Revista Thema
v.16 | n.4 | 2019
p.755-773

DOI: http://dx.doi.org/10.15536/thema.V16.2019.755-773.1564
ISSN: 2177-2894 (online)

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Brahmagupta e alguns elementos históricos da matemática hindu

Brahmagupta and some historical elements of Hindu Mathematics

Francisco Regis Vieira Alves[1]

RESUMO

Deparamos nos livros de História da Matemática, de modo predominante, um discurso essencialmente europeu e que descortina os processos de gênese matemática de uma cultura epistemológica apenas no Ocidente. Por outro lado, ainda observamos pouca divulgação científica da matemática produzida pelos indianos, pouco presente nos compêndios de História da Matemática. Dessa forma, no presente trabalho, abordamos alguns elementos de ordem histórica e matemática do matemático indiano Brahmagupta Sphuta Siddhânta. Como elementos principais do trabalho, discutimos algumas ideias introduzidas de forma pioneira por Brahmagupta, concernentes ao processo de composição e determinação de solução de equações diofantinas do tipo $Dx^2 \pm k = y^2$. Alguns vestígios da contribuição matemática do mesmo e, por fim, uma breve indicação de pesquisa e interesse atual de especialistas e matemáticos profissionais sobre a generalização de algumas de suas ideias.

Palavras-chave: História da Matemática; Matemática indiana; Equações de Brahmagupta.

ABSTRACT

In the History of Mathematics books, we find a predominantly European discourse that reveals the processes of mathematical genesis of a culture with epistemological genesis only in the West. On the other hand, we still observe little scientific dissemination of the mathematics produced by the Indians, concerning the History of Mathematics compendia. Thus, in the present work, we approach some historical and mathematical elements of the Indian mathematician Brahmagupta Sphuta Siddhânta. As main elements of the work, we discuss some ideas pioneered by Brahmagupta, concerning the process of composing and determining the solutions for the diophantine equation $Dx^2 \pm k = y^2$*, some traces of its mathematical contribution and, finally, a brief indication of research and current interest of experts on generalizing some of your ideas.*

Keywords: *History of Mathematics, Hindu mathematics, Brahmagupta´s equations.*

[1] Docente do Programa Acadêmico de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGEC/IFCE. Docente do Programa Profissional de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – ENCIMA/UFC. Docente do Programa Profissional de pós-graduação em Educação Profissional e Tecnológica – PROEPT/IFCE – BRASIL. E-mail: fregis@ifce.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Segundo Puttaswamy (2000, p.415), Brahmagupta Sphuta Siddhânta nasceu em 598 a.C. e escreveu a celebrada obra intitulada *Briihmasphutasiddhiinta* e que foram traduzidos para o inglês por H. T. Colebrooke (1765-1837), envolvendo 1000 versos distribuídos em 24 capítulos. (DUTTA, 2002, p.7). Ele foi o primeiro matemático indiano a introduzir zero como dígito. Isto foi traduzido para o árabe com o título Sindhind. O segundo livro tem 194 *slokas* e trata de cálculos astronômicos em 9 capítulos. Ele certamente era um matemático de preeminência por vezes, mas ele também tinha o hábito de criticar fortemente seus antecessores por algumas de suas falhas e omissões. (PRANESACHAR, 2012).

Puttaswamy (2000) assinala o interesse de Brahmagupta por triângulos retângulos, cujos lados são racionais e forneceu, também, uma solução geral da terna (a,b,c), do tipo indicado por $a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$, onde m,n são números racionais. Para o problema de construção de um triângulo retângulo, por exemplo, com os lados racionais, dado um lado arbitrário 'a', o matemático Brahmagupta produziu a solução $a, \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n} - n\right), \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n} + n\right)$, aonde n é um número racional diferente de zero. (PUTTASWAMY, 2000, p.415).

Outro interesse desenvolvido Brahmagupta envolveu o estudo das soluções de equações diofantinas. Reconhecidamente, o matemático indiano foi responsável pela introdução de ideias mais gerais sobre regras de composição das soluções de uma equação, todavia, apenas alguns casos particulares foram resolvidos pelo mesmo, como verificaremos nas seções vindouras. No trecho, em seguida, podemos compreender algumas das noções matemáticas abstratas introduzidas pelo matemático indiano Brahmagupta, como explica Dutta (2017) a seguir.

> Em Matemática, uma lei de composição combina (isto é, "Compõe") dois objetos matemáticos de um certo tipo para produzir um terceiro objeto do mesmo tipo; por exemplo, pode combinar duas soluções de uma determinada equação para gerar um terceiro solução da equação, ou pode combinar dois polinômios e/ou expressões de uma forma particular para produzir outra expressão da mesma forma. (DUTTA, 2017, p.13).

Acima observamos as considerações do autor sobre a contribuição de Brahmagupta em termos de ideias matemáticas, todavia, para adquirir uma compreensão realmente significativa sobre a Matemática indiana, observamos o caráter de imprescindibilidade para atentarmos, por exemplo, para elementos marcadamente culturais e religiosos advindo da cultura indiana ou hindu.

2. ALGUNS ELEMENTOS DE ORDEM HISTÓRICA DA MATEMÁTICA INDIANA

Plofker (2007, p.10) comenta que, de modo geral, a literatura *sanskrita* pode ser referida como um "oceano de conhecimentos", observada como uma "apropriada metáfora da vasta abundância de assuntos compreendidos pelas variações da literatura *sanscrita*". Os textos *Vedas* sagrados, cujo nome literalmente significa "conhecimento", são muitas vezes considerados o fundamento da e para a aprendizagem. (Plofker, 2007, p.10). Além de enfatizar o significado da palavra falada, o sânscrito, segundo as tradições intelectuais, geralmente consideram que o conhecimento se baseia e se fundamenta em ensinamentos realmente divinos. O verdadeiro conhecimento de qualquer tipo era necessariamente parte da verdade fundamental dos *Vedas*. (DATTA; SINGH, 1938).

Plofker (2007) comenta problemas e entraves substanciais oriundos da tentativa de sua tradução, por parte de especialistas ocidentais, como vislumbramos logo abaixo no excerto.

> [...] Os estudiosos europeus que encontraram textos matemáticos indianos nos séculos XVIII e XIX freqüentemente estavam completamente à deriva em relação as idades dos textos, suas inter-relações e até mesmo suas identidades. O grande número de tais obras e a incerteza envolvendo até mesmo a cronologia básica da literatura sânscrita deu origem a uma grande confusão, grande parte que sobrevive até hoje em discussões sobre matemática indiana. Essa confusão foi agravada pelo fato de que autores de diferentes métodos matemáticos e textos, por vezes, possuíam o mesmo nome e textos diferentes às vezes tinha o mesmo título. Mesmo quando os tratados mais conhecidos foram resolvidos com profundida, no início do século XIX, os historiadores ainda tinha muitos problemas vexatórios para enfrentar. Muito matemática do material estava incorporado no contexto muito desconhecido da astronomia indiana medieval e astrologia. O estilo de sua apresentação, em alta compressão do Verso sânscrito, era igualmente alienígena. No entanto, o material também possuem muitas semelhanças, desde seus números decimais até suas fórmulas trigonométricas, a certas características da matemática ocidental. (PLOFKER, 2007, p.1-2).

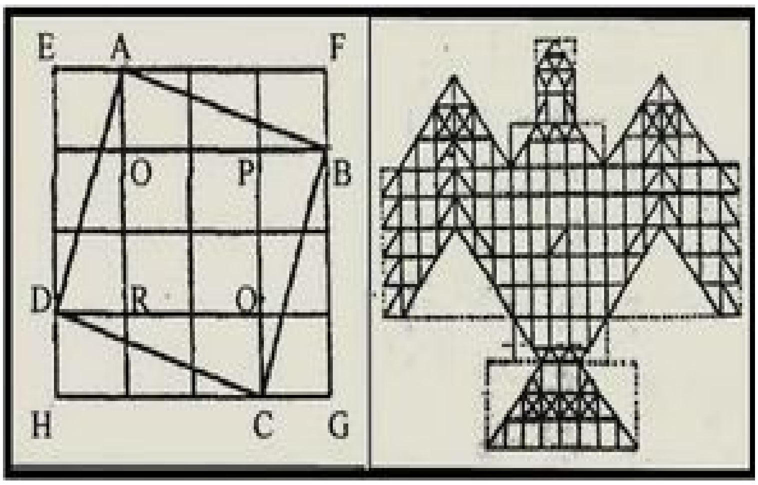
Bag (1977) assinala a contribuição de vários matemáticos hindus, dentre eles destacamos: Aryabhata (476, a.C.), Bhaskara I, Bhaskara II, Narayana, Kamalakara *etc*. Logo em seguida, registramos que Datta e Singh (1938) comentam a contribuição hindu visando a introdução de determinadas idéias e operações matemáticas hindus, como depreendemos do trecho.

> Os hindus em sua aritmética definem zero como o resultado da operação. Essa definição é encontrada no trabalho de Brahmagupta e é repetido em todos os trabalhos posteriores. É usado diretamente na operação de subtração. Na execução de operações aritméticas, são necessários os resultados das operações de adição, subtração e multiplicação de zero e por zero. Os hindus não reconheceram a operação de divisão por zero como válida em aritmética; mas a divisão de zero por um número foi reconhecida como válida. (DATTA; SINGH, 1938, p.239).

Dutta (2002) explica que no período védico, segundo a cultura indiana, a existência de antigos textos, dentre ele o *Sulbasutras*, composto em 800 a.C. O conhecimento matemático presente nesse texto data ainda mais anterior e que se constituem como a discussão de determinados fatos propostos pelos *Brahmanas* e *Samhitas*, segundo a literatura védica. O antigo texto *Sulbasutras* apresenta várias compilações e orientações para a construção de altares religiosos, com profunda importância na cultura indiana. Na figura abaixo, divisamos alguns elementos matemáticos presente no texto *Sulbasutras* e, ao lado direito, um exemplo de plano descritivo para a construção do altar do falcão. Segundo Dutta (2002, p.5), no antigo texto *Sulbasutras* encontramos aplicações do teorema de Pitágoras e vários outros métodos de contrução de figuras. Algumas dessas construções envolvem aplicação de princípios derivados de identidades matemáticas que conhecemos atualmente por: $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab, a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$,

$n \cdot a^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 b^2$ etc. Na figura abaixo visualizamos dois exemplos discutidos por Dutta (2002) que demonstram aplicações práticas de resultados elementares da Geometria Plana.

Figura 1 – Dutta (2002) fornece vários exemplos da cultura matemática indiana fortemente impregnada pelos elementos de ordem religiosa.

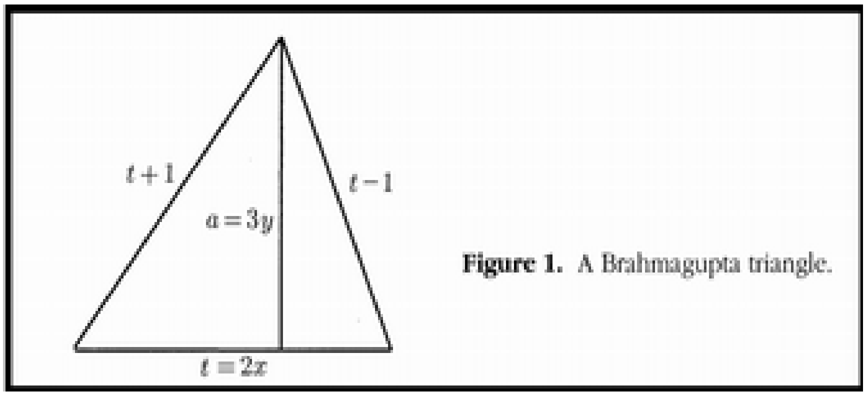


Fonte: Dutta (2000).

Beauregard e Suryanarayan (1998, p.13) comentam que Brahmagupta analisou uma extensa classe de triângulos, cuja área se podia determinar por intermédio da fórmula de Heron, que conhecemos por $\Delta = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2}$. Os autores comentam que o mesmo determinou um conjunto de triângulos heroninanos, com lados consecutivos, que observamos na lista: $(3,4,5),(13,14,15),(51,52,53),(193,194,195),(723,724,725),(2701,2702,2703),(10083,10084,1008),$ $(37633,37634,37635)$. O método pelo qual Brahmagupta determinou tais valores, entretanto, envolve um completo mistério, segundo Beauregard e Suryanarayan (1998, p.13).

Para exemplificar, vamos considerar um triângulo de Brahmagupta com lados $(t-1,t,t+1)$, onde t é um inteiro positivo. Na figura 1, Beauregard e Suryanarayan (1998) consideram um triângulo de Brahmagupta. Seu semi perímetro será dado por $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{t-1+t+t+1}{2} = \frac{3t}{2}$. E, pela fórmula de Heron, podemos determinar que $\Delta = \frac{t}{2}\sqrt{3\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right]}$. Beauregard e Suryanarayan (1998, p.14) impõem a hipótese adicional que a área Δ deve ser um inteiro e, como consequência, sua respectiva altura deverá ser um múltiplo de 3. Com efeito, desde que $\Delta = \frac{t}{2}\sqrt{3\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right]} \leftrightarrow 4\Delta^2 = t^2 3\left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1\right]$ e podemos determinar que $16\Delta^2 = 3t^2(t^2-4)$. Com origem na figura 1, sabemos que sua área é dada ainda pela fórmula $\Delta = \frac{a \cdot t}{2}$ e, efetivando a substituição correspondente, encontraremos ainda que $16\Delta^2 = 16\frac{a^2 \cdot t^2}{4} = 4a^2 \cdot t^2 = 3t^2(t^2-4) \leftrightarrow 4a^2 = 3(t^2-4)$.

Figura 2 – Beauregard e Suryanarayan (1998) discutem propriedades de um triângulo de Brahmagupta.



Fonte: Beauregard e Suryanarayan (1998).

Na etapa seguinte, Beauregard e Suryanarayan (1998, p.14) consideram os casos em que t é par ou ímpar. Se $t = 2x+1$ é ímpar, a partir da expressão $4a^2 = 3(t^2-4) \leftrightarrow 4a^2 = 3(4x^3+4x+1-4) =$ $= 3(4x^3+4x-3)$, isto é, a expressão correspondente ao lado direito fornece sempre um número ímpar $3\cdot(4x^3+4x-3)$, todavia, ao lado esquerdo, temos o número par $4a^2$. Por conseguinte, a única possibilidade a ocorrer é quando $t = 2x$, então poderemos escrever a expressão $4a^2 = 3(4x^2-4) \leftrightarrow a^2 = 3(x^2-1)$ e a área do triângulo $\Delta = a \cdot x$, ou seja, temos que $a = \frac{\Delta}{x}$ é um número racional. Todavia, desde que $a^2 = 3\cdot(x^2-1)$ que corresponde a um inteiro e, consequentemente, o termo a deve ser também um inteiro e múltiplo de 3. Finalmente, Beauregard e Suryanarayan (1998, p.14) consideram a seguinte substituição indicada por $a = 3y$ e determinam, em seguida, a seguinte equação particular $9y^2 = 3\cdot(x^2-1) \leftrightarrow x^2-3y^2 = 1$ o que produz/representa a emblemática equação de Pell e que se consubstancia por um caso particular resolvido por Brahmagupta. Junod (2015) descreve o comentário a seguir.

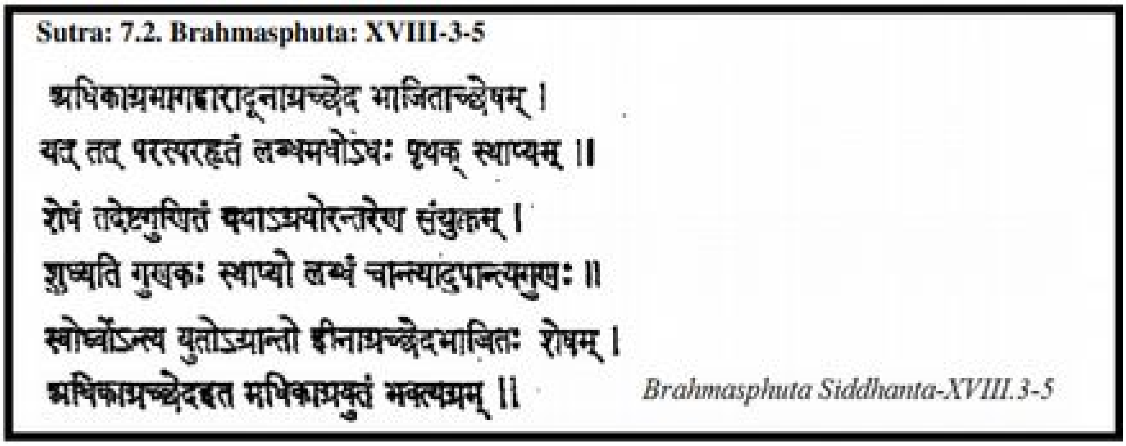
> A partir de uma solução da equação (x, y) da equação $x^2 - n\cdot y^2 = \varepsilon, \varepsilon \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$. Brahmagupta (598−668) encontrou solução, para o caso (x', y'), com $x' > x, \varepsilon = 1$ e que podem ser deduzidas infinitas soluções a partir desse caso. Depois, Bhaskara II (1114−1185) desenvolveu o algoritmo cíclico, chamado método *chakravala*, para produzir solução para a equação $x^2 - n\cdot y^2 = 1$. Esse tópico interessou aos matemáticos europeus, ignorando o trabalho dos matemáticos indianos, após um desafio proposto em 1657 por Pierre de Fermat (1601−1665). (JUNOD, 2015, p.1).

Antes de finalizarmos, atentamos para as explicações de Junot (2015) que observa que equações do tipo $x^2 - n \cdot y^2 = \pm 1$, onde 'n' é um termo livre de quadrado, foram estudadas por vários matemáticos indianos, todavia, seu trabalho foi desconsiderado pelos matemáticos europeus. Van der Waerden (1983, p.147), por exemplo, explica que no livro de abordagem sobre Astronomia, presente em um livro de Brahmagupta, no século XVIII, incluindo a solução de equação diofantinas e, em linguagem moderna, a solução da equação de Pell, em sua forma geral $Dx^2 \pm c = y^2$ e que não recebeu o devido reconhecimento. Em sua tese de doutorado, Rama (2017, p.241) comenta o seguinte procedimento comentado em forma de verso: "O restante encontrado da divisão do divisor (a) relacionado ao restante maior (R1) ao divisor (b) relacionado ao restante menor (R2) é dividido mutuamente e os quocientes são dispostos um abaixo do outro".

Na figura 3 observamos um verso descrito por Brahmagupta em seu manuscrito e que, do ponto de vista matemático, envolve o seguinte algoritmo da divisão:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q + r_1 \\ b &= r \cdot q_1 + r_2 \\ r &= r_1 \cdot q_2 + r_3 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\ &\vdots \quad \vdots \\ r_n &= r_{n+1} \cdot q_{n+2} + r_{n+2} \end{aligned}.$$

Figura 3 – Rama (2017) comenta e explica alguns versos de Brahmagupta envolvendo operações.



Fonte: Rama (2017).

No próximo segmento, abordaremos algumas propriedades matemáticas que envolvem um engenhoso e inovador processo de geração de soluções infinitas introduzido por Brahmagupta para equações diofantinas e que, segundo Pranesachar (2012, p.252) foram "exploradas por matemáticos europeus e agora se mostram interessantes para os teóricos dos números e as frações contínuas funcionam de modo fundamental".

3. IDEIAS E PROPRIEDADES INTRODUZIDAS POR BRAHMAGUPTA

Na presente seção, consideraremos a equação quadrática indeterminada $Dx^2 \pm k = y^2$, com a condição de que $D > 0$. Neste caso, Murthy (2009, p.103) considera que D, c são números inteiros dados e o número D é diferente do quadrado de um número. Murthy (2009, p.108) explica que o método de Brahmagupta para encontrar uma solução geral, em termos de inteiros positivos, para a equação $Dx^2 + 1 = y^2$, onde $D > 0$ é diferente de um quadrado.

Mishra (2014, p.14) explica que "Brahmagupta e outros não possuíam métodos para resolver a equação $Dx^2 + k = y^2$, ao menos nos casos de $k = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Todavia, Bhāskara superou tal deficiência pela introdução do método *cakravāla* ou método cíclico", por causa do seu caráter interativo. Nosso primeiro teorema envolve "um princípio enunciado pela primeira vez por Brahmagupta e que equivale ao moderno princípio da composição de formas quadráticas." (AYYANGAR, 1931, p.9-10). Dutta (2017, p.13) explica que "o termo sânscrito bhāvanā era empregado pelos antigos algebristas indianos para nomear o princípio de composição introduzido por Brahmagupta" e exemplificaremos seu princípio no teorema 1.

Teorema 1 (Brahmagupta – Bhãvanã): O espaço de soluções para a equação $Dx^2 + k = y^2$ admite as seguintes operações $(x_1, y_1, m_1) \odot (x_2, y_2, m_2) = (x_1 y_2 \pm x_2 y_1, Dx_1 x_2 \pm y_1 y_2, m_1 \cdot m_2)$. Em outra palavras, se temos duas soluções indicadas por (x_1, y_1, m_1) e (x_2, y_2, m_2) são soluções da equação $Dx^2 + k = y^2$, então são ainda soluções seguintes $(x_1 y_2 + x_2 y_1, Dx_1 x_2 + y_1 y_2, m_1 \cdot m_2)$ e $(x_1 y_2 - x_2 y_1, Dx_1 x_2 - y_1 y_2, m_1 \cdot m_2)$. (Dutta, 2017, p.78).

Teorema 2 (Brahmagupta – Bhãvanã): Se $Dx^2 - 4 = y^2$, então $x = pqr, y = (q^2 + 1)(r - 1)$ satisfazem a equação, em que $r = \frac{1}{2}(q^2 + 3)(q^2 + 1)$.

Prova: (Dutta, 2017, p.14) orienta empregar, como sugestão, o método bhāvanā, introduzido por Brahmagupta, para a terna $(p, q, -4)$.

A partir dessa descrição, Dutta (2017) comenta que as identidades de Brahmagupta que ficaram conhecidas pela seguinte formulação $(y_1^2 - Dx_1^2)(y_2^2 - Dx_2^2) = (Dx_1 x_2 \pm y_1 y_2)^2 - D(x_1 y_2 \pm x_2 y_1)^2$. "Tal resultado foi descoberto por Euler no meio do século XVIII. Euler em seus escritos, nominou como *teorema eximium.*" (DUTTA, 2002, p.78). Vejamos, em seguida, a descrição de alguns lemas que nos auxiliam na compreensão dos teoremas acima.

Lema 1 (Princípio da composição – Brahmagupta): Se $(x, \mathrm{y}) = (\alpha, \beta)$ é uma solução da equação da forma $Dx^2 + k = y^2$ e $(x, \mathrm{y}) = (\alpha', \beta')$ é uma solução da equação $Dx^2 + k' = y^2$.

Então, as expressões dadas pelas expressões $(x,y)=\begin{cases}(\alpha\beta'+\alpha'\beta,\beta\beta'+D\alpha\alpha')\\(\alpha\beta'-\alpha'\beta,\beta\beta'-D\alpha\alpha')\end{cases}$ são soluções para a equação $Dx^2+k\cdot k'=y^2$.

Prova: Tendo em vista nossas hipóteses iniciais, vamos considerar as equações $k=y^2-Dx^2$ e $k'=y^2-Dx^2$, com soluções respectivas indicadas por $(x,y)=(\alpha,\beta)$ e $(x,y)=(\alpha',\beta')$. Vamos, então, tomar a expressão $(x,y)=(\alpha\beta'+\alpha'\beta,\beta\beta'+D\alpha\alpha')$. Em seguida, vejamos que $y^2-Dx^2=$ $=(\beta\beta'+D\alpha\alpha')^2-D(\alpha\beta'+\alpha'\beta)^2=(\beta^2\beta'^2+D^2\alpha^2\alpha'^2+2\beta\beta'D\alpha\alpha')-D(\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2+2\alpha\beta'\alpha'\beta)$ $=\beta^2\beta'^2+D^2\alpha^2\alpha'^2+2D\beta\beta'\alpha\alpha'-D\alpha^2\beta'^2-D\alpha'^2\beta^2-2D\beta\beta'\alpha\alpha'=\beta^2\cdot\beta'^2-D\alpha^2\cdot\beta'^2+D^2\alpha^2\alpha'^2-D\alpha'^2\beta^2$ $=\beta'^2(\beta^2-D\alpha^2)+D\alpha'^2(D\alpha^2-\beta^2)=\beta'^2(\beta^2-D\alpha^2)-D\alpha'^2(\beta^2-D\alpha^2)=(\beta'^2-D\alpha'^2)\cdot(\beta^2-D\alpha^2)=$ $=k\cdot k'$. Repetiremos o mesmo procedimento, tomando agora $(x,y)=(\alpha\beta'-\alpha'\beta,\beta\beta'-D\alpha\alpha')$. De fato, vejamos que $y^2-Dx^2=(\beta\beta'-D\alpha\alpha')^2-D(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2=\beta^2\beta'^2+D^2\alpha^2\alpha'^2-2\beta\beta'\alpha\alpha'D$ $-D(\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2-2\beta\beta'\alpha\alpha')=\beta^2\beta'^2+D^2\alpha^2\alpha'^2-\alpha^2\beta'^2D-\alpha'^2\beta^2D=\beta^2\beta'^2-\alpha^2\beta'^2D+D^2\alpha^2\alpha'^2-$ $\alpha'^2\beta^2D=(\beta^2-D\alpha^2)\cdot\beta'^2+D\alpha'^2(D\alpha^2-\beta^2)=(\beta^2-D\alpha^2)\cdot\beta'^2-D\alpha'^2(\beta^2-D\alpha^2)=(\beta^2-D\alpha^2)\cdot$ $(\beta'^2-D\alpha'^2)=k\cdot k'$, isto é, encontramos uma solução $(\alpha\beta'-\alpha'\beta,\beta\beta'-D\alpha\alpha')$ para a equação indicada por $Dx^2+k\cdot k'=y^2$. □

Lema 2 (Brahmagupta): Se $(x,y)=(\alpha,\beta)$ é uma solução da equação da forma $Dx^2+k=y^2$, então $(x,y)=(2\alpha\beta,\beta^2+D\cdot\alpha^2)$ é ainda uma solução para a equação da forma $Dx^2+k\cdot k=y^2$.

Prova: Repetindo o procedimento anterior do lema 1, podemos verificar que temos ainda $y^2-Dx^2=(\beta^2+D\cdot\alpha^2)^2-D\cdot(2\alpha\beta)^2=\beta^4+D^2\cdot\alpha^4+2\alpha^2\cdot\beta^2D-4\cdot\alpha^2\beta^2D=\beta^4+D^2\cdot\alpha^4-2\cdot\alpha^2\beta^2D$ $=\beta^4-2\cdot\alpha^2\beta^2D+\alpha^4D^2=(\beta^2-D\alpha^2)^2=k^2$, ou seja, vale que $y^2-Dx^2=k^2$. Cabe observar que, a partir do lema 1, uma solução geral indicada por $(\alpha\beta'+\alpha'\beta,\beta\beta'+D\alpha\alpha')$, se tomarmos $(x,y)=(\alpha,\beta)=(\alpha',\beta')$, determinaremos que $(\alpha\beta+\alpha\beta,\beta\beta+D\alpha\alpha)=(2\alpha\beta,\beta^2+D\cdot\alpha^2)$. □

Lema 3 (Brahmagupta): Se $(x,y)=(\alpha,\beta)$ é uma solução da equação da forma $Dx^2+k^2=y^2$, de forma que $k\backslash\alpha$ e $k\backslash\beta$, então $(x,y)=(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k})$ é uma solução da equação $Dx^2+1=y^2$.

Prova: Basta considerar os elementos $(\alpha',\beta')=(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k})$ e, em seguida, observar que teremos $(\beta')^2-D(\alpha')^2=\left(\frac{\beta}{k}\right)^2-D\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2=\frac{\beta^2-D\alpha^2}{k^2}=\frac{k^2}{k^2}=1$, ou seja, temos que $(x,y)=(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k})$ é uma solução para $Dx^2+1=y^2$. □

Lema 4 (Brahmagupta): Se duas soluções da equação $Dx^2+k^2=y^2$ são conhecidas, então qualquer outra solução pode ser determinada pelo princípio da composição.

Prova: Basta empregar os lemas 1, 2 e/ou 3. □

Lema 5 (Swamy, 1998): Se $(x,y)=(\alpha,\beta)$ é uma solução da equação da forma $x^2-Dy^2=\pm d\cdot k^2$, tais que $k\backslash\alpha, k\backslash\beta$ então $(\alpha',\beta')=(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k})$ é uma solução de $x^2-Dy^2=\pm d$.

Prova: Vamos considerar $(x,y)=(\alpha,\beta)$ é uma solução da equação da forma $x^2-Dy^2=\pm d\cdot k^2$, tais que $k\backslash\alpha, k\backslash\beta$. No passo seguinte, verificaremos o comportamento do termo $(\alpha',\beta')=(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k})$. De fato, basta notar que $\left(\frac{\alpha}{k}\right)^2-D\left(\frac{\beta}{k}\right)^2=\frac{\alpha^2-D\beta^2}{k^2}=\frac{\pm d\cdot k^2}{k^2}=\pm d$. □

Swamy (1998, p.125) comenta que, como consequência dos lemas anteriores, podemos verificar que $x^2-Dy^2=1$ é sempre solúvel por inteiros, enquanto que, a equação $x^2-Dy^2=-1$ não possui inteiros como solução, a menos que o termo D seja expresso como soma de quadrados, e foi verificado por Bhaskara, conforme explica Swamy (1998).

Na seção subsequente empregaremos alguns dos resultados indicados há pouco com o escopo de compreender o emprego e a operacionalidade das ideias introduzidas por Brahmagupta.

4. EXEMPLOS E APLICAÇÕES DO MÉTODO DE BRAHMAGUPTA

Vamos considerar a seguinte equação $92x^2+1=y^2$. O método de Brahmagupta consiste em determinar uma solução inicial (α,β) para a equação $92x^2+1=y^2$. Assim, vamos verificar que ocorre $92\cdot 1^2+8=10^2$, correspondente com a seguinte equação $92x^2+8=y^2$. Dessa forma, vamos considerar a tripla $(x_1,y_1,m_1)=(1,10,8)$ e, aplicando o princípio da composição consigo mesma, devemos encontrar que $(1,10,8)\odot(1,10,8)=(1\cdot 10+10\cdot 1, 92\cdot 1\cdot 1+10\cdot 10, 8\cdot 8)=(20,192,64)$. Agora, reparemos que a tripla $(20,192,64)$ correspondente a solução da seguinte equação $92x^2+64=y^2$, tendo visto que $92\cdot 20^2+64=192^2$. Em seguida, a partir do lema 3, podemos considerar a seguinte expressão $92\cdot\frac{20^2}{8^2}+\frac{64}{8^2}=\frac{192^2}{8^2}\leftrightarrow 92\cdot\frac{2^2\cdot 5^2}{8^2}+1=\frac{192^2}{8^2}=576=(24)^2$. Ou ainda, encontramos a expressão $92\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+1=(24)^2$ e que equivale a determinar uma solução não inteira para $92x^2+1=y^2$. Em seguida, aplicando de novo o princípio da composição, relativa à solução $(\frac{5}{2},24,1)$ escrevemos: $(\frac{5}{2},24,1)\odot(\frac{5}{2},24,1)=(\frac{5}{2}\cdot 24+\frac{5}{2}\cdot 24, 92\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}+24\cdot 24)=(120,1151;1)$. Por conseguinte, encontramos agora que $x=120$ e $y=1151$ é outra solução inteira para a equação $92x^2+1=y^2$. Dutta (2017, p. 14) explica, por exemplo, que "a ideia de Brahmagupta envolve também determinar soluções mais gerais para a equação $92x^2+z=y^2$ e que ajuda a determinar soluções particulares para $92x^2+1=y^2$."

Vamos considerar a equação $2x^2+1=y^2$ e, facilmente, encontramos uma primeira solução $(\alpha,\beta)=(2,3)$. Analogamente, se considerarmos a equação $3x^2+1=y^2$, encontramos uma primeira solução $(\alpha,\beta)=(1,2)$. Por intermédio do método de Brahmagupta podemos determinar infinitas soluções do tipo indicado $(12,17),(77,90),(408,577),\ldots$. Enquanto que no segundo caso, determinamos infinitas soluções indicadas agora por $(4,7),(15,26),(56,97),\ldots$.

No caso de $61x^2+1=y^2$, o matemático indiano Bhaskara II encontrou uma menor solução no século XII a. C. dada por (223 153 980; 1766 319 049), todavia, com o uso do método indiano chamado de "*chakravala*". Vejamos as seguintes instruções indicadas por Bhaskara, no livro II: Que quadrado, cuja multiplicação encontramos 8 e junto com a unidade é um quadrado? Que quadrado, cuja multiplicação encontramos 8 e junto com a unidade é um quadrado?

A partir do primeiro questionamento, podemos escrever que $8x^2+1=y^2$ e, do segundo questionamento proposto pelo antigo matemático indiano, estabelecemos que $11x^2+1=y^2$. Para a primeira equação, por inspeção, depreendemos que $(\alpha,\beta)=(1,3)$ são uma solução particular para a equação $8x^2+1=y^2$, aonde $k=1$. Assim, tendo em vista o Lemma 2, sabemos que $(x,\mathrm{y})=(2\alpha\beta,\beta^2+D\cdot\alpha^2)$ constitui uma outra solução a equação $8x^2+1^2=y^2$. De fato, basta ver que $(x,\mathrm{y})=(6,3^2+8\cdot1^2)=(6,17)$. De fato, verificamos que ocorre $8\cdot6^2+1^2=289=17^2$.

5. REPERCURSSÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DE BRAHMAGUPTA

Brahmagupta, um matemático mais talentoso, viveu durante o período medieval e foi responsável pela criação de uma boa matemática na forma geométrica de teoremas e de resultados teóricos na Teoria dos Números. Pranesachar (2012) fornece as seguintes considerações.

> Brahmagupta ocupa uma posição única na história da matemática indiana antiga. Ele contribuiu com resultados tão elegantes para a Geometria e a Teoria dos Números que os matemáticos de hoje ainda se surpreendem com sua originalidade. Seus teoremas que levam ao cálculo do perímetro de um triângulo e do comprimento das diagonais de um quadrilátero cíclico, construção de um quadrilátero cíclico racional e soluções inteiras para uma única equação de segundo grau são certamente as características de um gênio. (PRANESACHAR, 2012, p.247).

Mais recentemente, Swryanarayan (1996) considerou a equação $x^2=t\cdot y^2\pm m$, em que t é um inteiro livre de quadrados. Considerou duas soluções indicadas por $(x_1,y_1,m_1),(x_2,y_2,m_2)$ e, tendo em vista os teoremas anteriores, sabemos que $(x_1x_2\pm t\cdot y_1y_2,x_1y_2\pm y_1x_2,m_1m_2)$ é ainda uma solução e que, considerando a seguinte matriz $B(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ \pm t\cdot y & \pm x \end{pmatrix}$ e a respectiva regra de multiplicação pode ser verificada pela matriz $B(x,y)$. Reparemos que temos ainda que

$\det B(x,y) = \det\begin{pmatrix} x & y \\ \pm t \cdot y & \pm x \end{pmatrix} = m$. Vejamos a seguinte propriedade indicada por Swryanarayan (1996) no lema abaixo.

Lema: Sendo a matriz Brahmagupta $B(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ \pm t \cdot y & \pm x \end{pmatrix}$, valem as relações.

(i) $B(x_1,y_1) \cdot B(x_2,y_2) = B(x_1x_2 \pm t \cdot y_1y_2, x_1y_2 \pm y_1x_2)$; (ii) $\det[B(x_1,y_1) \cdot B(x_2,y_2)] = m_1 \cdot m_2$.

Prova: Considerando as matriz de Brahmagupta indicadas por $B(x_1,y_1) \cdot = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \pm t \cdot y_1 & \pm x_1 \end{pmatrix}$ e $B(x_2,y_2) = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ \pm t \cdot y_2 & \pm x_2 \end{pmatrix}$. Temos, de imediato, o seguinte produto das matrizes de Brahmagupta $B(x_1,y_1) \cdot B(x_2,y_2) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \pm t \cdot y_1 & \pm x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ \pm t \cdot y_2 & \pm x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + \pm t \cdot y_1y_2 & x_1y_2 \pm x_2y_1 \\ \pm t \cdot x_2y_1 \pm t \cdot x_1y_2 & \pm t \cdot y_1y_2 \pm x_1x_2 \end{pmatrix}$. E, para o segundo item, verificamos, de imediato que $\det[B(x_1,y_1) \cdot B(x_2,y_2)] = m_1 \cdot m_2$, em que $x_1{}^2 = t \cdot y_1{}^2 \pm m$ e $x_2{}^2 = t \cdot y_2{}^2 \pm m$. □

Em seguida, registramos um teorema verificado mais recentemente, na década de 90, e que proporciona a determinação de uma família de soluções por intermédio da noção de recorrência.

Teorema 3 (Swamy, 1998): Supor que a equação $x^2 - Dy^2 = \lambda$ admite soluções inteiras positivas. Considerando uma solução inteira fundamental (a,b), isto é, os inteiros a,b como sua menor solução. Então $\begin{cases} x_n = ax_{n-1} + D \cdot by_{n-1} \\ y_n = bx_{n-1} + ay_{n-1} \end{cases}$ são soluções da equação $x_n{}^2 - D \cdot y_n{}^2 = \lambda^{n+1}$.

Prova: De fato, sendo a equação $x^2 - Dy^2 = \lambda$ e uma solução fundamental que indicamos por (a,b). Vejamos por indução matemática que assumindo $(x_0, \mathrm{y}_0) = (a,b)$ e, considerando a seguinte recorrência $\begin{cases} x_1 = ax_0 + D \cdot by_0 = a^2 + D \cdot b^2 \\ y_1 = bx_0 + ay_0 = ab + ab = 2ab \end{cases}$. Podemos verificar que $x_1{}^2 - Dy_1{}^2 = \lambda \leftrightarrow$

$(a^2 + Db^2)^2 - D(2ab)^2 = a^4 + D^2b^4 + 2a^2b^2D - 4a^2b^2D = a^4 + D^2b^4 - 2a^2b^2D = (a^2 - Db^2)^2 = \lambda^2$.

Para ilustrar, podemos ainda considerar a seguinte recorrência no caso seguinte $\begin{cases} x_2 = ax_1 + Dby_1 = a(a^2 + Db^2) + Db(2ab) = a^3 + 3Dab^2 \\ y_2 = bx_1 + ay_1 = b(a^2 + Db^2) + a(2ab) = 3a^2b + Db^3 \end{cases}$. Assim, podemos verificar que ainda se tem $(x_2)^2 - D(\mathrm{y}_2)^2 = (a^3 + 3Dab^2)^2 - D(3a^2b + Db^3)^2 = a^6 + 9D^2a^2b^4 + 6Da^4b^2 - D(9a^4b^2 + D^2b^6 +,$ $6Da^2b^4) = a^6 + 9a^2b^4D^2 + 6a^4b^2D - 9a^4b^2D - b^6D^3 - 6a^2b^4D^2 = a^6 + 9a^2b^4D^2 - 3a^4b^2D - b^6D^3 - 6a^2b^4D^2 =$ $= a^6 + 3a^2b^4D^2 - 3a^4b^2D - b^6D^3 - 6a^2b^4D^2 = a^6 + a^2b^4D^2 - 2a^4b^2D - a^4b^2D - b^6D^3 + 2a^2b^4D^2 =$ $= (a^4 + b^4D^2 - 2a^2b^2D)(a^2 - Db^2) = (a^2 - Db^2)^2(a^2 - Db^2) = (a^2 - Db^2)^3 = \lambda^3$. Por fim, por indução matemática, vamos considerar uma solução indicada por $\begin{cases} x_n = ax_{n-1} + Dby_{n-1} \\ y_n = bx_{n-1} + ay_{n-1} \end{cases}$ e que ocorre a seguinte condição $x_n{}^2 - D \cdot y_n{}^2 = \lambda^{n+1}$, para todo inteiro positivo n 1. Em seguida, temos $(x_{n+1})^2 - D \cdot (\mathrm{y}_{n+1})^2 = (ax_n + Dby_n)^2 - D(bx_n + ay_n)^2 = a^2 x_n{}^2 + D^2 b^2 y_n{}^2 + 2ax_n by_n D - b^2 x_n{}^2 D - a^2 y_n{}^2 D - 2bx_n ay_n D$ $= a^2 x_n{}^2 + D^2 b^2 y_n{}^2 - b^2 x_n{}^2 D - a^2 y_n{}^2 D = a^2(x_n{}^2 - Dy_n{}^2) + (Db^2 y_n{}^2 - b^2 x_n{}^2)D = a^2 \cdot \lambda^{n+1} - (x_n{}^2 - Dy_n{}^2)Db^2$ $= a^2 \cdot \lambda^{n+1} - \lambda^{n+1} \cdot Db^2 = \lambda^{n+1}\left(a^2 - Db^2\right) = \lambda^{n+1} \cdot \lambda = \lambda^{(n+1)+1}$. □

Antes de concluir, observamos que, se definirmos a matriz de Brahmagupta $B(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ D \cdot y & x \end{pmatrix}$, então podemos determinar as seguintes potências de matrizes: $B(x,y)^2 = \begin{pmatrix} x^2 + Dy^2 & 2xy \\ 2D \cdot xy & x^2 + Dy^2 \end{pmatrix}$, $B(x,y)^3 = \begin{pmatrix} x^3 + 3Dxy^2 & 3x^2 y + Dy^3 \\ Dy^3 + 3Dyx^2 & x^3 + 3Dxy^2 \end{pmatrix}$, $B(x,y)^4 = \begin{pmatrix} x^4 + Dy^4 + 6Dx^2 y^2 & 4Dxy^3 + 4x^3 y \\ 4Dxy^3 + 4Dx^3 y & Dy^4 + 6Dx^2 y^2 + x^4 \end{pmatrix}$, $B(x,y)^5 = \begin{pmatrix} x^4 + Dy^4 + 6Dx^2 y^2 & 4Dxy^3 + 4x^3 y \\ 4Dxy^3 + 4Dx^3 y & Dy^4 + 6Dx^2 y^2 + x^4 \end{pmatrix}$, $B(x,y)^6$, $B(x,y)^7$, $B(x,y)^8$ *etc.*

Swryanarayan (1996) define a seguinte relação $B(x,y)^n = \begin{pmatrix} x & y \\ D \cdot y & x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ D \cdot y_n & x_n \end{pmatrix} = B_n(x,y)$, para todo inteiro positivo n 1. Podemos derivar a seguinte relação matricial indicada $B(x,y)^{n+1} = B(x,y)^n B(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ D \cdot y & x \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x & y \\ D \cdot y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ D \cdot y_n & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ D \cdot y & x \end{pmatrix} = B_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ D \cdot y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix}$. Em seguida, podemos determinar as seguintes relações comentadas por Swryanarayan (1996, p. 31), indicadas por $\begin{cases} x_{n+1} = x \cdot x_n + D \cdot y \cdot y_n \\ y_{n+1} = x \cdot y_n + y \cdot x_n \end{cases}$ (*) e que podem ser imediatamente determinadas a partir da igualdade anterior $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ D \cdot y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ D \cdot y_n & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ D \cdot y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx_n + D \cdot yy_n & xy_n + yx_n \\ D \cdot (xy_n + yx_n) & Dyy_n + xx_n \end{pmatrix}$.

Por outro lado, reparemos a decomposição da matriz de Brahmagupta $B(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ D \cdot y & x \end{pmatrix}$:

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ D \cdot y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{D}{2}} & -\sqrt{\frac{D}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x + y\sqrt{D} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2D}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2D}} \end{pmatrix}$$

. A vantagem da decomposição matricial anterior incide diretamente na possibilidade de determinarmos os seus autovalores correspondentes. Ademais, reparemos que podemos avaliar que $B(x,y)^2 = B_2(x,y) =$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{D}{2}} & -\sqrt{\frac{D}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+y\sqrt{D} & 0\\ 0 & x-y\sqrt{D}\end{pmatrix}P\cdot P^{-1}\begin{pmatrix}x+y\sqrt{D} & 0\\ 0 & x-y\sqrt{D}\end{pmatrix}P = P^{-1}\begin{pmatrix}(x+y\sqrt{D}) & 0\\ 0 & (x-y\sqrt{D})\end{pmatrix}^{2}P,$$

onde consideramos as matrizes definidas por $P = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2D}}\\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2D}}\end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{D}{2}} & -\sqrt{\frac{D}{2}}\end{pmatrix}$. Por conseguinte, por indução, podemos determinar ainda que: $B(x,y)^n = B_n(x,y) = \begin{pmatrix}x_n & y_n\\ D\cdot y_n & x_n\end{pmatrix} =$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix}(x+y\sqrt{D}) & 0\\ 0 & (x-y\sqrt{D})\end{pmatrix}^{n}P = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{D}{2}} & -\sqrt{\frac{D}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x+y\sqrt{D})^n & 0\\ 0 & (x-y\sqrt{D})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2D}}\\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2D}}\end{pmatrix}.$$

Por intermédio de propriedades elementares matriciais, podemos verificar ainda que:

$$\begin{pmatrix}(x+y\sqrt{D})^n & 0\\ 0 & (x-y\sqrt{D})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2D}}\\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2D}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}(x+y\sqrt{D})^n & \sqrt{\frac{1}{2D}}(x+y\sqrt{D})^n\\ \sqrt{\frac{1}{2}}(x-y\sqrt{D})^n & -\sqrt{\frac{1}{2D}}(x-y\sqrt{D})^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{D}{2}} & -\sqrt{\frac{D}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}(x+y\sqrt{D})^n & \sqrt{\frac{1}{2D}}(x+y\sqrt{D})^n\\ \sqrt{\frac{1}{2}}(x-y\sqrt{D})^n & -\sqrt{\frac{1}{2D}}(x-y\sqrt{D})^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left[(x+y\sqrt{D})^n+(x-y\sqrt{D})^n\right] & \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[(x+y\sqrt{D})^n-(x-y\sqrt{D})^n\right]\\ (**) & (***)\end{pmatrix}$$

Por fim, na matriz ao lado direito, determinamos os termos x_n e y_n que são descritos como a forma de Binet para os elementos determinados pela recorrência indicada em (*). Reparemos que omitimos as contas nos termos (**) e (***) acima. Conforme Swryanarayan (1996), no etapa seguinte, dispondo das seguintes expressões algébricas $x_n = \frac{1}{2}\left[(x+y\sqrt{D})^n+(x-y\sqrt{D})^n\right]$ e $y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[(x+y\sqrt{D})^n-(x-y\sqrt{D})^n\right]$, para $n \quad 0$, podemos deduzir, consequentemente, as correspondentes expansões polinomiais correspondentes que são denominadas como os polinômios de Brahmagupta, que indicamos alguns casos preliminares na tabela 1. Sendo que o custo operacional se torna bastante fastidioso, com o recurso ao CAS Maple podemos encontrar e determinar outras propriedades e teoremas surpreendentes sobre o tema.

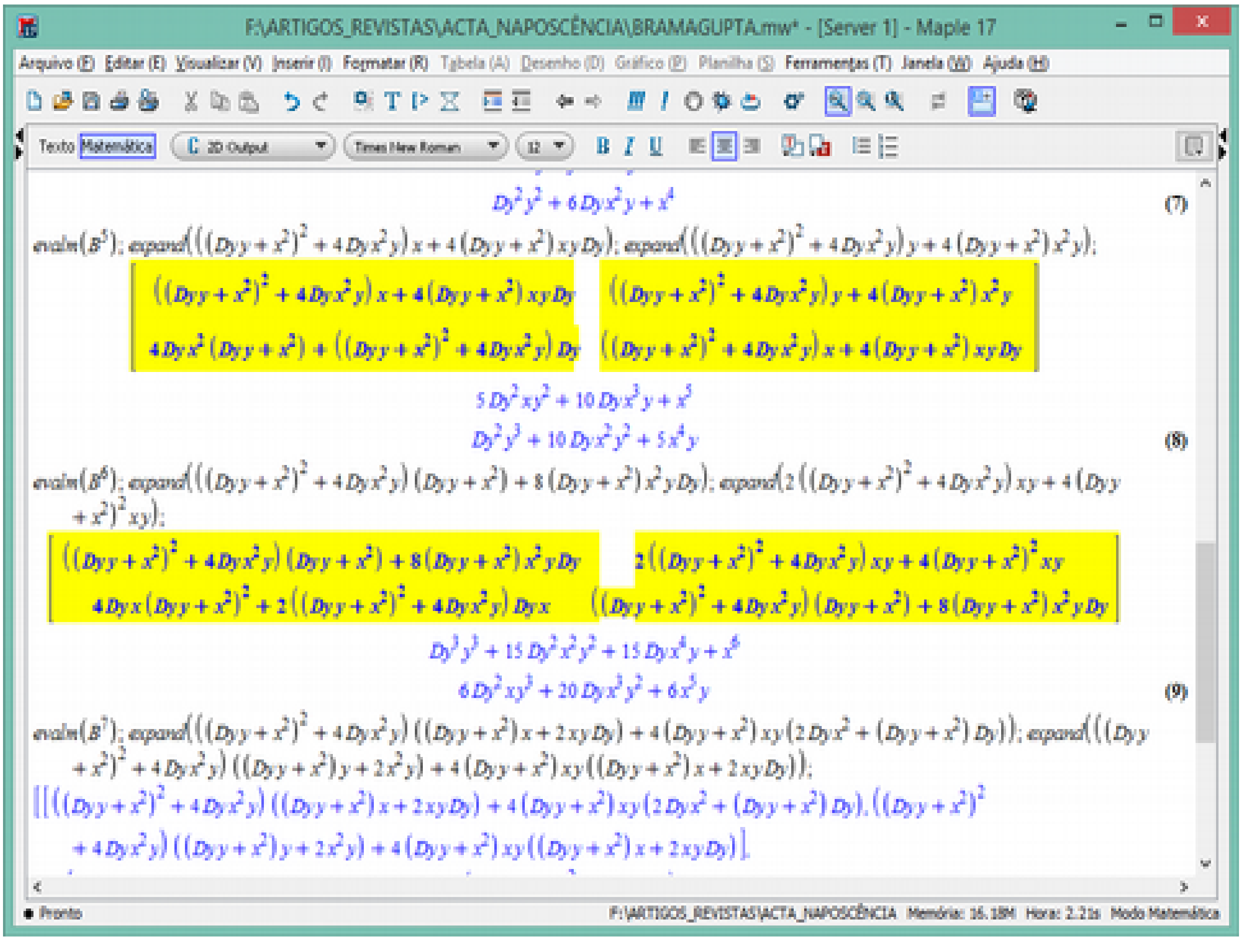
Tabela 1 – Descrição dos polinômios de Brahmagupta segundo.

Polinômios de Brahmagupta	
$x_n = x^n + D\binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + D^2\binom{n}{4}x^{n-4}y^4 + \cdots$	$y_n = nx^{n-1}y + D\binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + D^2\binom{n}{5}x^{n-5}y^5 + \cdots$
$x_0 = 1, x_1 = x\,,\ x_2 = x^2 + Dy^2$	$y_0 = 0, y_1 = y\,,\ y_2 = 2xy$
$x_3 = x^3 + 3Dxy^2\,,\ x_4 = x^4 + 6Dx^2y^2 + D^2y^4$	$y_3 = Dx^2y + Dy^3\,,\ y_4 = Dx^3y + 4Dxy^3$
$x_5 = 5Dxy^4 + 10Dx^3y^2 + x^5$	$y_5 = Dy^5 + 10Dx^2y^3 + 5x^4y$
$x_6 = Dy^6 + 15Dx^2y^4 + 15Dx^4y^2 + x^6$	$y_6 = 6Dxy^5 + 20Dx^3y^3 + 6x^5y$
$x_7 = 7Dxy^6 + 35Dx^3y^4 + 21Dx^5y^2 + x^7$	$y_7 = Dy^7 + 21Dx^2y^5 + 35Dx^4y^3 + 7x^6y$

Fonte: Elaboração do autor.

Para exemplificar, na figura 3, visualizamos o emprego do CAS Maple para a determinação do comportamento das matrizes de Brahmagupta $B(x,y)^n$, com n 1 inteiro e, correspondentemente, o comportamento dos polinômios de Brahmagupta (MUKHOPADHYAY, 1997; RANGARAJAN, 2010) segundo o par (x_n, y_n), com índices elevados (ver tabela I).

Figura 3 – Descrição das matrizes de Brahmagupta como potências e auxilio computacional.



Fonte: Elaboração do autor.

Registramos na tese de Devi (2007) o processo de extensão e descrição dos polinômios de Brahmagupta segundo variáveis octônicas e 2^N variáveis hiper complexas. Por sua vez, em sua tese de doutorado, Rangawamy (2007) discute as relações dos polinômios de Brahmagupta mediante representações e propriedades de funções contínuas.

Mais recentemente, por exemplo, assinalamos o trabalho de Shashikala e Rangarajan (2016) sobre os polinômios de Tchebychev e de Brahmagupta. Ou ainda, podemos constatar no trabalho de Somanath; Kannan e Raja (2017) métodos de solução de equações polinomiais diofantinas e que ainda preservam ligações com o método proposto por Brahmagupta.

Os limites desse trabalho não proporcionam uma discussão pormenorizada sobre as repercussões e atuais pesquisas, entretanto, recomendamos ao leitor uma apreciação ulterior pormenorizada e ampliada sobre esse tema de investigação. (CHANDRA, 2005; DEVI; GAYATHRI, 2007; DUTTA, 2017; HAMBLETON, 2017; GUPTA, 1977; HANDA; GUPTA, 2014; HOMSI, 2018; KICHENASSAMY, 2010a; 2010b; MADNI; SHAH, 2018; MOLIN, 2001; MISHRA, 2015; PATTE, 2010; PRICE, 2000; SARACHANDRAN, 2004; SASTRY, 2006; SOUZA, 2017; SOMANATH; KANNAN; RAJA, 2017; VARADARAJAN, 1998; VARFOLOMEEV, 2003).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

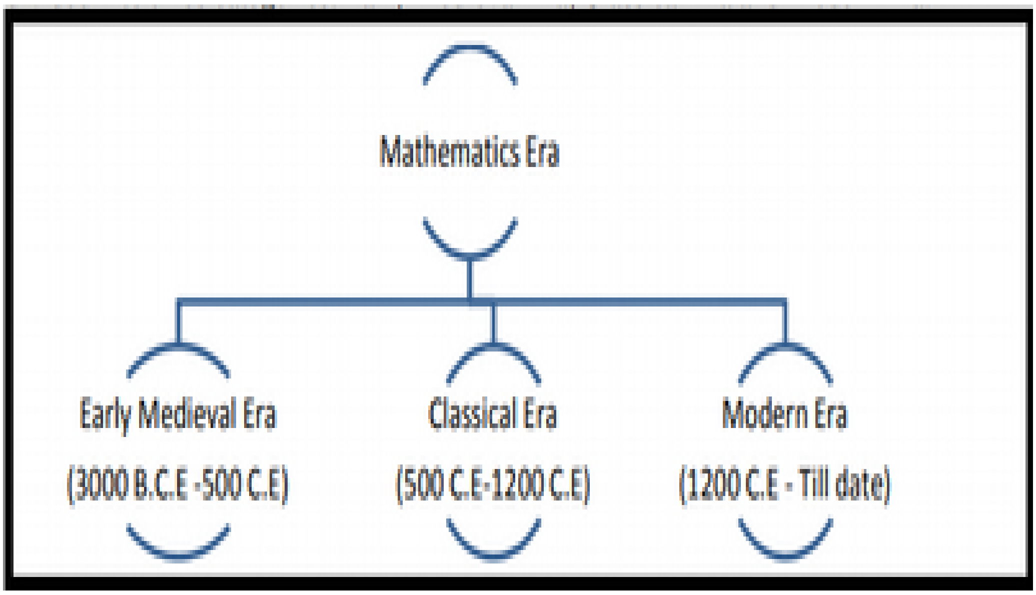
Nas seções passadas buscamos indicar alguns elementos capazes de nos fazer compreender alguns elementos e vestígios de uma cultura matemática hindu, com ênfase e interesse declarado pelo matemático Brahmagupta. Assinalamos que Brahmagupta Sphuta Siddhânta foi responsável pela introdução de ideias pioneiras envolvendo a composição de equações diofantinas e que, hodiernamente, preserva a atenção e estimula desenvolvimentos de pesquisas. Varadarajan (1998, p.18) comenta que a solução inteira da equação $x^2 - 61y^2 = 1$ possui como menor solução inteira o par $(1766319049, 226153980)$ e métodos da Matemática Aplicada são utilizados para tal exame.

A cultura matemática indiana pode ser apreciada por intermédio de períodos históricos distintos em que compreendemos um caráter de impregnação de uma concepção religiosa, mística e epistêmico-matemática. Na figura 3 trazemos um diagrama proposto por Rama (2017), subdividida nos primórdios, na Era clássica e na Era moderna. Registramos os trabalhos do matemático hindu Brahmagupta precisamente, na proposição de ideias e métodos de vanguarda, quando relativizados ao seu ulterior processo de generalização e evolução. (COLEBROOKE, 1872).

"A teoria dos números por si só, como um grande desafio intelectual, tem uma longa história na Índia, já no século VII, Brahmagupta fez importantes contribuições para o que agora é conhecido (corretamente) como a equação de Pell." (ATIYAH, 1993). Por conseguinte, urge uma compreensão científica não restritiva e de natureza epistemológica e evolutiva sobre às ideias e métodos algébricos e geométricos introduzidos por Brahmagupta e que preservam um distinguido valor matemático evolutivo indene até nossos dias atuais.

Por fim, em nossos trabalhos (ALVES, 2017) temos propugnado uma perspectiva matemático evolutiva e epistemológica que, tendo em vista a compreensão da gênese dinâmica de conceitos matemáticos, o professor de Matemática ou estudante mais interessado precisa se apropriar não apenas das ideias matemáticas, como, também, compreender os modelos matemáticos abstratos e seu processo indene de evolução, generalização e sistematização.

Figura 3 – *Rama (2007) descreve os períodos ou eras históricas da cultura indiana e a produção matemática correspondente de cada período histórico.*



Fonte: Rama (2007)

Um outro viés ou ponto de vista que classificamos como diametralmente oposto, se consubstancia por uma História da Matemática que se reveste a partir de uma retórica irretocável e informacional, todavia, destituída de uma real discussão e apropriação de objetos teóricos da matemática, suas simbologias cifradas, seus argumentos matemáticos primitivos e instrumentos conceituais e etc. Nesse contexto, a matemática hindu proporciona um lugar de destaque, na medida em que, quase prioritariamente, deparamos nos compêndios de História da Matemática tão somente a versão europeia e ocidental para a mesma.

7. REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Fórmula de de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de fibonacci – SGF. **Revista de História da Matemática**, v.17, n.33, p.1-16.

ATIYAH, M. Mathematics as a basic Science. **Current Science**, n.65, 1993.

AYYANGAR, A. K. Some glimpses of ancient Hindu Mathematics. **Journal of London Mathematical Society**, v.6, p.1-18, 1931.

AYYANGAR, A. K. Peeps into india´s mathematical past. **Journal of London Mathematical Society**, v.6, p.1-18, 1932.

AYYANGAR, A. K. New Lights of Bhaskara ChaKravala or Cyclic method of solving indeterminate equations of the second degree in two variables. **Hindu Mathematics**. Disponível em: <http://www.ms.uky.edu/~sohum/AAK/pdf%20files/chakravala.pdf>. Acesso em: 12 set. 2019.

BAG. A. K. Some Features of the Solutions of Kuttaka and Vargaprakrti. **Indian Journal of History of Science**, v.52, n.1, p1-16, 2017.

BAG. A. K. The method of integral solution of indeterminate equation of the type: by=ax±c. **Ancient and medieval India Indian Journal of History of Science**, v.12, n.1, p.1-16. 1977.

CHANDRA, D. R. **An analytical study of continuous and chronological development of mathematics in India from the beginning to the nineteenth century A D**. 2005. 168 f. Thesis (Doctorate in Philosophy of Matematics) – Gauhati University, India, 2005.

COLEBROOKE, H. T. Brahmagupta as an algebraist. **Miscellaneous Essays**, v.2, p.190-270, 1872.

DATTA, B; SINGH, A. N. **History of Hindu Mathematics**: a source book. London: Asia publishing house, 1938.

DATTA, B; SINGH, A. N. **Hindu Geometry**. Hindu Journal. 1979. Disponível em: <https://www.insa.nic.in/writereaddata/UpLoadedFiles/IJHS/Vol15_2_1_KSShukla.pdf>. Acesso em: 12 set. 2019.

DEVI, B. GAYATHRI. **Studies on brahmagupta polynomials in two complex and hypercomplex variables**. 2007. Thesis (Doctatorate in Philosophy of Mathematics). India, 2007.

DUTTA, A. K. Mathematics in Ancient India. **Resonance**, v.1, n.1, p.1-16, apr. 2002.

DUTTA, A. K. The Bhāvanā in Mathematics. **The Bhāvanā Journal,** p.13-19, jan. 2017.

GUPTA, R.C. Parames vara's rule for the circumradius of a cyclic quadrilateral. **Historia Mathematica**, v.4, p.67–74, 1977.

HAMBLETON, S. A. A cubic generalization of Brahmagupta's identity. **Journal of Ramanujan Mathematical Society**, v.32, n.4, p327-337, 2017.

HANDA, N.; GUPTA, T. K. On the non linear indeterminate equation $Ny^2+m^2 =x^2$. **Research Journal of Mathematical and Statistical Sciences**, v.2, n.6, p.1-3, jun. 2014.

HOMSI. Rania Al. **Equation solving in indian mathematics**. Project report. Uppsala University: India. 2018. Disponível em: <https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1231341/FULLTEXT01.pdf>. Acesso em: 12 set. 2019.

JAOUICHE, K. India's contribution to arab mathematics. **Indian Journal of History of Science**. v.46, n.2, p.189-204, 2011.

JUNOD, A. An Algorithm to Solve a Pell Equation. **Gen. Math. Notes**, v.28, n.2, p.1-8, jun. 2015.

KICHENASSAMY. S. Baudhayana's rule for the quadrature of the circle. **História Mathematica**, n.33, p.149-163, 2010a.

KICHENASSAMY, S. Brahmagupta's derivation of the area of a cyclic quadrilateral. **História Mathematica**, n.37, p.28-61, 2010b.

MAJUMDAR, P. K. A rationale of Brahmagupta´s method of solving of ax+by=d. **Indian Journal of History Science**, v.6, n.2, p.112-117, nov. 1981.

MADNI, B. M.; SHAH, D. V. Alternate proofs for the infinite number of solutions of pell's equation. **International Journal of Engineering, Science and Mathematics**, v.7, n.4, p.255-259, apr. 2018.

MEDNYKH, A. D. Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane, **Sib. Elektron. Mat. Izv**, v.9, p.247-255. 2012.

MOLIN, R. A. Simple continued fractions solutions for Diophantine equations. **Expositione Mathematicae**, v.19, n.1, p.55-73, 2001.

MISHRA. V. Progress in the theory of quadratic indeterminate analysis. **American Research Journal of Mathematics**, v.1, n.4, p.13-27, 2014.

MISHRA. V. Linear indeterminate analysis: theory and applications. **American Research Journal of Mathematics**, v.1, n.3, p.16-33, 2015.

MOLLIN, R. A. Simple continued fraction solution for diophantine equation. **Expositione Mathematicae**, v.19, n.1, p.55-73.

MUKHOPADHYAY, A. K. **On work of some eminent indian mathematicians**. 1997. Thesis (Doctorate in phylophy of mathematics) – University of Bengal, Bengal, 1997.

MURTHY, T. S. **A modern introduction to Ancient Indian**. New Delhi: New Age International Publishers. 2009.

NAGARAJAN, K, R.; SRIDHARAN, R. On Brahmagupta's and Kummer's quadrilaterals. **Elementary Mathematics**, n.61, p.45-57, 2006.

OLIVEIRA, G. V. **Brahmagupta e quadrilateros ciclicos no ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado) – UNICAMP, Campinas, 2015.

PATTE, F. The resolution of Diophantine equations according to Bhāskara and a justification of the cakravāla by Kṛṣṇadaivajña. **Mathematics in Ancient Times**, Kozhikode, India, p.73-105, aug. 2010.

PLA, Juan. A kaleidoscope of solutions for a Diophantine system. **The Mathematical Gazette**. v.94, n.529, p.42-50, 2010.

PRICE, J. F. **Applied Geometry ofthe Sulba Sutras**. Geometry at Work**.** Washington DC: Ed. C. Gorini, 2000. p.46-55.

PLOFKER; K, **Mathematics in India. The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam**. Princeton: Princeton Univ. Press,, 2007.

PUTTASWAMY, T. K. The mathematical accomplishments of ancient indian mathematicians. In: SELIN, H. **Mathematics Across Cultures**: The History of Non· Western Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 2000. p.409-422.

PRANESACHAR, C. R. Brahmagupta, Mathematician Par Excellence. **RESONANCE**, p.247-252, mar. 2012.

RAMA, P. **Indian contribution to mathematics in relation to Aryabhata and brahmagupta**. Tibarewala University, India. 2017.

RAMASUBRAMANIAN, K. M. S. Sriram. **Tantrasangraha of Nlakantha Somayaj**. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer, 2011.

RANGARAJAN. R. A Result of Ramanujan and Brahmagupta Polynomials Described by a Matrix Identity. **International J. Math. Combin**, v.3, p.57-63, 2010.

RANGAWAMY, P. **Studies on Brahmagupta polynomials and continued fractions with some interconnections**. 2007. Thesis (Doctorate in Philosophy of Mathematics), 2007.

RIZVI, S. A. H. **Some aspects of History of Indian Mathematics in 18th and early 19th Century**. 1984. Thesis (Doctorate in Philosophy) – Cocnin University, Cochin India, 1984.

SASTRY, K. R. S. Brahmagupta Quadrilaterals. **Forum Geometricorum**, v.2, p.167-173, 2002.

SARACHANDRAN, T. G. **On some problemas in Hindu Algebra**. Kerala University, India. 2004.

SASTRY, K. R. S. Two Brahmagupta Problems. **Forum Geometricorum**, v.6, p301-310, 2006.

SELENIUS, C. O. Rationale of the chakravala process of jayadeva and bhaskara ii. **Historia Mathematica**, v.2, 167-184, 1975.

SHARMA, P. K. **Pell´s equation**. 2009. 30 f. Dissertation (Master of Science in Mathematics) – National Institute of Technology Rourkela, Odisha, Índia, 2009.

SHASHIKALA P. AND R. RANGARAJAN. Tchebychev and Brahmagupta Polynomials and Golden Ratio: Two New Interconnections. **International J.Math. Combin**. v.3, n.2, p.57-67, 2016.

SOUZA, R. S. **Equações Diofantinas Lineares, Quadráticas e Aplicaçõe**s. 2017. 75 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2017.

SOMANATH, M.; KANNAN, J.; RAJA. K. On Polynomial Solutions of Quadratic Diophantine Equation. **International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology**, v.6, n.9, p.18351-18355, 2017.

SRIDHAR, S; SHIVAKUMAR. N. Note on leading mathematician Bhaskara ii of 12th century. **International Journal of Innovative Technology and Research**, v.2, n.2, p.788-792, 2014.

SURYANARAYAN, E. R. The brahmagupta polynomials. **The Fibonacci Quarterlly**, v.34, n.1, p.30-39, 1996.

SWAMY, M. N. S. Brahmagupta's theorems and recurrence relations. **The Fibonacci Quarterlly**, v.36, n.2, p.125-129, 1998.

VAN DER WAERDEN. B. L. **Algebra**. New York: Springer, 1983.

VARADARAJAN. V. S. **Algebra in ancient and modern times**. New York: American Mathematical Society, 1998.

VARFOLOMEEV. V. V. Inscribed polygons and Heron polynomials, **Mathematical Sb**., v.194, n.3, p.3-24, 2003.

Submetido em: **12/09/2019**

Aprovado em: **29/11/2019**