

**RELATOS****Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma oficina pedagógica*****Exploring Fractal Geometry in High School through a pedagogical workshop***Aline Picoli Sonza<sup>1</sup>; José Carlos Pinto Leivas<sup>1</sup>**RESUMO**

Diante da inegável necessidade de se buscar métodos e metodologias de ensino que tornem a aprendizagem de Matemática mais atrativa, que desperte o interesse do estudante e que este seja um sujeito dinâmico no processo, o ensino dos fractais por meio de uma oficina pedagógica revelou-se como uma alternativa proeminente. Neste contexto, o presente artigo é o relato do desenvolvimento de uma oficina sobre Geometria dos Fractais em uma turma de 3º ano do Ensino Médio. A aplicação da oficina aconteceu em etapas que compreenderam uma abordagem inicial, contendo aspectos históricos, aplicações, características e curiosidades sobre os fractais, construções em papel quadriculado e em papel dobradura, bem como a realização de análises e cálculos. A partir das construções, foram realizadas discussões a respeito das características e das relações dos fractais com outras áreas e com outros tópicos de Matemática do Ensino Médio. A análise dos resultados da aplicação da oficina permite concluir que os objetivos foram atingidos pois, além de identificar os fractais na natureza, suas características e a importância do seu estudo, os alunos conseguiram relacionar com outros tópicos da Matemática já estudados.

**Palavras-chave:** fractais; ensino médio; oficina pedagógica.

**ABSTRACT**

*Facing the undeniable need to seek teaching methods and methodologies that make the learning of mathematics more attractive, which arouses the student's interest in order to make him or her more dynamic in the process, the teaching of the fractals through a pedagogical workshop was revealed as a prominent alternative. In this context, the present article is the report of the development of a workshop on Geometry of the Fractals in a class of 3rd year of High School. The application of the workshop happened in stages that included an initial approach, containing historical aspects, applications, characteristics and curiosities about the fractals, constructions in graph paper and folding paper, and the performing of analysis and calculations. From the constructions, discussions were made about the characteristics and the relations of the fractals with other areas and with other topics of Mathematics of High School. The analysis of the results of the workshop application allows us to conclude that the objectives were achieved because, besides identifying the fractals in nature, their characteristics and the importance of this study, the students were able to relate to other topics of mathematics already studied.*

**Keywords:** fractals; high school; pedagogical workshop.

<sup>1</sup> UFN - Universitário Franciscana – Santa Maria/RS – Brasil.

## 1. INTRODUÇÃO

Durante séculos a Geometria Euclidiana foi considerada a que melhor poderia descrever o mundo em que vivemos. Entretanto, ele é muito mais complexo e não é possível explicá-lo, descrevê-lo ou analisá-lo somente com as formas e conceitos dessa geometria. Afinal, o mundo não se resume a pontos, retas, planos e algumas formas tridimensionais e regulares. Ao trabalhar com a Geometria no Ensino Médio, conforme o currículo sugere, deixamos de mencionar muitos objetos e comportamentos que não teriam como ser explicados pela Geometria Euclidiana.

As chamadas Geometrias Não-Euclidianas surgiram a partir de discussões sobre o quinto postulado de Euclides. Entretanto, outras geometrias foram sendo criadas ao longo dos anos e séculos, como a dos fractais que, embora não tenha origem nas discussões mencionadas, também é não euclidiana.

Entre as inúmeras aplicações da Geometria Fractal, pode-se destacar algumas contribuições em diferentes áreas do conhecimento, tais como: a compreensão do crescimento das plantas para a biologia, o estudo de superfícies irregulares na física, o maior detalhamento da anatomia interna do corpo humano e análise de alguns tipos de câncer para a Medicina, dentre outras. Além de todas as aplicações nas Ciências, os fractais podem ser vistos como importantes aliados no ensino de Matemática.

Vários tópicos estudados ao longo do Ensino Médio podem trazer para a sala de aula as noções de fractais, como por exemplo: funções, sequências e progressões aritméticas e geométricas, formas geométricas, perímetro, área e volume, simetria e noções de limites, entre outros. A abordagem da Geometria Fractal pode acontecer de inúmeras formas e, por sua diversidade de formas e cores, pode ser associada ao uso do computador o que, geralmente, desperta o interesse, a curiosidade e a atenção dos alunos.

Para Sallum (2005),

a introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas. (SALLUM, 2005, p. 1)

Perante o exposto, delineou-se a aplicação de uma oficina em uma turma de Ensino Médio, em que a primeira autora é a professora efetiva, com o propósito de inserir o estudo dos fractais e, a partir dele, explorar, enriquecer e requintar o ensino da Matemática.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Analisando o mundo à nossa volta percebe-se que a maior parte das construções feitas pelo homem são espelhadas na Geometria Euclidiana. É bastante comum a utilização de pirâmides, prismas, cilindros e cones, por exemplo, em edifícios, monumentos e muitas outras estruturas. Por muitos séculos essa geometria serviu para descrever as formas encontradas na natureza e, assim, servir de inspiração para engenheiros e arquitetos em seus projetos. Entretanto, com o passar do tempo e com a percepção de que nem todas essas formas podem ser explicadas e estudadas por meio da Geometria Euclidiana, surgiu a Geometria Fractal.

Portanto, foi a partir da necessidade de se calcular e descrever certos fenômenos da natureza ou objetos que não possuem forma definida que surgiu a Geometria Fractal, uma geometria que apresenta estruturas geometricamente complexas, infinitamente variadas e que estuda o comportamento dos fractais. O termo fractal se originou do latim *fractus*, referindo-se a irregular ou quebrado e do verbo em latim correspondente *frangere* que significa quebrar, criar fragmentos irregulares. O matemático francês Benoit Mandelbrot (1975) é considerado o pai dos fractais por ter sido quem deu nome a eles. Segundo Mandelbrot “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são suaves nem o raio se propaga em linha reta”. (MANDELBROT, 1998, p. 468)

Existem indicações da existência de estudos sobre fractais antes do século XX, entretanto, eram chamados “monstros matemáticos” ou “demônios” que não tinham valor científico em alguns países como Índia e China. Mandelbrot, para efetuar seus estudos acerca dos fractais, utilizou algumas pesquisas que já haviam sido realizadas, mas não concluídas, como as de David Hilbert (1862-1943), Georg Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), Helge von Koch (1870-1924) e Waclaw Sierpinski (1882-1969).

A geometria dos fractais está ligada intimamente à ciência do CAOS uma vez que a estrutura fragmentada, bela e complexa dessa geometria fornece certa ordem ao Caos. Neste aspecto, de acordo com Barbosa (2002), na natureza

temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplifica-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (BARBOSA, 2002, p. 10)

Existem várias definições para os fractais, embora nenhuma delas seja absoluta. Mandelbrot (1998, p. 13) questiona: “Será necessário definir uma figura fractal de modo rigoroso, para, em seguida, dizer que um objecto real é fractal por se assemelhar à figura geométrica que constitui o modelo?” Ele afirma que seria prematuro tentar formular essa definição permanecendo aberta e intuitiva para ser aprimorada sucessivamente.

Se a definição de fractal ainda está em aberto na Matemática, pode-se identificá-los por suas características. Ele é um objeto que mantém suas formas mesmo alterando a escala sob a qual ele é analisado, ou seja, pode-se ampliar ou reduzir centenas de vezes um fractal que irá se perceber a preservação das características originais. De maneira oposta, uma circunferência parece ir reduzindo a sua curvatura à medida que se amplia alguma de suas partes.

De acordo com Serra (1997), as características dos fractais são:

estrutura fina: O grau de detalhamento de um Fractal não diminui se examinarmos uma porção arbitrariamente pequena do mesmo. O Fractal possui detalhes em parte tão pequenos como podemos imaginar; Auto-similaridade: a semelhança assim observada manifesta-se em qualquer nível de construção do Fractal, fazendo com que uma parte do Fractal se assemelhe a uma parte maior, ou ao Fractal inteiro. Auto-similaridade estrita: é uma porção do Fractal que reproduz exatamente a forma de uma porção maior, assim como lados dos triângulos semelhantes de tamanhos diferentes, o triângulo menor tem exatamente a mesma forma do maior. Auto-similaridade estocástica: é caracterizada estaticamente onde os elementos de uma certa parte da figura enquadram-se em uma certa modalidade da distribuição

estatística, com uma certa média e um certo desvio padrão; Simplicidade da lei de formação: o alto grau de detalhamento e a complexidade da estrutura de um Fractal não impede, em geral, que eles sejam formados por processos relativamente simples e diretos. Isso possibilita a construção de fractais com base em algoritmos simples. (SERRA, 1997, p. 9-11)

Para Barbosa (2002, p. 13), a Matemática proporciona ao matemático, ao professor e também deve permitir ao educando,

[...] prazeres oriundos de várias formas de pensar e ver, ou de suas próprias ações. Muitas vezes eles emergem de superação de dificuldades; assim é, por exemplo, o estado prazeroso emergente da simples busca com sucesso das raízes na resolução de uma equação ou de uma situação-problema numérica ou geométrica cuja solução leva a encontrar apenas alguns números ou determinados pontos de um plano. (BARBOSA, 2002, p. 13)

Existem inúmeras contribuições do estudo dos fractais em outras áreas. Silva (2011, p. 43) sugere algumas atividades envolvendo os fractais. Entre elas, a de número 12: "Para que serve a geometria fractal?" A autora destaca a atividade como fascinante por causa das aplicações dos fractais em diversas áreas do conhecimento. Na Teoria do Caos, que estuda o funcionamento de sistemas dinâmicos e complexos como a formação das nuvens, na Medicina auxilia no diagnóstico do câncer uma vez que ajuda na medição da tortuosidade da borda em que o tumor se encontra, nas Artes criando, com o auxílio do computador, desenhos abstratos incrivelmente belos e músicas a partir das cores dos fractais gerados no computador. Na Arquitetura os fractais têm auxiliado no desenvolvimento de obras belíssimas e ricas em detalhes, auxilia também na Medicina Veterinária e no Mercado Financeiro ou de Ações.

Em breve pesquisa na *internet*, pode-se encontrar muitos relatos referentes a aplicações de fractais no Ensino Básico. As conclusões dos trabalhos, em sua maioria, mostram que a utilização dos fractais pode favorecer a aprendizagem dos alunos além de trazer para a sala de aula uma Matemática associada ao belo e desafiador. Carvalho (2005, p. 5) relata que "a Geometria Fractal pode proporcionar aos alunos uma relação mais forte entre os saberes do cotidiano e o escolar, além de ter proporcionado uma visão dinâmica da Matemática como uma ciência que avança, e não como um corpo de conhecimentos prontos e acabados." Afirma, ainda, que "As atividades com Geometria Fractal puderam contribuir significativamente na (re) aquisição de conceitos matemáticos necessários à resolução correta das questões propostas." (CARVALHO, 2005, p. 79)

Em relação à Educação Matemática, Fassarella, Luz *et al.* (2015, p. 2), salientam que a Geometria Fractal coloca em perspectiva as seguintes possibilidades que justificam sua abordagem na Educação Básica:

- Discutir um fragmento interessante da história da Matemática, a história da descoberta e dos descobridores dos fractais.
- Mostrar aplicações notáveis da Matemática numa variedade de situações tecnológicas ou não, tais como a modelagem de formas da natureza e a criações artísticas.
- Contextualizar de forma inusitada problemas relacionados a temas tradicionais do currículo básico da Matemática, tais como sequências numéricas, geometria euclidiana e funções.

- Tematizar o trabalho com material concreto, tais como a construção de um cartão tridimensional, uma árvore tetraédrica, etc.
- Tematizar o trabalho com computadores e ilustrar seu uso científico, o que permite, por exemplo, trabalhar o conceito de algoritmo através da lei de construção iterativa dos fractais.

Outro trabalho encontrado nessa busca foi o relato de uma proposta de ensino utilizando a Geometria Fractal. Segundo as autoras, os principais objetivos foram a motivação dos alunos em estudar Matemática e a aprendizagem significativa dos conceitos trabalhados. "Os resultados obtidos foram satisfatórios e aulas como essa possuem diversos benefícios para o educando. Além de estimular a criatividade e o raciocínio, a Geometria Fractal é uma forma de motivar os educandos a aprender matemática." (VARGAS *et al.*, p. 773)

Como afirma Lorenzato (2006),

é muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos (...). Esse processo começa com o apoio dos nossos sentidos e, assim, ele é aparentemente paradoxal porque, para se chegar no abstrato, é preciso partir do concreto. (LORENZATO, 2006, p. 22)

Nesse sentido, a oficina pedagógica constitui-se como uma metodologia que pode favorecer a aprendizagem de um tema desconhecido pelos alunos, como os fractais, por ser um espaço no qual a aprendizagem se constitui ao longo de um processo de construção de conhecimento. A oficina caracteriza-se por ser uma "construção coletiva de um saber, de análise da realidade, de confrontação e intercâmbio de experiências" (CANDAUI, 1999, p.23). Essa metodologia foi a escolhida na construção da presente proposta porque acredita-se que o aluno, ao longo da construção dos fractais, vai identificando e refletindo sobre as características deles, sendo capaz de interagir, manipular e participar de todo o processo favorecendo o entendimento e a aprendizagem. (GONZÁLES CUBELLES apud CANDAUI, 1999, p.23).

Nessa perspectiva, para Cuberes apud Vieira e Volquind (2002, p. 11), uma oficina pedagógica constitui-se como "um tempo e um espaço para aprendizagem; um processo ativo de transformação recíproca entre sujeito e objeto; um caminho com alternativas, com equilíbrios que nos aproximam progressivamente do objeto a conhecer". Ou seja, é um momento em que se possibilita ao aluno a construção e a apropriação de conhecimentos teóricos e práticos de maneira dinâmica e reflexiva. Pode-se dizer que se trata de uma metodologia centrada no aluno e na sua aprendizagem.

Na presente proposta de oficina pedagógica os alunos realizaram as construções com papel dobradura para identificar características dos fractais e realizar os cálculos propostos. O aluno é visto como sujeito em todo o processo, ou seja, o material didático utilizado foi construído pelo próprio aluno na oficina. Segundo Lorenzato (2006, p. 3), "muitos foram os educadores famosos que, nos últimos séculos, ressaltaram a importância do apoio visual ou do visual-tátil como facilitador para a aprendizagem." Em tópico dedicado ao uso de Material Didático (MD), o autor refere que "é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem". (LORENZATO, 2006, p. 18)

### 3. METODOLOGIA

Para inserir os fractais em uma turma de alunos de Ensino Médio, que não possui em seu currículo essa abordagem, utilizou-se uma oficina pedagógica produzida com os seguintes objetivos:

Geral: Introduzir noções da Geometria Fractal em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio por meio de uma oficina a fim de que os alunos percebam a importância do seu estudo e possam, através da construção de fractais, identificar as características e algumas aplicações dos fractais no seu cotidiano.

Específicos:

- Explorar as características dos fractais;
- Identificar fractais em objetos e natureza;
- Construir fractais com papel dobradura, utilizando o computador;
- Reconhecer características dos fractais construídos;
- Explorar conteúdos matemáticos já estudados a partir das construções fractais.

A oficina foi realizada em turno inverso ao das aulas e a turma de alunos foi convidada a participar pela professora e primeira autora desse artigo. O convite foi feito ao final de uma aula de Matemática e, como motivação para a participação, apresentou-se um infográfico produzido com esta finalidade. Ou seja, o convite foi formalizado por meio de uma apresentação inicial de informações a respeito dos fractais, com imagens e algumas características utilizando o software *Piktochart*. Para o desenvolvimento da oficina, as atividades foram divididas nas seguintes etapas:

Etapa 1: apresentação de objetos e imagens de fractais, discussão sobre formas geométricas na natureza baseadas na Geometria Euclidiana e Não Euclidiana e sobre a importância do estudo da Geometria Fractal, análise e identificação das características dos fractais.

Etapa 2: construções de fractais com papel quadriculado, realização das atividades propostas (Atividade 1) e discussão dos resultados. Neste momento, houve a apresentação das construções e análise direcionando à aplicação dos fractais a tópicos estudados na Matemática do Ensino Médio. Os alunos efetuaram medições e fizeram seus registros em material disponibilizado para posterior discussão.

Etapa 3: construção de cartões fractais com papel dobradura.

Etapa 4: na etapa final, os alunos foram convidados a escrever suas observações acerca da oficina, apresentando sugestões e respondendo a um questionário. Da análise dos registros produzidos, foram observados os seguintes aspectos: envolvimento dos alunos ao longo da oficina; construções realizadas e comentários dos alunos durante as discussões; registros das medidas das construções; e respostas ao questionário.

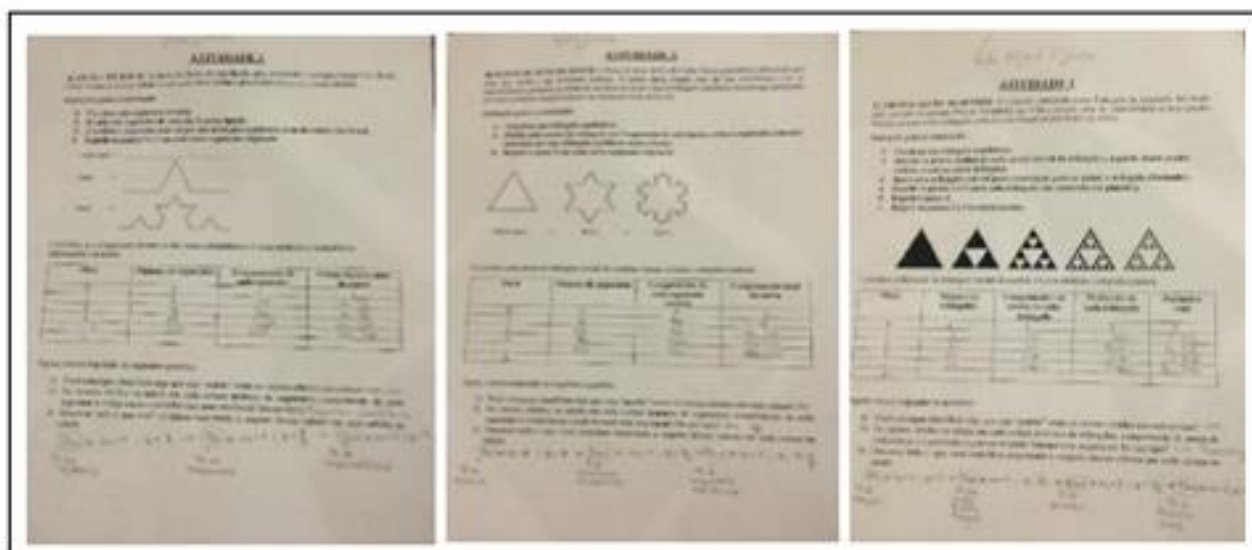
#### 4. DESENVOLVIMENTO DA OFICINA

No primeiro momento houve a apresentação de objetos e imagens de fractais, discussão sobre formas geométricas na natureza baseadas na geometria euclidiana e não euclidiana e sobre a importância do estudo da Geometria Fractal, bem como análise e identificação das características dos fractais, além de aspectos históricos e aplicações dos fractais em outras áreas de conhecimento. Essa discussão teve como suporte uma apresentação criada no software *prezi*.

Em seguida, os alunos iniciaram as construções de fractais utilizando papel quadriculado, régua, transferidor e compasso. As construções foram baseadas em orientações fornecidas e inspiradas nas sugestões de atividades de Silva (2011, p. 79-82). Foram quatro atividades disponibilizadas nesta etapa onde cada dupla de alunos deveria realizar uma das construções propostas, responder aos questionamentos para, posteriormente, apresentar aos colegas suas conclusões. As construções envolveram: Curva de Koch, Floco de Neve de Koch, Triângulo de Sierpinski e Árvore Bifurcada.

As questões propostas aos alunos tinham o objetivo de levá-los às conclusões a respeito das características dos fractais e das relações com tópicos já estudados na Matemática do Ensino Médio, como sequências numéricas e progressões. Na figura 1 apresentam-se algumas construções dos alunos referentes à Atividade 1:

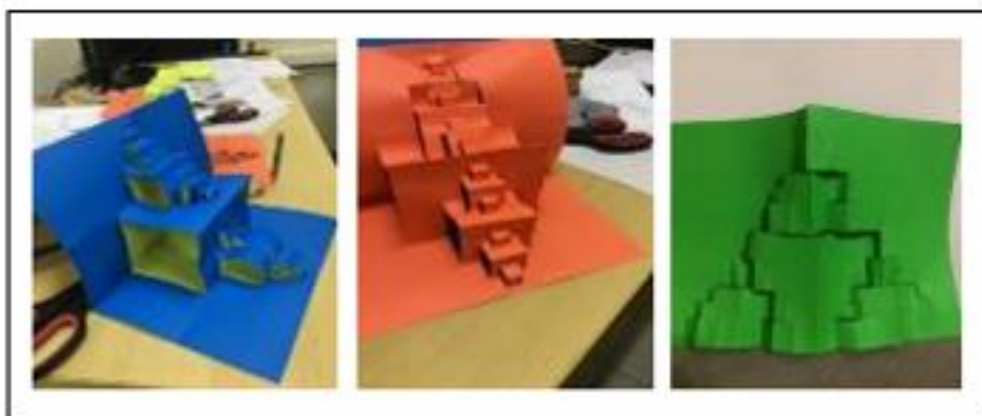
**Figura 1** - Algumas imagens da realização da Atividade 1.



Fonte: arquivo da pesquisa

Após as discussões a respeito dos dados obtidos a partir dessa atividade, foi proposta a Atividade 2, na qual os alunos puderam escolher um dos cartões fractais para fazer a construção: degraus centrais, trissecções ou triângulo de Sierpinski. Novamente, as orientações para essa atividade foram inspiradas nas sugestões de Silva (2001, p. 83-86).

**Figura 2** - Algumas imagens da realização da Atividade 2.



Fonte: arquivo da pesquisa

#### 4.1 Aplicação do Questionário

Os alunos participantes da oficina receberam uma folha de papel contendo os seguintes questionamentos:

- a) Você considerou importante ter participado da oficina?
- b) O que você achou mais interessante na oficina?
- c) Você acredita que o estudo de fractais poderia ou deveria ser inserido no currículo do Ensino Médio? Porquê?
- d) Você conseguiu perceber a relação dos fractais com conteúdos estudados no Ensino Médio? Quais destes conteúdos você considera que o estudo de fractais poderia auxiliar?
- e) Quais suas impressões sobre a oficina? Escreva tudo o que quiser sobre ela.

#### 4.2 Algumas Respostas dos Alunos

Respostas ao item a:

- "Sim, a oficina fez com que a gente aprendesse mais do que estando na sala de aula" (Aluno T).
- "Sim, pois esse conteúdo é muito interessante e certamente iria fazer falta um dia" (Aluno L).

Respostas ao item b:

- "O fato de que um fractal pode ser infinitamente ampliado por um computador por exemplo" (Aluno L).



- “Adorei a parte prática principalmente a montagem dos degraus, achei um pouco desesperador na parte final, mas deu tudo certo. É um bom jeito de enxergar melhor os fractais” (Aluno V).
- “Gostei das construções. Gostei dos vídeos também. A música achei muito interessante” (Aluno S).

Respostas ao item c:

- “Sim, várias coisas que as outras geometrias não conseguem explicar a geometria fractal explica” (Aluno L).
- Sim. É um assunto interessante de ser estudado e explorado e auxiliaria muito bem na aprendizagem de outros conteúdos, como as progressões aritméticas e geométricas” (Aluno V).
- “Acho importante. Já tinha visto questões desse conteúdo, mas não sabia do que se tratava. Até no ENEM já apareceu” (Aluno J).
- “Acho que seria interessante em Artes também por causa das construções e das lindas imagens” (Aluno S).

Resposta ao item d:

- “É um assunto muito interessante de ser estudado e explorado e auxiliaria muito bem na aprendizagem de outros conteúdos como PA e PG, como disse antes. Poderia ter sido ensinado junto com esses conteúdos porque por ser mais ‘visual’ facilitaria a aprendizagem” (Aluno V).
- “Claramente, como foi visto, tem relação com PG” (Aluno L).
- “Poderia auxiliar em PA, PG e na geometria espacial” (Aluno T).

Respostas ao item e:

- “Oficina muito explicativa, material didático ótimo, não ficamos só na teoria e isso é excelente” (Aluno T).
- “Amei ter participado! Gostaria que mais colegas pudessem ter participado, porque realmente valeu a pena. Foi algo que fluiu muito bem. Acho que é isso, espero que tenha muitas outras oficinas como essa” (Aluno V).
- “A sequência da aula foi muito boa. Nós tivemos a explicação, depois as construções e depois terminamos aplicando em conteúdos que já estudamos antes. Eu achei incrível e tudo muito bonito” (Aluno R).

## 5. DISCUSSÕES E VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS

Um primeiro aspecto que merece ser considerado é o fato de que o tópico fractais provoca a curiosidade dos alunos. Percebeu-se isso no momento da divulgação da oficina em que foi apresentado o infográfico produzido para a realização do convite. Os alunos demonstraram um interesse instantâneo, principalmente pelas imagens mostradas e pelas curiosidades a respeito dos fractais. Segundo o relato dos próprios alunos, esse foi um dos motivos pelos quais eles decidiram participar da realização da oficina no turno inverso ao das suas aulas regulares. A turma que foi escolhida para participar dessa oficina mostrou-se, geralmente, bastante receptiva e interessada em realizar tarefas propostas, o que contribuiu significativamente para essa escolha. Acredita-se que, por esse motivo, outro aspecto citado nos relatos sobre a participação na oficina foi o interesse em aprender mais.

No momento da realização da oficina, o total de alunos matriculados nesta turma era 24 e, destes, somente 8 participaram da realização da oficina. Alguns pontos devem ser destacados para justificar o número de alunos presentes na oficina, sendo eles: dos 24 alunos matriculados, 3 deles realizam estágios fora da Instituição de Ensino e 4 trabalham no turno inverso ao das aulas, 2 estavam em competições esportivas representando a Instituição e o período da realização da oficina que coincidiu com muitas avaliações de final de semestre.

Para a resolução da Atividade 1, os alunos dividiram-se em duplas de acordo com suas preferências sem a interferência da professora. As duplas, que foram numeradas de 1 a 4 para facilitar a identificação deste trabalho, deveriam desenhar um fractal conforme as orientações e responder alguns questionamentos. A dupla de número 1, que recebeu a Atividade 1A: construção da Curva de Koch, apresentou uma considerável dificuldade em utilizar os instrumentos esquadro, transferidor e compasso e em efetuar as medições necessárias para conclusão da atividade. Diante disso, essa foi a etapa que exigiu mais tempo, pois para completar a tabela disponibilizada e responder aos questionamentos a dupla não apresentou dificuldades. Durante a exposição de suas conclusões ao grande grupo percebeu-se que houve compreensão e os objetivos para a atividade foram atingidos.

A dupla 2 recebeu a tarefa Atividade 1B: construção do Floco de Neve de Koch. Novamente percebeu-se que os alunos não são habituados a utilizar os instrumentos esquadro, transferidor e compasso, por isso, a maior dificuldade foi fazer a representação da figura no papel. Para completar a tabela disponibilizada e responder aos questionamentos a dupla apresentou muita tranquilidade. Na exposição de suas conclusões ao grande grupo pôde-se perceber que houve o entendimento da atividade e, portanto, os objetivos foram atingidos.

A dupla 3 recebeu a Atividade 1C: construção do Triângulo de Sierpinski e o fez, utilizando papel triangulado, sem maiores dificuldades. Para completar a tabela disponibilizada e responder aos questionamentos a dupla levou um pouco mais de tempo e solicitou auxílio algumas vezes à professora. Na exposição de suas conclusões ao grande grupo percebeu-se que houve o entendimento, comprovando-se que os objetivos também foram atingidos para esta atividade.

A dupla 4 recebeu a Atividade 1D: construção da Árvore Bifurcada. Novamente, identificou-se a dificuldade em utilizar os instrumentos esquadro, transferidor e compasso e medir os ângulos necessários. Para completar a tabela disponibilizada e responder aos questionamentos, a dupla

apresentou muita tranquilidade. Baseando –se na exposição das conclusões ao final da atividade, pôde-se inferir que os objetivos foram alcançados.

Constatou-se que a maior empolgação dos alunos participantes da oficina foi para a chamada Atividade 2: construção dos cartões fractais. Essa etapa foi individual e, por causa da empolgação dos alunos e do tempo para a conclusão da oficina, eles puderam escolher qual dos cartões iriam construir. O cartão Degraus Centrais foi escolhido por 6 alunos e 2 escolheram o Triângulo de Sierpinski.

Apesar de disponibilizar material contendo um roteiro para a construção dos cartões fractais, os alunos ficaram muito ansiosos. Inicialmente, alguns queriam fazer os recortes sem medir, outros acabaram fazendo os cortes em posições equivocadas, mas o momento de maior ansiedade demonstrado foi na finalização, onde deveria se desdobrar todos os recortes e puxar as figuras que estavam em relevo. Entre os dois cartões escolhidos pelos alunos, o Triângulo de Sierpinski foi, sem dúvida, o que os alunos apresentaram maiores dificuldades para construir. Entretanto, percebeu-se a enorme euforia e admiração quando viram suas construções prontas. Novamente, as características dos fractais foram identificadas e percebidas pelos próprios alunos empolgados com suas construções.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acredita-se que o professor, em seu papel de educador, deve estimular o desenvolvimento intelectual do aluno e facilitar a sua aprendizagem. Rêgo & Rêgo (2006), trazem que

as novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica pelo aluno. Para tanto, faz necessário a introdução de novos conteúdos de conhecimentos e de metodologias que, baseadas na concepção de que o aluno deve ser o centro do processo de ensino-aprendizagem(...). (RÊGO E RÊGO, 2006, p. 40)

Com a aplicação desta oficina verificou-se que é possível inserir o estudo dos Fractais nas aulas de Matemática do Ensino Médio, principalmente relacionando tópicos que já fazem parte das ementas da disciplina como sequências, progressões e a própria geometria espacial. O interesse e a participação dos alunos não somente ratificam a necessidade de um ensino em que o aluno é sujeito ativo no processo, mas, acima de tudo, motivam o professor a buscar metodologias diferenciadas para trabalhar tópicos importantes e que os alunos apresentam dificuldades ou desinteresse em sua aprendizagem.

Outro aspecto interessante no estudo dos fractais é a possibilidade de se trabalhar de maneira integrada com outras áreas de conhecimento ou outras disciplinas como Artes e Física, por exemplo. No que diz respeito às Artes, diante da inegável beleza dos fractais, poderiam ser trabalhadas as construções com papel e utilizando o laboratório de informática. Com relação às construções, percebeu-se que foram as responsáveis pelo interesse dos alunos em participar da oficina e, também, foram essenciais para identificação e caracterização dos fractais ao longo dela.

Portanto, identificou-se, a partir da realização da oficina, que existem inúmeros benefícios que justificam a abordagem da Geometria Fractal no Ensino Médio. Pode-se destacar, por exemplo: o estímulo à criatividade, ao raciocínio lógico, o aumento do interesse em aprender Matemática, a possibilidade de trabalho interdisciplinar, a relação com outros tópicos estudados, entre muitos outros.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEMFICA, Andrios, ALVES, Cassiana. **Fractais: progressão e série geométrica. Uma metodologia de ensino.** 2011. Disponível em: [http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto\\_2011/pdf/fractais\\_progressao\\_e\\_serie\\_geometrica.pdf](http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf). Acesso em: 10 jun. 2018

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal - para a sala de aula.** 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

CANDAU, Vera Maria. Educação em Direitos Humanos: uma proposta de trabalho. **In:** CANDAU, Vera Maria, ZENAIDE, Maria Nazaré. Oficinas Aprendendo e Ensinando Direitos Humanos, João Pessoa: Programa Nacional de Direitos Humanos; Secretaria da Segurança Pública do estado da Paraíba; Conselho Estadual da Defesa dos Direitos do Homem e do Cidadão, 1999.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. **Geometria Fractal:** Perspectivas e Possibilidades para o Ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado. Belém/PA. 2005. Disponível em: [http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1857/1/Dissertacao\\_GeometriaFractalPerspectivas.pdf](http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1857/1/Dissertacao_GeometriaFractalPerspectivas.pdf). Acesso em: 15 jun. 2018.

FASSARELLA, Lúcio Souza, LUZ, Débora Souza, BRANDÃO, Luana Kathelena Ribeiro. **Geometria Fractal para o Ensino Médio.** X Encontro Capixaba de Educação Matemática. 2005. Disponível em: [http://www.luciofassarella.net/ensino/minicursos/2015fractais/files/geometria-fractal\\_proposta.pdf](http://www.luciofassarella.net/ensino/minicursos/2015fractais/files/geometria-fractal_proposta.pdf). Acesso em: 20 jun. 2018

GONÇALVES, Andrea Gomes Nazuto. **Uma Sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais.** 2007. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: [http://www.sapientia.pucsp.br//tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=4953](http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4953). Acesso em: 23 jun. 2018

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. **In: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Sergio Lorenzato (org.) – Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MANDELBROT, Benoît. **Objetos Fractais.** Forma, Acaso e Dimensão. Texto Original: *Les Objects Fractals*. 1975, 1984, 1989. Tradução: maio de 1998. Portugal, Lisboa: Ciência Aberta. Gradiva. 2ª ed. 1998.

RÊGO, Rômulo Marinho; RÊGO, Rogéria Gaudêncio do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. **In: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Sergio Lorenzato (org.) – Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

SALLUM, Elvia Mureb. Fractais no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática** – RPM 57. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

SERRA, Celso Penteado, KARAS, Elisabeth Wagner. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos.** 20 ed. Curitiba: Editora Universitária Champagnat. 1997.

SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. **Noções de geometrias não euclidianas: hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais.** 1 ed. – Curitiba, PR: CRV, 2011

VARGAS, Andressa Franco; SILVA, Bianca Bitencourt da; LIRA, Clarissa Gonçalves; LOPES, Mirian Marchezan. Aprendendo Matemática através dos fractais: Uma experiência no Ensino Médio. **Anais... XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul** Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

VIEIRA, Elaine; VOLQUIND, Vera. **Oficinas de ensino: O quê? Por quê? Como?** 4. ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.

Submissão: 06/09/2018

Aceito: 25/09/2018