n-k+1)(k+1)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^2\left[\frac{(n-k+1)(k+1)}{(n-k+1)(k+1)}-\frac{k(n-k)}{(n-k+1)(k+1)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^2\left[\frac{nk-k^2+k+n-k+1-kn+k^2}{(n-k+1)(k+1)}\right]$$

$$=\binom{n}{k}^2\frac{n+1}{(n-k+1)(k+1)}=\binom{n}{k}^2\frac{n+1}{(k+1)(n-k+1)}.$$

Portanto,

$$N(n+1,k+1)=\binom{n}{k}^2-\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1},\quad n\geq k\geq 1.$$

Na seção seguinte iremos demonstrar uma importante identidade que relaciona os números de Narayana com os números de Catalan.

4. IDENTIDADE DE NARAYANA

Nesta seção iremos provar a seguinte identidade:

$N(n,1)+N(n,2)+N(n,3)+...+N(n,n)=\sum_{k=1}^{n} N_{n,k}=C_n$, onde C_n é conhecido como sendo o número de Catalan, definido por: $C_n=\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}$. Antes de demonstrarmos essa importante identidade precisamos verificar dois lemas que serão enunciados a seguir:

Lema 1 (Identidade de Lagrange): Este resultado é nomeado após o famoso matemático francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Para n ≥ 0,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Prova**:** A partir do teorema binomial, sabemos que o coeficiente de x^n em $(1 + x)^{2N}$ é $\binom{2n}{n}$. No entanto, é também o caso que

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= (1+x)^n(1+x)^n \\ &= \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n\right] \\ &\quad\cdot\left[\binom{n}{0}+\dots+\binom{n}{n-2}x^{n-2}+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n\right],\end{aligned}$$

onde o coeficiente de x^n é $\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$ Desde a $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ Segue-se que o coeficiente de x^n em $(1 + x)^{2N}$ é $\binom{n}{0}\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Consequentemente,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Um resultado parecido será mostrado a seguir:

Lema 2**:** Para n ≥ 0,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-2}=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-2}=\binom{2n}{n+2}.$$

Prova: A primeira igualdade segue porque $\binom{n}{-2} = \binom{n}{-1} = 0$. Para estabelecer a segunda igualdade, mais uma vez usar o teorema binomial. Na expansão de $(1 + x)^{2N}$, O coeficiente de x^{n+2} é $\binom{2n}{n+2}$. No entanto, desde

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

$$= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]$$

$$\cdot \left[\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n\right],$$

é também o caso que o coeficiente de x^{n+2} é

$$\binom{n}{2}\binom{n}{n} + \binom{n}{3}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{2}$$

$$= \binom{n}{2}\binom{n}{0} + \binom{n}{3}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{n-2}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k-2}.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k-2} = \binom{2n}{n+2}.$$

Os resultados dos Lemas 1 e 2, juntamente com a propriedade 6, agora irão nos ajudar a fornecer uma prova para o importante resultado que será enunciado no teorema a seguir:

Teorema**:** Para n ≥ 0,

$$\sum_{k=0}^{n} N(n,k) = C_n.$$

Prova**:** O resultado segue para n = 0 por N (0, 0) = 1 = C_0. Assim, a partir deste ponto, consideramos apenas n ≥ 1 e perceber que $\sum_{k=0}^{n} N(n,k) = \sum_{k=1}^{n} N(n,k)$ desde que N (n, 0) = 0 para n ≥ 1. Da propriedade 6, segue-se que

$$N(n,k) = \binom{n-1}{k-1}^2 - \binom{n-1}{k-2}\binom{n-1}{k},$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n} N(n,k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}^2 - \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-2}\binom{n-1}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 - \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-2}\binom{n-1}{k},$$

Porque $\binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{n} = 0$, E isso implica que $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2$. Do Lema 1 temos $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 = \binom{2(n-1)}{n-1}$, Enquanto que de acordo com o Lema 2 segue-se que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-2}\binom{n-1}{k} = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-2} = \binom{2(n-1)}{(n-1)+2} = \binom{2(n-1)}{n+1}.$$

Consequentemente, verificamos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} N(n,k) &= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n+1} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-3)!} \\
&= \frac{(n+1)(n)(2n-2)!}{(n+1)(n)(n-1)!(n-1)!} \\
&\quad - \frac{(n-1)(n-2)(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)(n-2)(n-3)!} \\
&= \frac{(n+1)(n)(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} - \frac{(n-1)(n-2)(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!}\left[n^2 + n - (n^2 - 3n + 2)\right] \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n+1)!(n-1)!}(4n-2) = \frac{2(2n-1)(2n-2)!}{(n-1)!(n+1)!} \\
&= \frac{2(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)(2n-1)!}{n(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.
\end{aligned}$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os números de Narayana possuem propriedades matemáticas importantes e aplicações em diversas áreas da Matemática, entre elas, Análise Combinatória, Estatística e outras. foram apresentadas algumas interpretações combinatórias dos números de Narayana para alguns exemplos que encontramos para os números de Catalan, como por exemplo, o fato desses números serem usados para contar certos caminhos de rede.

Descrevemos algumas propriedades importantes dos números de Narayana, entre elas propriedades de simetria e de absorção e apresentamos a demonstração de algumas dessas propriedades. Vale destacar que essas propriedades são importantes para a aplicação da definição do número de Narayana.

Dois Lemas são apresentados com o objetivo de ajudar a fornecer uma prova para uma importante identidade que relaciona os números de Narayana com os números catalães. Por fim demonstramos essa identidade que relaciona os números de Narayana com os números de Catalan.

Finalizamos este trabalho observando que a generalização dos números de Narayana não se esgota por aqui. Em Petersen (2015, p.273) ainda deparamos a noção abstrata de W-números de Narayana, que podem servir para futuras investigações envolvendo este assunto. Destacamos que esse assunto pode ser transformado em um conteúdo a ser ensinado, conforme observamos no trabalho de Alves (2018a), onde o autor através de uma determinada teoria de ensino propõe algumas situações didáticas a serem trabalhadas em sala de aula sobre os números(generalizados) de Catalan.

6. REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos números generalizados de Catalan (NGC). **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.2, p.47-83, 2018a.

BREMNER, Murray. **An Introduction to the Narayana Numbers**. Department of Mathematics and Statistics College of Arts and Science University of Saskatchewan1 Saskatoon, Saskatchewan, Canada. Combinatorics Seminar Tuesday 27 March 2018.

GRIMALDI, Ralph P. **Fibonacci and catalan numbers**: an introduction. New York: Wiley and Sons Publishers, 2012.

NARAYANA, Tadepalli, Venkata. 1953. 115 f. **Sequential procedures in probit analysis**. Thesis (Postgraduate in Philosophy and Statistics) - North Carolina University, Chapel Hill, 1953.

NARAYANA, T. V. **Lattice path combinatorics with statistical applications**; mathematical expositions 23. Toronto: University of Toronto Press, 1979.

NARAYANA, T. V. A partial order and its applications to probability theory. **Sankhya**, n.21, p.91-98, 1959.

PETKOVIĆ, Marko D. *et al*. Closed-form expression for hankel determinants of the narayana polynomials. **Czechoslovak Mathematical Journal**, v.62, n.137, p.39-57, 2012.

PETERSEN, T. Kyle. **Eulerien numbers**. New York: T. Kyle Petersen, 2015.

STANLEY, Richard P. **Catalan numbers**. New York: Cambridge University Press, 2015.

WEHRHAHN, Karl H. Applications of Narayana's formula. **Australasian Journal of Combinatorics**, n.11, p.44-57, 1955.

Submetido em: **25/09/2019**

Aceito em: **08/06/2020**