Revista Thema
v.17 | n.3 | 2020
p.831-842

DOI: http://dx.doi.org/10.15536/thema.V17.2020.831-842.1353

ISSN: 2177-2894 (online)

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Números Híbridos de Fibonacci e Pell

Hybrid Fibonacci and Pell numbers

Milena Carolina Santos Mangueira[1], Francisco Régis Vieira Alves[2]

RESUMO

Na matemática existem diversos tipos de sequências onde a mais estudada e analisada é a sequência de Fibonacci e, também, a sequência de Pell. Por serem bastante estudadas, já existem diversas propriedades em torno destas sequências. Neste artigo, utilizaremos a definição dos números híbridos nas sequências recorrente e apresentaremos o número híbrido de Fibonacci e Pell, como será sua definição, sua equação característica, forma matricial e afins. Os números híbridos é uma parte da matemática onde não se obtém muita informação. Por isso, o artigo é baseado em autores que já produziram algo relacionado.

Palavras-chave: Números Híbridos; Sequência de Fibonacci; Sequência de Pell.

ABSTRACT

In mathematics there are several types of sequences where the most studied and analyzed is the Fibonacci sequence and also the Pell sequence. Because they are well studied there are already several properties about them. In this article we will use the definition of the hybrid numbers in the recurrent sequences and we will present the hybrid number of Fibonacci and Pell, as will be their definition, their characteristic equation, matrix form and etc. Hybrid numbers is a part of mathematics where you do not get much information so the article is based on authors who have already produced something related.

Keywords: *Hybrid Numbers; Sequence of Fibonacci; Sequence of Pell.*

[1] Bolsista pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, Mestranda no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, Fortaleza/CE - Brasil. E-mail: milenacarolina24@gmail.com

[2] Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq - Nível 2, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE, Fortaleza/CE - Brasil. E-mail: fregis@ifce.edu.br

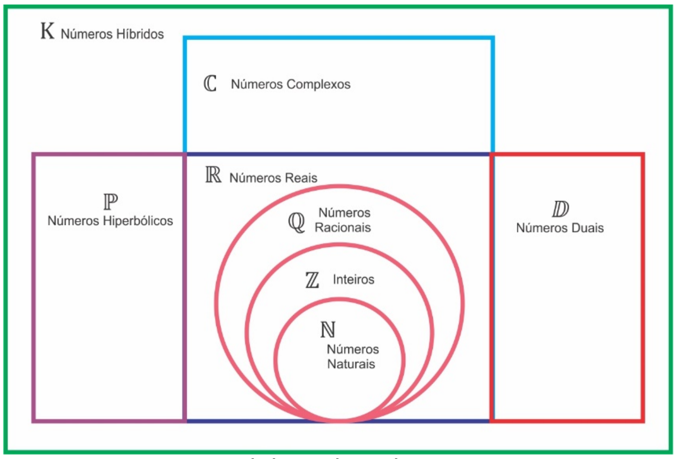
1. INTRODUÇÃO

Sequências recorrentes e de números inteiros são facilmente encontradas na área de matemática e podem ter aplicabilidade em várias áreas como na biologia, física, ciência da computação entre outras. Uma bastante conhecida é a sequência de Fibonacci $\{F_n\}_{n \in N}$, que é lembrada pelo problema: *"Quantos pares de coelho serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"* (BOYER, 2006). Essa sequência é discutida em Alves (2015) e Alves e Catarino (2016) que possui a relação de recorrência $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n \geq 1$, com $F_0=0$ e $F_1=1$, sua equação característica é dada por $x^2-x-1=0$ onde uma das sua solução é dada pelo número de ouro 1,61 e outra solução é negativa. Outra sequência bastante discutida é a sequência de Pell, que carrega esse nome devido ao matemático John Pell (1611-1685) conhecido por ser um dos matemáticos mais emblemáticos no século XVII. (MALCOLM, 2000). Essa sequência é discutida em Alves (2016) e Noronha e Alves (2018) apresentando a recorrência que é definida como $P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}$, $n \geq 1$, com $P_0=0$ e $P_1=1$ e apresenta a equação característica $y^2-2y-1=0$ possuindo duas raízes, uma positiva e conhecida como número de prata 2,41 e outra raiz negativa. Ambas as sequências são do tipo linear recursiva, ou seja, necessitam conhecer os termos anteriores para que conheça os próximos.

Baseado na importância dessas sequências torna-se necessário mais estudos sobre elas, assim aplicaremos a definição dos números híbridos nessas sequências, fazendo assim a hibridização dessas sequências e apresentaremos suas características. Este processo de hibridização de sequência também já foi realizado por Catarino (2019), Cerda-Morales (2018), Szynal-Liana (2018) e Szynal-Liana e Wloch (2019). Para isso, definiremos os números híbridos a partir de Özdemir (2018).

O número híbrido, denotado por K, contém três sistemas numéricos juntos, sejam eles: os números complexos, duais e hiperbólicos, estando combinados e mistos entre si. Pode ser representado pela Figura 1.

Figura 1 - Diagrama do conjunto dos números híbridos.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Definição 1: Um número híbrido é definido por Özdemir (2018):

$$K=\{z=a+bi+c\varepsilon+dh : a,b,c,d\in R, i^2=-1, \varepsilon^2=0, h^2=1, ih=-hi=\varepsilon+i\}.$$

A partir da definição podemos efetuar algumas propriedades e operações com os números híbridos. Tomando $z_1=a_1+b_1i+c_1\varepsilon+d_1h$ e $z_2=a_2+b_2i+c_2\varepsilon+d_2h$, tem-se:

- Pode-se dizer que dois números híbridos são iguais se, e somente se, cada um dos seus termos for igual;
  $z_1=z_2 \leftrightarrow a_1=a_1, b_1=b_2, c_1=c_2 \, e \, d_1=d_2$
- A adição é definida somando cada número dos seus termos;
  $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)\varepsilon+(d_1+d_2)h$
- A subtração é subtraindo cada um dos termos;
  $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i+(c_1-c_2)\varepsilon+(d_1-d_2)h$
- A multiplicação de um escalar, $k\epsilon R$, é definida quando o escalar é multiplicado por cada um dos termos;
  $k.z=k.a+k.bi+k.c\varepsilon+k.dh$
- O zero é definido como elemento neutro para os números híbridos;
- O elemento simétrico do número híbrido é definido invertendo o sinal de cada um dos seus termos;
  $-z=-a-bi-c\varepsilon-dh$
- Por fim, tem-se que (K,+) é um grupo abeliano.

O produto híbrido é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades e depois substituindo cada produto de unidades pelas igualdades $i^2=-1, \varepsilon^2=0, h^2=1, ih=-hi=\varepsilon+i$. Usando essas igualdades, encontra-se o produto de quaisquer duas unidades híbridas e obtêm-se o Quadro 1.

Quadro 1 - Tabela da multiplicação para K.

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
ε	ε	$h+i$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon-i$	ε	1

Fonte: Elaborado pelos autores.

Além disso tem-se o número real $C(z)=z\bar{z}=\bar{z}z=a^2+(b-c)^2-c^2-d^2=a^2+b^2-2bc-d^2$ chamado de caráter do número híbrido. E ainda, o número real $\sqrt{|C(z)|}$ será chamado de norma do número híbrido z e será denotado por $\|z\|$.

Baseado no trabalho de Özdemir (2018) sobre números híbridos, apresentamos os números híbridos da sequência de Fibonacci e Pell, que abordaremos sobre estes novos números híbridos, daremos algumas definições, propriedades e teoremas, incluindo a fórmula Binet e as funções geradoras.

2. DESENVOLVIMENTO

Baseado em Cerda-Morales (2018) que apresenta os números híbridos de Fibonacci e Catarino (2019) os números híbridos de *k*-Pell, sendo *k* para qualquer número inteiro positivo. Vale salientar que, esses os números de *k*-Pell são a generalização dos números de Pell, ou seja, para *k*=1 tem-se os termos da sequência de Pell. Nesta seção, tem-se como objetivo apresentar novas definição desses números híbridos e alguns resultados elementares. Com isso, após a definição do número híbrido, tem-se:

Definição 2: O número híbrido de Fibonacci, $n \in N$, é definido por (CERDA-MORALES, 2018):

$$HF_n = F_n + F_{n+1} i + F_{n+2} \varepsilon + F_{n+3} h$$

com as condições iniciais iguais a $HF_0 = i + \varepsilon + 2h$ e $HF_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$.

Proposição 1: Os números híbridos de Fibonacci, $n \in N$, satisfaz a relação de recorrência de segunda ordem $HF_{n+1} = HF_n + HF_{n-1}$ (CERDA-MORALES, 2018).

Demonstração:

$$\begin{aligned} HF_n + HF_{n-1} &= (F_n + F_{n+1} i + F_{n+2} \varepsilon + F_{n+3} h) + (F_{n-1} + F_n i + F_{n+1} \varepsilon + F_{n+2} h) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n+1} + F_n) i + (F_{n+2} + F_{n+1}) \varepsilon + (F_{n+3} + F_{n+2}) h \\ &= F_{n+1} + F_{n+2} i + F_{n+3} \varepsilon + F_{n+4} h \\ &= HF_{n+1} \end{aligned}$$

∎

Definição 3: O número híbrido de Pell, $n \in N$, é definido por Catarino (2019):

$$HP_n = P_n + P_{n+1} i + P_{n+2} \varepsilon + P_{n+3} h$$

Satisfazendo à relação de recorrência $HP_{n+1} = HP_n + HP_{n-1}$, a demonstração segue de forma análoga da anterior, com as condições iniciais $HP_0 = i + 2\varepsilon + 5h$ e a $HP_1 = 1 + 2i + 5\varepsilon + 12h$.

De acordo com a relação de recorrência dos números híbridos de Fibonacci descrita acima pode-se apresentar sua equação característica, obtendo $\frac{HF_{n+1}}{HF_n} = 1 + \frac{HF_{n-1}}{HF_n}$. Logo, $\frac{HF_{n+1}}{HF_n} = 1 + \frac{1}{\frac{HF_n}{HF_{n-1}}}$. Supondo que o limite proposto existe e que seja t, nota-se que $\lim_{n \to \infty} \frac{HF_{n+1}}{HF_n} = t$ e $\lim_{n \to \infty} \frac{HF_n}{HF_{n-1}} = t$, verifica-se que: $t = 1 + \frac{1}{t}$, ou ainda, $t^2 - t - 1 = 0$, onde esta equação é do segundo grau possuindo duas raízes reais $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, e para a sequência híbrida de Pell tem-se a equação característica $p^2 - 2p - 1 = 0$ possuindo duas raízes $p_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2}$ e $p_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2}$.

Definição 4: O conjugado do número híbrido de Fibonacci, $n \in N$, é definido como:

$$\overline{HF_n} = F_n - F_{n+1} i - F_{n+2} \varepsilon - F_{n+3} h$$

Para o conjugado do número híbrido de Pell, tem-se:

$$\overline{HP_n} = P_n - P_{n+1} i - P_{n+2} \varepsilon - P_{n+3} h$$

Definição 5: O caráter do número híbrido de Fibonacci, denotado por $C(HF_n)$, para $n \in N$, é definido como:

$$C(HF_n) = F_n^2 + (F_{n+1} - F_{n+2})^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2$$

De maneira análoga, tem-se o caráter do número híbrido de Pell:

$$C(HP_n) = P_n^2 + (P_{n+1} - P_{n+2})^2 - P_{n+2}^2 - P_{n+3}^2$$

Proposição 2: A norma de um número híbrido de Fibonacci, $n \in N$, é dada por Cerda-Morales (2018):

$$\|HF_n\|^2 = \left|F_n^2 - 4(F_{n+1} F_{n+2}) - F_{n+2}^2\right|$$

Demonstração:

$$\|z\| = \sqrt{|C(z)|} = \sqrt{|a^2 + b^2 - 2bc - d^2|}$$

$$\|HF_n\|^2 = \left|F_n^2 + F_{n+1}^2 - 2(F_{n+1} F_{n+2}) - F_{n+3}^2\right|$$

$$\|HF_n\|^2 = \left|F_n^2 + F_{n+1}^2 - 2(F_{n+1} F_{n+2}) - F_{n+2}^2 - 2(F_{n+2} F_{n+1}) - F_{n+1}^2\right|$$

$$\|HF_n\|^2 = \left|F_n^2 - 4(F_{n+1} F_{n+2}) - F_{n+2}^2\right|$$

∎

De maneira análoga, obtém a norma dos números híbridos de Pell dada por Catarino (2019):

$$\|HP_n\|^2 = \left|P_n^2 - 6(P_{n+1} P_{n+2}) - 4P_{n+2}^2\right|$$

Além disso, o número híbrido de Fibonacci e Pell podem ser representados de forma matricial, a partir de uma matriz 2x2, onde há uma bijeção entre o conjunto de todas as matrizes. Utilizando a forma matricial dos números híbridos que Özdemir (2018) apresenta conseguimos definir assim as seguintes matrizes.

Proposição 3: Uma matriz do número híbrido de Fibonacci, $n \in N$, é definida por Cerda-Morales (2018) :

$$\varphi_{HF_n} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & 2F_{n+1} \\ 2F_{n+2} & F_n - F_{n+2} \end{bmatrix}$$

E a matriz de um número híbrido generalizado de Pell, denotado por *k*-Pell, é apresentada por Catarino (2019). Assim, quando $k=1$, tem-se a matriz do número híbrido de Pell:

$$\varphi_{HP_n} = \begin{bmatrix} P_n + P_{n+2} & 2P_{n+1} + P_{n+2} \\ 3P_{n+2} & P_n - P_{n+2} \end{bmatrix}$$

Demonstração:

Sabendo que Özdemir (2018) define a matriz dos números híbridos como:

$$\varphi_{(a+bi+c\varepsilon+dh)} = \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix}$$

Fazendo as devidas substituições dos números híbridos de Fibonacci, obtemos:

$$\varphi_{HF_n} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n+1} - F_{n+2} + F_{n+3} \\ F_{n+2} - F_{n+1} + F_{n+3} & F_n - F_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{HF_n} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n+1} - F_{n+2} + F_{n+2} + F_{n+1} \\ F_{n+2} - F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+1} & F_n - F_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{HF_n} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & 2F_{n+1} \\ 2F_{n+2} & F_n - F_{n+2} \end{bmatrix}$$

∎

As demonstrações para os números híbridos de Pell é realizado de forma análoga.

Proposição 4: Se φ_{HF_n} corresponde à matriz híbrida de Fibonacci, então $\|HF_n\|^2 = |det(\varphi_{HF_n})|$.

Demonstração:

$$\left|det\left(\varphi_{HF_n}\right)\right|=\begin{vmatrix} F_n+F_{n+2} & 2F_{n+1} \\ 2F_{n+2} & F_n-F_{n+2} \end{vmatrix}$$

$$\left|det\left(\varphi_{HF_n}\right)\right|=\left|\left(F_n+F_{n+2}\right)\left(F_n-F_{n+2}\right)-\left(2F_{n+1}\right)\left(2F_{n+2}\right)\right|$$

$$\left|det\left(\varphi_{HF_n}\right)\right|=\left|F_n^2-F_{n+2}^2-4F_{n+1}F_{n+2}\right|$$

$$\left|det\left(\varphi_{HF_n}\right)\right|=\left\|HF_n\right\|^2$$

∎

Por outro lado, se φ_{HP_n} corresponde à matriz híbrida de Pell, então $\left\|HP_n\right\|^2=\left|det\left(\varphi_{HP_n}\right)\right|$.

As demonstrações para os números híbridos de Pell é realizado de forma análoga.

Uma função geradora é uma série de potências cujos coeficientes apresentam informações sobre uma sucessão. Com isso, temos:

Teorema 1: A função geradora dos números híbridos de Fibonacci é dada por (CERDA-MORALES, 2018):

$$G_{HF_n}(t)=\frac{HF_0+\left(HF_1-HF_0\right)t}{\left(1-t-t^2\right)}$$

De maneira análoga Catarino (2019) apresenta a função geradora dos híbridos generalizado de Pell, denotado por *k*-Pell. Com isso, quando $k=1$, tem-se a função geradora para os números híbridos de Pell:

$$G_{HP_n}=\frac{HP_0+\left(HP_1-2HP_0\right)t}{\left(1-2t-t^2\right)}$$

Demonstração: Para definir a função geradora do número híbrido de Fibonacci, denotado por G_{HF_n}, devemos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{HF_n}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}HF_nt^n=HF_0+HF_1t+HF_2t^2+\ldots+HF_nt^n+\ldots$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$G_{HF_n}(t)=HF_0+HF_1t+HF_2t^2+\ldots+HF_nt^n+\ldots$$
$$-tG_{HF_n}(t)=-tHF_0-t^2HF_1-t^3HF_2-\ldots-t^{n+1}HF_n-\ldots$$
$$-t^2G_{HF_n}(t)=-t^2HF_0-t^3HF_1-t^4HF_2-\ldots-t^{n+2}HF_n-\ldots$$

$$\left(1-t-t^2\right)G_{HF_n}(t)=HF_0+\left(HF_1-HF_0\right)t$$

$$G_{HF_n}(t)=\frac{HF_0+\left(HF_1-HF_0\right)t}{\left(1-t-t^2\right)}$$

∎

Como a relação de recorrência para os números híbridos de Pell é semelhante, conseguimos obter a função geradora para a sua sequência de maneira análoga.

Agora iremos explorar a existência de uma fórmula explícita para o cálculo do *n*-ésimo termo da sequência, sem depender da relação de recorrência, utilizando a fórmula de Binet, onde é necessário utilizar as raízes da equação característica da sequência. Essa investigação matemática homenageou Jacques Phillipe Maria Binet (1786-1856) mas essa fórmula foi descoberta por Abraham De Moivre (1667-1764).

Teorema 2: Para $n \geq 0$ temos que a fórmula de Binet para os números híbridos de Fibonacci é dado por (CERDA-MORALES, 2018):

$$HF_n=\frac{\left(HF_1-HF_0\beta\right)\alpha^n-\left(HF_1\alpha-HF_0\right)\beta^n}{\alpha-\beta}$$

Onde $\alpha\, e\, \beta$ são as raízes da equação característica e $HF_0=i+\varepsilon+2h$ e $HF_1=1+i+2\varepsilon+3h$.

E ainda, Catarino (2019) apresenta o Binet para os híbridos generalizado de Pell, denotado por *k*-Pell. Portanto, quando $k=1$, tem-se que a fórmula de Binet para os números híbridos de Pell é:

$$HP_n=\frac{\left(HP_1-HP_0\beta\right)\alpha^n-\left(HP_1\alpha-HP_0\right)\beta^n}{\alpha-\beta}$$

Onde $\alpha\, e\, \beta$ são as raízes da equação característica e $HP_0=i+2\varepsilon+5h$ e $HP_1=1+2i+5\varepsilon+12h$.

Demonstração:

Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte forma:

$$HF_n=A\alpha^n+B\beta^n$$

Para $n=0$, $HF_0=A+B$ e para $n=1$, $HF_1=A\alpha+B\beta$. Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A+B=HF_0 \\ A\alpha+B\beta=HF_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, tem-se que $A=\frac{HF_1-HF_0\beta}{\alpha-\beta}$ e $B=\frac{HF_0-HF_1\alpha}{\alpha-\beta}$. Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, obtêm-se:

$$HF_n = \frac{\left(HF_1 - HF_0\,\beta\right)\alpha^n - \left(HF_1\,\alpha - HF_0\right)\beta^n}{\alpha - \beta}$$

∎

A demonstração para a fórmula de Binet para os híbridos de Pell é de forma análoga, mudando apenas os termos iniciais.

Como consequência da fórmula de Binet é possível obter algumas as identidades, como: a identidade de Catalan, em particular a identidade de Cassini e a identidade de d'Ocagne. A partir da fórmula de Binet dos híbridos de Fibonacci pode-se apresentar algumas identidades clássicas. Considerando $M = HF_1 - HF_0\,\beta$ e $N = HF_1\,\alpha - HF_0$, tem-se:

$$HF_n = \frac{M\,\alpha^n - N\,\beta^n}{\alpha - \beta}$$

Teorema 3: *(Identidade de Catalan)* Para os números naturais n e k, com $n \geq k$, se HF_n é o *n*-ésimo número híbrido de Fibonacci, então tem-se a seguinte identidade:

$$HF_{n-k}\,HF_{n+k} - HF_n^2 = (-1)^{n-k}\left[HF_k^2 + \frac{M\,\alpha^{2k}(N-M) + N\,\beta^{2k}(M-N)}{(\alpha-\beta)^2}\right]$$

Demonstração:

$$HF_{n-k}\,HF_{n+k} - HF_n^2 = \frac{M\,\alpha^{n-k} - N\,\beta^{n-k}}{\alpha-\beta} \cdot \frac{M\,\alpha^{n+k} - N\,\beta^{n+k}}{\alpha-\beta} - \left(\frac{M\,\alpha^n - N\,\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2$$

$$= \frac{-MN\,\alpha^{n-k}\beta^{n+k} - MN\,\beta^{n-k}\alpha^{n+k} + 2MN\,\alpha^n\beta^n}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= (-1)^{n-k}\,\frac{MN\,\alpha^{2k} - 2\,MN\,\alpha^k\beta^k + MN\,\beta^{2k} + M^2\alpha^{2k} + N^2\beta^{2k} - M^2\alpha^{2k} - N^2\beta^{2k}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= (-1)^{n-k}\left[HF_k^2 + \frac{M\,\alpha^{2k}(N-M) + N\,\beta^{2k}(M-N)}{(\alpha-\beta)^2}\right]$$

∎

Para os números naturais n e k, com $n \geq k$, se HP_n é o *n*-ésimo número híbrido de Pell, então tem-se a identidade:

$$HP_{n-k}\,HP_{n+k} - HP_n^2 = (-1)^{n-k}\left[HP_k^2 + \frac{R\,\alpha^{2k}(S-R) + Q\,\beta^{2k}(R-S)}{(\alpha-\beta)^2}\right]$$

Com $R=HP_1-HP_0\beta$ e $S=HP_1\alpha-HP_0$ e α,β raízes da equação característica. A demonstração é de forma análoga para os números híbridos de Fibonacci.

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k=1$ obtêm-se o seguinte resultado.

Corolário 1: *(Identidade de Cassini)* Para o número natural n, se HF_n é o *n*-ésimo número híbrido de Fibonacci, então tem-se a seguinte identidade:

$$HF_{n-1}HF_{n+1}-HF_n^2=(-1)^{n-1}\left[HF_1^2+\frac{M\alpha^2(N-M)+N\beta^2(M-N)}{(\alpha-\beta)^2}\right]$$

Demonstração:

$$HF_{n-1}HF_{n+1}-HF_n^2=\frac{M\alpha^{n-1}-N\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\cdot\frac{M\alpha^{n+1}-N\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}-\left(\frac{M\alpha^n-N\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2$$
$$=\frac{-MN\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-MN\beta^{n-1}\alpha^{n+1}+2MN\alpha^n\beta^n}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{MN\alpha^2-2MN\alpha\beta+MN\beta^2+M^2\alpha^2+N^2\beta^2-M^2\alpha^2-N^2\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$=(-1)^{n-1}\left[HF_1^2+\frac{M\alpha^2(N-M)+N\beta^2(M-N)}{(\alpha-\beta)^2}\right]$$
∎

Para os o número natural n, se HP_n é o *n*-ésimo número híbrido de Pell, então tem-se a identidade:

$$HP_{n-1}HP_{n+1}-HP_n^2=(-1)^{n-1}\left[HP_1^2+\frac{R\alpha^2(S-R)+Q\beta^2(R-S)}{(\alpha-\beta)^2}\right]$$

Com $R=HP_1-HP_0\beta$ e $S=HP_1\alpha-HP_0$ e α,β raízes da equação característica. A demonstração é de forma análoga para os números híbridos de Fibonacci.

Proposição 5: *(Identidade de d'Ocagne)* Suponha que n seja um número inteiro não negativo e m um número natural. Se HF_n é o *n*-ésimo número híbrido de Fibonacci, então a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:

$$HF_mHF_{n+1}-HF_{m+1}HF_n=(-1)^{n-1}\left[HF_1^2+\frac{M\alpha^2(N-M)+N\beta^2(M-N)}{(\alpha-\beta)^2}\right]$$

Demonstração:

Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, sendo m um número inteiro não negativo e n um número inteiro positivo, tem-se a seguinte identidade: tomando $m=n-1$, tem-se a seguinte identidade: $HF_m HF_{n+1} - HF_{m+1} HF_n = HF_{n-1} HF_{n+1} - HF_n^2$ onde a demonstração é encontrada no Corolário anterior.

Para n seja um número inteiro não negativo e m um número natural. Se HP_n é o *n*-ésimo número híbrido de Pell, então a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:

$$HP_m HP_{n+1} - HP_{m+1} HP_n = (-1)^{n-1}\left[HP_1^2 + \frac{R\alpha^2(S-R) + Q\beta^2(R-S)}{(\alpha-\beta)^2}\right]$$

Com $R=HP_1 - HP_0\beta$ e $S=HP_1\alpha - HP_0$ e α, β raízes da equação característica. A demonstração é de forma análoga para os números híbridos de Fibonacci.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos trabalhos de Cerda-Morales (2018) e Catarino (2019), foi possível realizar a hibridização das sequências de Fibonacci e Pell apresentando novas definições, teoremas e proposições que foram estudadas, tais como: relação de recorrência, equação característica, representação matricial, função geradora, norma desses números híbridos, fórmula de Binet e identidades clássicas, como: Catalan, Cassini e d'Ocagne.

Foi necessário usar as definições e propriedades já existentes das sequências abordadas, o raciocínio logico e a demonstrações alguns resultados para concluir esses novos números híbridos apresentados. Com isso, podemos dar continuidade a esse estudo e apresentar em trabalhos posteriores novas propriedades que venham a ser utilizados em outras áreas e conteúdo.

4. REFERÊNCIAS

ALVES, F. Sequência Generalizada de Fibonacci e Relações com o número Áureo. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v.2, n.6, p.30-36, 2015.

ALVES, F. Sequência generalizada de Pell (SGP): aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**, v.13, n.2, p.27-41, 2016.

ALVES, F. CATARINO, P. A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**, v.14, n.12, p.112-136, 2016.

BOYER, C. **História da matemática**. Revista por MERZBACH, C. Tradução de GOMIDE, E. F. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

CARVALHO, C. F. **Números híbridos e sua visualização no GeoGebra.** 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2019.

CATARINO, P. On some identities for k-Fibonacci sequence. **International Journal of Contemporary Mathematical Sciences**, v.9, n.1-4, p.37-42, 2014.

CATARINO, P. Generalized Fibonacci and k-Pell Matrix Sequences. **Journal of Mathematics**, v.51, p.83-89, set. 2018.

CATARINO, P. On k-Pell hybrid numbers. **Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography**, v.22, p.1-7, 2019.

CERDA-MORALES, G. **Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties**. arXiv:1806.02231v1 [math.RA], p.1-9, 2018, Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1806.02231.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2020.

DASDEMIR, A. On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers By Matrix Method. **Applied Mathematical Sciences**, v.5, n.64, p.3173–3181, 2011.

MALCOLM, N. The publications of John Pell, F. R. S. (1611 – 1685): some new lights and some old confusions. **Notes and Records of the Royal Society of London**, v.54, n.3, p.275–292, 2000.

NORONHA, W. F. R.; ALVES, F. R. V. Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v.13, p.1-30, 2018.

ÖZDEMIR, M. Introduction to Hybrid Numbers. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v.28, fev. 2018.

SZYNAL-LIANA, A. The horadam hybrid numbers. **Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications**, v.38, n.1, p.91-98, 2018.

SZYNAL-LIANA, A.; WŁOCH, I. On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers. **Annales Mathematicae Silesianae**, v.33, n.1, p.276-283, 2019.

Submetido em: **19/03/2019**

Aceito em: **09/07/2020**