Revista Thema

v.16 | n.4 | 2019

p.745-754

DOI: http://dx.doi.org/10.15536/thema.V16.2019.745-754.1333

ISSN: 2177-2894 (online)

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Os números Gaussianos de Fibonacci e relações recorrentes bidimensionais

The Gaussian Fibonacci numbers and recurrent two-dimensional relations

Rannyelly Rodrigues de Oliveira[1], Francisco Régis Vieira Alves[2]

RESUMO

O Modelo de Fibonacci tem sua gênese na matematização da situação-problema, proposta por Leonardo Pisano em 1202, que aborda a reprodução de coelhos imortais. A resolução desse problema é representada pela sequência $\{1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$. À vista disso, este trabalho tem em seu escopo discutir o Modelo de Fibonacci numa perspectiva evolutiva das definições e relações oriundas do processo de complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci. Esse desenvolvimento é realizado a partir da inserção da componente imaginária i na recursividade unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ com os valores iniciais $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$ que determina os termos da Sequência de Fibonacci (SF). Dessa forma, considerando a definição do número complexo usual $z = a + bi\ com\ a, b \in \mathbb{Z}$, Jordan define os números Gaussianos de Fibonacci, os quais são descritos por $Gf_n = f_n + f_{n-1}.i$ com $Gf_0 = i$ e $Gf_1 = 1$. Nesse caso, as partes real e imaginária do número complexo são os termos da SF. Nessa abordagem, são discutidos alguns teoremas e propriedades que discutem o comportamento de somatórios dos números Gaussianos de Fibonacci, recorrendo a argumentos matriciais e ao processo de indução matemática. Além do mais, são discutidas relações recorrentes bidimensionais, isto é, com duas variáveis, que geram números complexos Fibonaccianos na forma: $G(n,m) = f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m.i$ assumindo os seguintes valores iniciais: $G(0,0) = 0$, $G(1,0) = 1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1 + i$. Nessa representação, pode-se observar que as partes real e imaginária são produtos de dois termos da SF.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci; números Gaussianos de Fibonacci; relações recorrentes bidimensionais; representações matriciais.

ABSTRACT

The Fibonacci Model has its genesis in the mathematization of the problem situation proposed by Leonardo Pisano in 1202, which deals with the reproduction of immortal rabbits. The resolution of this problem is represented by the sequence $\{1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$. *In view of this, this work has in its scope to discuss the Fibonacci Model in an evolutionary perspective of the definitions and relations originating from the process of Fibonacci Generalized Sequence. This development is accomplished by inserting the imaginary component*

[1] Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, Natal/RN – Brasil. E-mail: nanny-rockstar@hotmail.com

[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, Fortaleza/CE – Brasil. E-mail: fregis@ifce.edu.br

i into the one-dimensional recursion $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *with the initial values* $f_0 = 0$ *e* $f_1 = 1$ *and determining the terms of the Fibonacci Sequence (SF). Thus, considering the definition of the usual complex number* $z = a + bi$ *com* $a, b \in \mathbb{Z}$, *Jordan defines the Gaussian Fibonacci numbers, which are described by* $Gf_n = f_n + f_{n-1}.i$ *with* $Gf_0 = i$ *e* $Gf_1 = 1$. *In this case, the real and imaginary parts of the complex number are the SF terms. In this approach, we discuss some theorems and properties that discuss the behavior of sums of Gaussian Fibonacci numbers, using matrix arguments and the process of mathematical induction. Moreover, two-dimensional recurrent relations, that is, with two variables, are generated which generate Fibonacci complex numbers in the form:* $G(n,m) = f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m.i$ *assuming the following initial values:* $G(0,0) = 0$, $G(1,0) = 1$, $G(0,1) = i$ *and* $G(1,1) = 1 + i$. *In this representation, it can be seen that the real and imaginary are products of two SF terms.*

***Keywords**: Fibonacci sequence; Gaussian Fibonacci numbers; recurrent two-dimensional relations; matrix representations.*

1. INTRODUÇÃO

A Sequência de Fibonacci (SF) é abordada nos livros de História da Matemática, comumente adotados no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de História da Matemática. Nesse acervo, a SF é tratada apenas como um conjunto de números naturais, que podem ser calculados através da Fórmula de Binet. Contudo, verificou-se que essa sequência admite uma representação na forma de números complexos. Isto posto, este trabalho tem em seu escopo a discussão do Modelo de Fibonacci numa perspectiva evolutiva das definições e relações oriundas do processo de complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci. Dessa forma, tem-se o objetivo de apresentar relações matemáticas que permitem estudar o comportamento de somatórios dos números Gaussianos de Fibonacci recorrendo a argumentos matriciais e à indução matemática.

King (1963, p.16) explica que o Modelo de Fibonacci tem sua gênese com a proposição da situação-problema de Leonardo Pisano que abrange a reprodução de coelhos imortais. O problema foi apresentado na obra Liber Abbaci de Fibonacci em 1202. Esse trabalho aborda temas inerentes à Aritmética e Álgebra com ênfase nos números do sistema indo-arábico e nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre inteiros. O enunciado do problema é: "para descobrir quantos descendentes serão produzidos por este par em um ano se cada par de coelhos dar à luz a um novo par de coelhos a cada mês, começando com o segundo mês de sua vida. É assegurado que as mortes não ocorrem." A resolução dessa questão designa a conhecida SF: $\{1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$.

Nesse sentido, Alves e Catarino (2017) descrevem a SF através da recursividade unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ assumindo os seguintes valores iniciais: $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$. À vista disso, numa perspectiva evolutiva e epistemológica da Matemática, pode-se apontar autores, como Brother (1963), Hoggatt e Long (1974), Witford (1977), Asci e Gurel (2012), Alves e Catarino (2016; 2017), que investigam a sequência generalizada de Fibonacci sob diferentes representações tais como matriciais e polinomiais.

Todavia, nesse acervo, vale destacar as formas complexas que os termos da SF podem assumir. Isso é possível a partir da inserção da unidade imaginária *i*. O que potencializa um processo de complexificação da SF. Desse modo, este trabalho se restringe à fase inicial desse desenvolvimento através do estudo dos números Gaussianos de Fibonacci e de relações recorrentes bidimensionais. O que possibilita o crescimento dimensional da abordagem Fibonacciana.

Quadro 1 – Identidades Unidimensionais para os Números de Fibonacci.

Identidades Unidimensionais
$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$
$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$
$\sum_{i=1}^{n} f_{i} = f_{n+2} - 1$
$\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$
$\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$
$\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$

Fonte: Elaboração dos autores.

A priori, o modelo recursivo unidimensional foi discutido por Koshy (2001) que investigou algumas identidades unidimensionais não complexas criadas por François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891). Por outro lado, Berzsenyi (1977) descreve os Inteiros Gaussianos de Fibonacci, Pethe & Horadam (1986) discutem os números Gaussianos de Fibonacci e suas relações recursivas. Além disso, Jordan (1965) estuda os números Gaussianos de Fibonacci na forma: $Gf_n = f_n + f_{n-1}.i$, assumindo os valores iniciais $Gf_0 = i$ e $Gf_1 = 1$ e admitindo a recorrência $Gf_n = Gf_{n-1} + Gf_{n-2}$, $n > 1$. Nessa mesma vertente de complexificação, porém, vislumbrando representações em quatro dimensões através dos Quaternions, Halici (2013) apresenta a seguinte forma algébrica de um número complexo de Fibonacci: $C_n = f_n + f_{n+1}.i$.

Além do mais, numa perspectiva de crescimento dimensional das relações Fibonaccianas, Harman (1981) e, Oliveira, Alves e Paiva (2017) discutem a extensão de identidades unidimensionais (Quadro 1) para duas dimensões através de relações recorrentes bidimensionais que geram os números na forma $G(n,m) = f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m.i$ assumindo os seguintes valores iniciais: $G(0,0) = 0$, $G(1,0) = 1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1 + i$. A seguir, serão apresentados alguns teoremas e propriedades que discutem o comportamento de somatórios dos números Gaussianos de Fibonacci, utilizando argumentos matriciais e, assim, seguindo um percurso de indução matemática.

2. OS NÚMEROS GAUSSIANOS DE FIBONACCI

O conjunto dos números reais admite uma ampliação através da consideração da componente imaginária *i*. Esse processo de extensão gera um conjunto chamado de Complexo, no qual os elementos são números complexos na forma $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, onde a, b são, respectivamente, partes real e imaginária de um número complexo. Assim, quando se considera as partes real e imaginária como sendo os termos da SF, surge, então, a possibilidade de definir o número complexo de Fibonacci.

Nessa abordagem, será considerada a definição de Jordan (1965) que apresenta os números Gaussianos de Fibonacci descritos na forma algébrica: $G f_n = f_n + f_{n-1}.i$ com os valores iniciais $G f_0 = i$ e $G f_1 = 1$. Contudo, como se trata de avaliar o modelo recursivo unidimensional numa abordagem complexa, é relevante observar as identidades da Quadro 1. Desse modo, considerando o somatório dos números Gaussianos de Fibonacci, pode-se verificar que:

$$\sum_{j=0}^{2} Gf_j = Gf_0 + Gf_1 + Gf_2 = i + 1 + 1 + i = 2 + 2i = (3 + 2i) - 1 = Gf_{2+2} - 1$$

$$\sum_{j=0}^{3} Gf_j = Gf_0 + Gf_1 + Gf_2 + Gf_3 = i + 1 + (1 + i) + (2 + i) = 4 + 3i = (5 + 3i) - 1 = Gf_{3+2} - 1$$

$$\sum_{j=0}^{4} Gf_j = Gf_0 + Gf_1 + Gf_2 + Gf_3 + Gf_4 = i + 1 + (1 + i) + (2 + i) + (3 + 2i) = 7 + 5i = (8 + 5i) - 1 = Gf_{4+2} - 1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=0}^{n} Gf_j = Gf_{n+2} - 1 = Gf_{n+2} - Gf_1$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} Gf_j = \sum_{j=0}^{n} Gf_j + Gf_{n+1} = Gf_{n+2} - 1 + Gf_{n+1} = Gf_{n+2} + Gf_{n+1} - 1 = Gf_{n+3} - 1 = Gf_{(n+1)+2} - 1.$$

De modo análogo ao processo anterior, em relação à identidade $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$, pode-se fazer para os números Gaussianos de Fibonacci, como $Gf_n = Gf_{n-1} + Gf_{n-2} \Leftrightarrow Gf_{n-1} = Gf_n - Gf_{n-2}$, que:

$$\begin{aligned}
Gf_1 &= Gf_2 - Gf_0 \\
Gf_2 &= Gf_3 - Gf_1 \\
Gf_3 &= Gf_4 - Gf_2 \\
Gf_4 &= Gf_5 - Gf_3 \\
&\vdots \\
Gf_{2n-2} &= Gf_{2n-1} - Gf_{2n-3} \\
Gf_{2n-1} &= Gf_{2n} - Gf_{2n-2} \\
Gf_{2n} &= Gf_{2n+1} - Gf_{2n-1}
\end{aligned}$$

Contudo, avaliando apenas os números de índices ímpares, ao somar todos esses números, devido aos cancelamentos sucessivos dos termos de índice $2n$, obtém-se $\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1} = Gf_{2n} - Gf_0$. Observe:

$$\begin{aligned}
Gf_1 &= Gf_2 - Gf_0\\
Gf_3 &= Gf_4 - Gf_2\\
Gf_5 &= Gf_6 - Gf_4\\
&\vdots\\
Gf_{2n-3} &= Gf_{2n-2} - Gf_{2n-4}\\
Gf_{2n-1} &= Gf_{2n} - Gf_{2n-2}
\end{aligned}$$

Além do mais, pode-se ver que: $\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{2n} Gf_j - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1} = Gf_{2n+2} - Gf_0 - Gf_1 - (Gf_{2n} - Gf_0) =$ $= Gf_{2n+2} - Gf_{2n} - Gf_0 - Gf_1 + Gf_0 = Gf_{2n+1} - 1$. Assim, para $\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{2n} Gf_j - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1}$, pode-se avaliar:

$$\sum_{j=1}^{1} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{2} Gf_j - \sum_{j=1}^{1} Gf_{2j-1} \Rightarrow Gf_2 = Gf_1 + Gf_2 - Gf_1$$

$$\sum_{j=1}^{2} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{4} Gf_j - \sum_{j=1}^{2} Gf_{2j-1} \Rightarrow Gf_2 + Gf_4 = Gf_1 + Gf_2 + Gf_3 + Gf_4 - (Gf_1 + Gf_3)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j} = \sum_{j=1}^{2n} Gf_j - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} Gf_{2j} = \left(\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j} + Gf_{2n+2}\right) = Gf_{2n+2} + \left(\sum_{j=1}^{2n} Gf_j - \sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1}\right) = \sum_{j=1}^{2n+2} Gf_j - \left(\sum_{j=1}^{n} Gf_{2j-1} + Gf_{2(n+1)-1}\right) = \sum_{j=1}^{2n+2} Gf_j - \sum_{j=1}^{n+1} Gf_{2j-1}.$$

Quadro 2 – Propriedades Gaussianas para os Números Complexos de Fibonacci.

Propriedades para os números Gaussianos de Fibonacci
$Gf_{n+1}^{\;2} + Gf_n^{\;2} = (1+2i).f_{2n}$
$Gf_{n+1}Gf_{p+1} + Gf_nGf_p = (1+2i)\cdot f_{n+p}$
$Gf_{n+1}^{\,2}Gf_{n+2} + 2.Gf_nGf_{n+1}^{\,2} + Gf_n^{\,3} = (1+2i).(f_{3n+1} + i.f_{3n})$
$2.Gf_nGf_{n+1}^{\,2}Gf_{n+2} + 3.Gf_n^{\,2}Gf_{n+1}^{\,2} + Gf_{n+1}^{\,2}Gf_{n+2}^{\,2} + Gf_n^{\,4} + Gf_{n+1}^{\,4} = (1+2i)^2.f_{4n+1}$
$\sum_{j=1}^{n} Gf_{-(2j-1)} = Gf_0 - Gf_{-(2n-2)}$
$\sum_{j=1}^{n} Gf_{-2j} = Gf_{-1} - Gf_{-(2n-1)}$
$2Gf_1^{\,2} + 2Gf_2^{\,2} + 2Gf_3^{\,2} + \cdots + 2Gf_n^{\,2} = (1+2i)^n.(f_{2n+1} - 1) + 1$

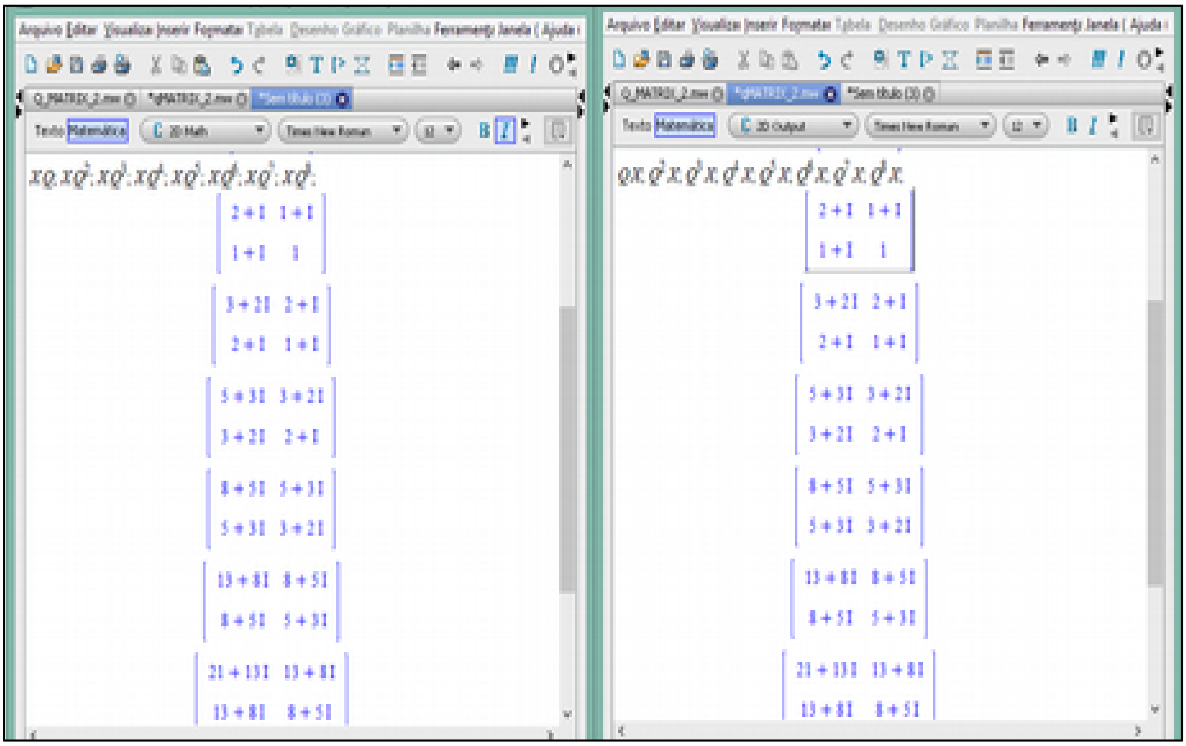
Fonte: Elaboração dos autores.

Dessa forma, as propriedades Gaussianas para os Números Complexos de Fibonacci (Quadro 2) são extraídas através de um processo de indução matemática. Destarte, fundamentando-se nos argumentos matriciais de Gould (1981), serão discutidas representações matriciais, um teorema e um corolário, a fim de determinar fórmulas de redução das relações oriundas do modelo de Fibonacci. Nesse sentido, as seguintes matrizes: $X = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$ serão consideradas, daí, tem-se que $\det Q = -1 \neq 0$ e $\det X = i - 2 \neq 0$. O que permite compreender que as matrizes X e Q admitem inversa. Ademais, para $n \geq 1$, segue que:

$$
\begin{aligned}
X \cdot Q &= \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_3 & Gf_2 \\ Gf_2 & Gf_1 \end{pmatrix} \\
X \cdot Q^2 &= \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2i & 2+i \\ 2+i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_4 & Gf_3 \\ Gf_3 & Gf_2 \end{pmatrix} \\
X \cdot Q^3 &= \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3i & 3+2i \\ 3+2i & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_5 & Gf_4 \\ Gf_4 & Gf_3 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
X \cdot Q^n &= \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_n \end{pmatrix} \\
X \cdot Q^{n+1} &= (X \cdot Q^n).Q = \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gf_{n+3} & Gf_{n+2} \\ Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Tal processo designa a determinação generalizada de $X \cdot Q^n = \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_n \end{pmatrix}$. E, a verificação da propriedade comutativa no produto matricial entre X e Q, ou seja, das potências matriciais do tipo $Q^n \cdot X$ e $X \cdot Q^n$ pode ser visualizada na Figura 1.

Figura 1 – Visualização no *CAS Maple* da propriedade comutativa das matrizes do tipo $Q^n \cdot X$ e $X \cdot Q^n$.



Fonte: Elaboração dos autores.

Teorema 1: A Fórmula de Cassini com $n \geq 0$, para os números Gaussinanos de Fibonacci, é:

$$Gf_n \cdot Gf_{n+2} - Gf_{n+1}^2 = (2-i)(-1)^{n+1}.$$

Demonstração: Como $X = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X) = i-2$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(Q) = f_0.f_2 - f_1^2$ e $\det(X)\cdot\det(Q^n) = (i-2)(f_0.f_2 - f_1^2)^n = (2-i)(-1)^{n+1}$. E, sabendo que $X \cdot Q^n = \begin{pmatrix} Gf_{n+2} & Gf_{n+1} \\ Gf_{n+1} & Gf_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(X \cdot Q^n) = Gf_n \cdot Gf_{n+2} - Gf_{n+1}^2$, então, tem-se que: $\det(X \cdot Q^n) = \det(X).\det(Q^n) \Rightarrow$

$\Rightarrow Gf_n \cdot Gf_{n+2} - Gf_{n+1}^2 = (2-i)(-1)^{n+1}$. ∎

Corolário 1: Para todo $n \geq 0$, vale que:

$$\det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & Gf_{n+3} - 1 \\ Gf_{n+2} - 1 & Gf_{n+3} - 1 & Gf_{n+4} - 1 \end{pmatrix} = (-1)^n (2-i).$$

Demonstração: Realizando algumas operações elementares entre as linhas e colunas do determinante de ordem 3, segue que:

$$\det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & Gf_{n+3} - 1 \\ Gf_{n+2} - 1 & Gf_{n+3} - 1 & Gf_{n+4} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & Gf_{n+3} - 1 \\ Gf_{n+1} + Gf_n - 1 & Gf_{n+2} + Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+3} + Gf_{n+2} - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overset{L_2 - L_3 \to L_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & Gf_{n+3} - 1 \\ -Gf_n & -Gf_{n+1} & -Gf_{n+2} \end{pmatrix} \overset{L_3 + L_1 \to L_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & Gf_n + Gf_{n+1} - 1 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & Gf_{n+1} + Gf_{n+2} - 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-L_3 \to L_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & Gf_n + Gf_{n+1} - 1 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & Gf_{n+1} + Gf_{n+2} - 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_2 - C_3 \to C_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & -Gf_n \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & -Gf_{n+1} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_1 + C_3 \to C_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & -1 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-C_3 \to C_3}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_n - 1 & Gf_{n+1} - 1 & 1 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 + L_3 \to L_1}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_n & Gf_{n+1} & 0 \\ Gf_{n+1} - 1 & Gf_{n+2} - 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_2 + L_3 \to L_2}{\Longrightarrow} \det\begin{pmatrix} Gf_n & Gf_{n+1} & 0 \\ Gf_{n+1} & Gf_{n+2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(Gf_n \cdot Gf_{n+2} - Gf_{n+1}{}^2) = (-1)^{n+2}(2-i) =$$

$$= (-1)^n(2-i). \qquad \blacksquare$$

3. AS RELAÇÕES RECORRENTES BIDIMENSIONAIS

Numa perspectiva de crescimento dimensional das representações Fibonaccianas e numa abordagem complexa, serão apresentadas duas relações recorrentes bidimensionais surgidas a partir da inserção da unidade imaginária i e de duas variáveis. Essas relações recursivas geram números $G(n,m)$ dos quais vale destacar a seguinte forma algébrica: $G(n,m) = f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m.i$. Observe que as partes real e imaginária são produtos de termos da SF. Os trabalhos de Harman (1981), Oliveira, Alves e Paiva (2017) discutem as identidades bidimensionais dispostas no Quadro 3. Todavia, vale apresentar a seguinte definição fundamental para o desenvolvimento dessas identidades.

Definição 1: Sejam $G(0,0) = 0$, $G(1,0) = 1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1 + i$, os números complexos de Fibonacci na forma $G(n,m)$ satisfazem às seguintes relações recorrentes bidimensionais:

$$G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$$
$$G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m).$$

Lema 1: Para os números complexos de Fibonacci na forma $G(n,m)$, são válidas as seguintes propriedades:

$$G(n,0) = f_n$$
$$G(0,m) = f_m i$$
$$G(n,1) = f_n + f_{n+1} i$$
$$G(1,m) = f_{m+1} + f_m i.$$

Demonstração: Pelo segundo princípio de indução sobre n, sendo n = {0, 1, 2, 3,...} e m = 0, para a relação $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ com os valores iniciais $G(0,0) = 0 = f_0$ e $G(1,0) = 1 = f_1$, determina-se a propriedade $G(n,0) = f_n$. Analogamente, verifica-se a validade de $G(0,m) = f_m i$, quando se avalia a recursividade $G(n,m+2) = \; = G(n,m+1) + G(n,m)$ com $G(0,0) = 0 = f_0$, $G(1,0) = 1 = f_1$ e $G(0,1) = i$, para n = 0 e m = {0, 1, 2, 3,...}.

Ainda por indução, prova-se a propriedade $G(n,1) = f_n + f_{n+1} i$ usando a relação $G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m)$ e assumindo $G(0,0) = 0 = f_0$, $G(1,0) = 1 = f_1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1 + i$ com m =1 e n = {0, 1, 2, 3,...}. Por fim, de modo análogo, segue a prova de $G(1,m) = f_{m+1} + f_m i$ recorrendo à relação $G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)$ com os valores iniciais definidos $G(0,0) = 0 = f_0$, $G(1,0) = 1 = f_1$, $G(0,1) = i$ e $G(1,1) = 1 + i$, analisando a recorrência para n =1 e para m = {0, 1, 2, 3,...}. ∎

Teorema 2: Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, os números da forma $G(n,m)$ possuem a seguinte forma algébrica:

$$G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i.$$

Demonstração: Segue que:

$$\begin{aligned}
&G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m)\\
&G(n,2) = G(n,1) + G(n,0) = 1G(n,0) + 1G(n,1) = f_1 G(n,0) + f_2 G(n,1)\\
&G(n,3) = G(n,2) + G(n,1) = 1G(n,0) + 2G(n,1) = f_2 G(n,0) + f_3 G(n,1)\\
&G(n,4) = G(n,3) + G(n,2) = 2G(n,0) + 3G(n,1) = f_3 G(n,0) + f_4 G(n,1)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$G(n,m) = G(n,m-1) + G(n,m-2) = f_{m-1} G(n,0) + f_m G(n,1) = f_n (f_{m-1} + f_m) + f_{n+1}.f_m i \therefore G(n,m) = f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m i.$$

Quadro 3 – Identidades Bidimensionais para os Números Complexos de Fibonacci.

Identidades bidimensionais para os Números Complexos de Fibonacci
$\sum_{i=0}^{n} G(2i+1,m) = f_{2n+2}.f_{m+1} + (f_{2n+3} - 1) f_m i$
$\sum_{i=1}^{n} G(2i,m) = (f_{2n+1} - 1) f_{m+1} + (f_{2n+2} - 1) f_m i$
$\sum_{i=1}^{n} G(i,m) = (f_{n+2} - 1) f_{m+1} + (f_{n+3} - 2) f_m i$
$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = [(1 - f_{n+1}.f_{n+2}) f_m^2 + f_n.f_{n+1} f_{m+1}^2] + (f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2} - 1) f_m f_{m+1} i$
$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m).$
$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m).$

Fonte: Elaboração dos autores.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho direciona uma discussão sobre o processo evolutivo de um modelo matemático não trivial norteado pela complexificação de suas relações recorrentes, a partir da inserção da unidade imaginária *i* que, consequentemente, proporciona uma avaliação do crescimento dimensional das representações Fibonaccianas. Com isso, pode-se verificar que a definição usual de número complexo é trabalhada para um caso particular, a Sequência Generalizada de Fibonacci e, assim, gerando números complexos denominados de Gaussianos de Fibonacci na seguinte forma algébrica: $Gf_n = f_n + f_{n-1}.i$. Nesse sentido, inserindo duas variáveis nas representações gaussianas, são obtidos números bidimensionais na forma $G(n,m) = f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m.i$.

À vista disso, pode-se vislumbrar que o estudo das relações bidimensionais designa a generalização *n*-dimensional gaussiana através da indução matemática. Além do mais, pode-se fundamentar uma extensão das representações bidimensionais Fibonaccianas para quatro e oito dimensões através dos Quaternions e Octonions respectivamente.

Por fim, pretende-se aproveitar este artigo para oportunizar ao professor de Matemática o conhecimento sobre o modelo complexo de Fibonacci e seu processo de evolução. E, assim, espera-se contribuir para a ampliação do repertório de conhecimento matemático do professor de

Matemática através da publicização de relações matemáticas oriundas do modelo de Fibonacci de recursividade unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

5. REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. The Bivariate (Complex) Fibonacci and Lucas Polynomials: an Historical Investigation with the Maple's Help. **Acta Didactica Napocensia**, v.9, n.4, p.71-95, 2016.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A Classe dos Polinômios Bivariados de Fibonacci (PBF): Elementos Recentes sobre a Evolução de um Modelo. **Revista Thema**, v.14, n.1, p.112-136, 2017.

ASCI, M.; GUREL, E. On Bivariate Complex Fibonacci and Lucas Polynomials. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v.18, n.1, p.1-25, 2012.

BERZSENYI, G. Gaussian Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v.15, n.3, p.233-236, 1977.

BROTHER, U. A. Exploring Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v.1, n.1, p.57-64, 1963.

GOULD, H. W. A history of the Fibonacci q-matrix and a higher-dimensional problem. **The Fibonacci Quarterly**, v.19, n.3, p.250-257, 1981.

HALICI, S. On Complex Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, v.23, n.1, p.105-112, 2013.

HARMAN, C. J. Complex Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v.19, p.82-86, 1981.

HOGGATT, V. E.; LONG, C. T. Divisibility Properties of Generalized Fibonacci Polynomials. **The Fibonacci Quarterly,** v.12, n.2, p.113-121, 1974.

JORDAN, J. H. Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v.3, n.4, p.315-318, 1965.

KING, C. Leonardo Fibonacci. **The Fibonacci Quarterly**, v.1, n.4, p.15-19, dec. 1963.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Appllications.** New York: Wileyand Sons publications, 2001.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades Bi e Tridimensionais para os Números de Fibonacci na Forma Complexa. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v.11ic, p.91-106, 2017.

PETHE, S.; HORADAM A. F. Generalized Fibonacci Gaussian Numbers. **Bull. Aust. Math. Soc.**, *v.*33, p.37-48, 1986.

WITFORD, A. K. Binet´s Formula Generalized. **The Fibonacci Quarterly**, v.15, n.1, p.21-22, feb. 1977.

Submetido em: **19/02/2019**

Aprovado em: **14/11/2019**