



CIÊNCIAS HUMANAS

Demonstrações com *GeoGebra* como atividades de ensino de matemática***GeoGebra statements as mathematical teaching activities***Ricardo Augusto de Oliveira¹; William Vieira Gonçalves²**RESUMO**

No presente trabalho temos por objetivo analisar os trabalhos publicados na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) a respeito do uso do *GeoGebra* em atividades de estudo e ensino de Matemática, com a proposta de identificar características de seu uso em situações de ensino na abordagem de conteúdos, dentre os quais procurávamos indicações sobre o conceito de Derivada. Para tanto, utilizamo-nos da pesquisa qualitativa através do mapeamento destas obras no período de 2010 a 2018, onde identificamos cinco dissertações com nenhuma referência à abordagem do conteúdo de Derivada, nenhuma utilização do recurso de cálculos simbólicos do *GeoGebra* (janela CAS) e pouca utilização do recurso da linguagem *LaTeX* na abordagem simbólico/algébrica das atividades matemáticas.

Palavras-chave: *GeoGebra*; Demonstrações matemáticas; Derivada.

ABSTRACT

The present work has the objective of analyzing the works published in the Brazilian Digital Library of Theses and Dissertations (BDTD) regarding the use of GeoGebra in activities of study and teaching of Mathematics, in the proposal to identify characteristics of its use in teaching situations in the approach of the content, among which we looked for the Derivative. To do so, we used the qualitative research through mapping these works for the period from 2010 to 2018 where we identified five Dissertations, no reference to the Derivative content approach, no use of the CAS window resource and little use of the LaTeX language resource in the approach symbolic / algebraic of mathematical activities.

Keywords: *GeoGebra*; Mathematical demonstrations; Derived.

¹ Mestrando e pesquisador voluntário na Universidade do Estado do Mato Grosso - UNEMAT, Barra do Bugres/MT, Brasil. E-mail: algustoricardo@hotmail.com

² Universidade do Estado do Mato Grosso - UNEMAT, Barra do Bugres/MT, Brasil. E-mail: williamvieira@unemat.br

1. INTRODUÇÃO

Dentro do contexto de mapeamentos literários que visam fundamentar o trabalho de um Projeto de Pesquisa na UNEMAT de Barra do Bugres que trata do uso das tecnologias no ensino de Matemática, especificamente na utilização do *GeoGebra* no estudo e ensino de Derivada, o presente trabalho visa contribuir com indicações sobre o uso deste recurso no estudo e ensino de Matemática e na abordagem de Demonstrações Matemáticas nos diferentes níveis de ensino.

Realizamos um mapeamento literário junto à Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), procurando por obras datadas entre os anos de 2010 a 2018, com a proposta de identificar seus objetivos e concepções acerca do uso do *GeoGebra* no ensino de demonstrações Matemática; o nível de ensino ao qual se destinam as obras; modo de trabalho pedagógico estabelecido; e as considerações dos autores acerca de seu uso no estudo e ou ensino de demonstrações Matemática. Concomitantemente, esperávamos identificar, também, obras que tratassem do uso do *GeoGebra* para abordagens de demonstrações também no estudo e ensino de Derivada.

Como metodologia de pesquisa adotamos o mapeamento segundo apresenta Palanch (2016, *passim.*), e a pesquisa qualitativa segundo Garnica e Pereira (1997, *passim.*). A estrutura do nosso estudo obedece a dinâmica de: introdução da obra; apresentação da metodologia de pesquisa utilizada; uma breve apresentação das obras identificadas, na forma de sínteses e direcionadas à identificação de informações relacionadas aos objetivos propostos neste trabalho, e, por fim, breve apresentação de nossas considerações acerca dos resultados alcançados.

2. METODOLOGIA

Entendemos a metodologia de pesquisa qualitativa, segundo Garnica e Pereira (1997, *passim.*), como a mais adequada para o presente trabalho. Estes autores indicam que “o caráter quantitativo permite ao pesquisador identificar direções de análises a serem perseguidas, e os dados qualitativos servem para o direcionamento da análise da pesquisa.” (GARNICA; PEREIRA, 1997 *apud* OLIVEIRA; GONÇALVES; PIASSON, 2018, p.468).

Garnica e Pereira (1997) entendem que este tipo de pesquisa se preocupa, em especial, com a análise da qualidade dos dados e informações em estudo, na busca por interpretar sensações e opiniões ali expressas em seu conteúdo, sem, no entanto, desconsiderar a análise quantitativa destas.

Deste modo, procuramos a partir de um olhar voltado aos objetivos propostos na pesquisa, escrever uma síntese das obras em estudo que respondam individualmente a cada um dos objetivos, e assim podermos expressar uma compreensão geral a respeito destas produções.

Apresentamos um mapeamento de pesquisa segundo Palanch (2016, *passim.*), ao entendermos que, “este tipo de investigação visa conhecer os dados levantados, os percursos, os resultados, enfim, identificar o que dizem as pesquisas sobre um

determinado tema, e a partir destas informações, traçar novos caminhos de investigação.” (OLIVEIRA; GONÇALVES; PIASSON, 2018, p.468).

Segundo Palanch (2016) esta modalidade de pesquisa visa identificar a descrição da pesquisa, um processo de levantamento de informações acerca de um dado tema, num dado lugar e período. Assim, nos propusemos a mapear trabalhos científicos acerca do tema em questão, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

[...] entendemos o mapeamento da pesquisa como um processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas produzidas sobre um campo específico de estudo, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo. Essas informações dizem respeito aos aspectos físicos dessa produção (descrevendo onde, quando e quantos estudos foram produzidos ao longo do período e quem foram os autores e participantes dessa produção), bem como aos seus aspectos teórico-metodológicos e temáticos. (FIORENTINI; PASSOS; LIMA, 2016, p.18 *apud* LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2017, p.2).

Desta forma, pretendemos, investigar obras em torno do uso do *GeoGebra* para realização de atividades de Demonstrações Matemáticas, e identificar (caso houvesse) as percepções dos autores quanto a abordagem demonstrativa do conteúdo de Derivada.

A base de dados que escolhemos para este trabalho é a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, por entendermos ser uma excelente base de informações científicas, estando disponíveis para investigadores de diversos países.

A Tabela 1, a seguir, aponta para uma amostragem do alcance do campo de pesquisa possibilitado com as obras disponíveis na BDTD no ano de 2018 e o quantitativo de obras que alcançamos em nossa pesquisa.

Tabela 1 - Breve apresentação do número de pesquisas publicadas na BDTD até a data de 22/11/2018.

Publicações	Número
Teses	148.543
Dissertações	395.883
Na área da educação	69.440
Tratam do <i>GeoGebra</i>	441
Obras identificadas nesta pesquisa	5
Obras investigadas	4

Fonte: autores.

Fixamos o período de delimitação das buscas entre os anos de 2010 a 2018, e como mecanismo de busca, o descritor: “*GeoGebra* AND demonstração AND Matemática” onde encontramos cinco dissertações, conforme mostra a Figura 1.

Encontramos para o período de 2010 a 2018 cinco obras, sendo todas dissertações que tratam de objetos distintos, como: Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o *GeoGebra*, por Basílio Alves Freitas, 2013; Um estudo sobre funções afim e quadrática e métodos algébricos e geométricos para solução de equações do 1º e 2º grau, por Elizomilson Fonseca Freitas, 2016; O objeto matemático triângulo em

teoremas de Regiomontanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo *GeoGebra*, por Luiz Felipe Araújo Mod, 2016; O desenvolvimento de hábitos de pensamento: um estudo de caso a partir de construções geométricas no *GeoGebra*, por Naira Giroto, 2016; e O teorema de Miquel revisitado por Clifford, por Anderson Reis de Vargas, 2016.

Figura 1 - Exemplo de buscas na Biblioteca Digital Brasileira de Tese e Dissertações.

The screenshot shows the BDTD website interface. At the top, there are navigation links: BRASIL, Serviços, Participe, Acesso à informação, Legislação, Canais, and a language selector. The BDTD logo (15 anos) is prominently displayed. Below the logo, there are links for 'Página Inicial', 'Sobre a BDTD', 'Rede BDTD', 'Acesso Aberto Brasil', and 'Serviços'. A search bar contains the query 'GeoGebra AND demonstraçã AND matemática'. Below the search bar, it indicates 'Showing 1 - 5 results of 5 for search 'GeoGebra AND demonstraçã AND matemática', query time: 0.08s'. On the left, there is a 'Narrow Search' section with filters for 'Institution' (listing PUC_RIO, PUC_SP, UFC, UFJF, UFRGS) and 'Repositório' (listing 'Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da PUC_SP'). The main search results area shows a single result: '1 O desenvolvimento de hábitos de pensamento : um estudo de caso a partir de construções geométricas no GeoGebra' by Naira Giroto, with a 'Publication Date 2016'. Below the title, there is a snippet: '...Esta dissertação apresenta, a partir de atividades de construções geométricas no software GeoGebra...'. There are buttons for 'Get full text', 'Dissertação', and 'Ver +'.

Fonte: autores.

A partir da análise das dissertações identificadas, procuramos reconhecer as concepções acerca do uso do *GeoGebra* no ensino de Matemática; o nível de ensino ao qual as obras propõe alcançar; modo de trabalho pedagógico estabelecidos; e as considerações dos autores acerca de seu uso no estudo e ou ensino de Matemática.

Para tanto, apresentamos, brevemente, uma síntese de seus trabalhos direcionados a responder cada objetivo em seu corpo, e encerramos com uma apresentação geral dos resultados constatados.

3. BREVE DESCRIÇÃO DAS OBRAS

Iniciamos apontando para uma dificuldade que enfrentamos na realização da pesquisa, ao constatarmos que uma das obras identificadas não pode ser analisada neste trabalho devido a um erro no provedor da obra na BDTD, que apesar de tratar do trabalho de Freitas A (2016), seu endereço <<http://www.repositori.ufcbr/handle/riufc/19572>> disponibiliza na verdade a obra de Freitas E (2016).

As referidas obras são:

- FREITAS, Elizomilson Fonseca. **Um estudo sobre funções afim e quadrática e métodos algébricos e geométricos para solução de equações do 1º e 2º graus**. 137 f.: il. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.

- FREITAS, Alana Paula Araújo. **Lemas e teoremas**: um caminho para a consolidação de conceitos geométricos na educação básica. 2016. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

Podemos afirmar que ambas as obras não tratam do ensino e estudo de Derivada, dando ênfase na abordagem geométrica no uso do *GeoGebra*; e a última, em especial (pois é o que nos interessa), atuam na proposta de “consolidação de conceitos” na Educação Básica a partir do uso do *GeoGebra*, embora não se possa indagar sobre a abordagem utilizada ou mesmo às propostas de estudo.

- FREITAS, Braílho Alves. **Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com GeoGebra**. 61 if. : il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

Freitas B (2013) em sua Dissertação de Mestrado, *Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o GeoGebra*, discorre e apresenta uma proposta de atividades de Geometria Euclidiana Plana, direcionadas ao estudo de alguns axiomas desta disciplina com uso do *GeoGebra*, de modo que se permita aos alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, gradativa e intuitivamente, percorrer estudos mais aprofundados nas fases seguintes de sua formação (Ensino Médio).

Para tanto, elabora um pequeno roteiro de discussão de conceitos, que é discutido no capítulo dois de sua obra, de maneira que, no capítulo quatro, atividades são apresentadas para possibilitar aos alunos “a oportunidade de abstrair-se literalmente e ou com recursos algébricos em um processo de demonstração das propriedades de diversas figuras geométricas.” (FREITAS B, 2013, p.4).

Trazemos aqui um pequeno trecho das considerações do autor sobre o ensino de Geometria Plana, com o fim de apontar para a importância dada no trabalho ao uso do pensamento indutivo e intuitivo nas aulas de Matemática, para o qual o uso das tecnologias digitais (aqui o *GeoGebra*) tem se mostrado pertinente:

Muitos pesquisadores afirmam que o conhecimento geométrico possui níveis diferenciados de compreensão, que cresce gradativamente com a qualidade dos estudos oferecidos. Esses níveis vão do reconhecimento visual de uma figura geométrica (mais básico), passando pela identificação das propriedades, até chegar na fase de abstração, que torna possível compreender e demonstrar teoremas. Esse nível de capacidade em abstrair para solucionar um problema deve ser estimulado pelo professor, através de atividades que instigue o aluno a tentar compreender o que está sendo proposto e chegar à resposta desejada. (FREITAS B, 2013, p.59).

Para o autor, o uso das tecnologias no ensino desta disciplina trará grande contribuição ao currículo de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, uma vez que além da possibilidade de trabalho com diferentes representações do objeto em estudo (geométrico e algébrico) (p.40), exigirá do professor um maior planejamento de suas atividades (p.60).

Seu trabalho teve por objeto o estudo de conceitos, demonstrações e deduções básicas de Geometria Euclidiana Plana com uso do *GeoGebra* como instrumento de ensino e estudo, em uma estrutura básica que compõe: um breve apontamento

histórico da disciplina; apresentação dos principais conceitos (sistema axiomático, axiomas e termos primitivos), além de abordar o Quinto postulado de Euclides; realização de uma apresentação de axiomas, postulados e polígonos com utilização de imagens construídas com as ferramentas de régua e compasso do *software GeoGebra*; apresentação de duas construções em Geometria Plana realizadas de duas formas, uma com recursos de régua e compasso, outra com o *GeoGebra*; apresentação de cinco atividades propostas; e uma breve discussão na forma de comentários e possíveis respostas (demonstrações) a respeito das atividades sugeridas.

As atividades são propostas por meio de processos de construções, objetivos propostos, imagens das construções resultantes no *GeoGebra*, materiais necessários, e tempo de duração estimado, ou seja, trata-se de cinco planos de aula em uma estrutura de menor formalidade, “Essas atividades visam avaliar qualitativamente a absorção, por parte do aluno, dos axiomas, definições e proposições colocadas no trabalho.” (FREITAS B, 2013, p.44).

O autor aponta para a importância do estudo desta disciplina; para a não discussão de modo adequado desta disciplina em muitas escolas públicas; e para o fato de que, para alguns autores, esta disciplina deve ativar as estruturas mentais da criança, permitindo que este passe do estágio das operações concretas para o estágio das operações abstratas; a pouca contribuição dos livros didáticos quanto à abordagem deficiente que trazem do conteúdo; ou mesmo ao caso de muitos professores não trabalharem esta disciplina por não a conhecerem de modo suficiente, ou mesmo, segurança para que possam ensinar a seus alunos.

Para enfrentar tal situação, Freire B (2013, p.12-13) entende que a realização de construções simples de figuras geométricas com instrumentos de régua e compasso ou com *software GeoGebra*, poderá contribuir para que os alunos possam posteriormente, formalizar, aprofundar conhecimentos e prepará-los para o entendimento das demonstrações que decorrem de questões mais avançadas.

O *GeoGebra* é aqui utilizado como ferramenta que pode simplificar o trabalho com o conteúdo de Geometria Plana; permitir o trabalho com duas representações diferentes de um mesmo objeto matemático, algébrico, preservando-lhes as propriedades quando em manipulação; e Geométrico, além de constatar uma preocupação do autor em não tornar o recurso digital uma ferramenta da qual o ensino de Geometria dependa de seu uso para que venha ocorrer “as abordagens pedagógicas, com o uso de tecnologias digitais deve ser planejada de tal forma que a aprendizagem dos conceitos matemáticos, dos alunos, não dependa permanentemente do apoio dessas tecnologias.” (FREITAS B, 2013, p.34).

- GIROTTO, Naiara. **O desenvolvimento de hábitos de pensamento**: um estudo de caso a partir de construções geométricas no *GeoGebra*. 111 if. : il. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

Giroto (2016) desenvolve uma sequência didática como proposta pedagógica que visa a realização de construções geométricas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com construções de atividades presentes nos livros didáticos realizadas com recursos de régua e compasso, com utilização do *software GeoGebra* - um *software* de Matemática dinâmica (p.32) -, apontando para o potencial de utilização do *software* para contribuir com o desenvolvimento de hábitos de pensamento

matemático - estratégias de organização e desenvolvimento de atividades (p.38) - com os alunos, conforme Goldenberg (1998a, 1998b), onde destacam a visualização, exploração e experimentação geométrica dos objetos matemáticos, além do reconhecimento de padrões, e descrição de relações e processos.

Sua sequência didática tem a intensão de ser apresentada como uma forma de o professor proporcionar aos alunos, uma aprendizagem que seja instigante, agradável a ser realizado em sala de aula, cuja ênfase está na construção de figuras Planas e sua representação e investigação - para além da simples apresentação de passos de construção (p.15).

Ainda, como reconhecimento de propriedades do conteúdo em estudo a partir da construção de sua representação com o *software*, e ao explorá-las por meio das ferramentas de Geometria dinâmica do *GeoGebra*, fazendo frente ao conceito que identificou presente na mentalidade de muitos alunos “o importante na Matemática é fazer os cálculos” (GIROTTO, 2016, p.11) ao apontar para a compreensão de uma figura geométrica como construções com propriedades Matemáticas (p.92).

As tecnologias disponíveis na área da Matemática podem ajudar os alunos nos seus processos de aprendizagem (BASSO e GRAVINA, 2011). Com uma ferramenta como o *GeoGebra*, é possível implementar estratégias de ensino que estimulam atitudes de experimentar, testar e descobrir. O *software GeoGebra* apresenta recursos que simulam régua e compasso e um de seus diferenciais está na possibilidade de manipular pontos da figura e observar, via dinamismo, regularidades geométricas. Na sequência de atividades que elaboramos para nosso experimento, tratamos de contemplar situações que provocam nos alunos os hábitos de pensamento discutidos por Goldenberg (1998a, 1998b): visualizar; fazer experiências e explorações; reconhecer padrões ou invariantes; descrever relações e processos, informalmente e formalmente, do verbal para o visual e vice-versa. É com esta sequência didática, implementada e avaliada, que nos propomos a responder a pergunta: a partir de atividades de construções geométricas, utilizando o *GeoGebra*, quais os avanços no desenvolvimento de hábitos de pensamento que contribuem para a aprendizagem da Matemática que podem ser observados nos alunos? (GIROTTO, 2016, p.12).

Mais do que propor uma sequência didática, Girotto (2016) realiza um experimento com sua proposta e apresenta uma análise das expectativas do professor quanto a aprendizagens dos alunos em uma análise *a priori*, e a apresentação dos hábitos de pensamento que emergiram durante a experimentação da sequência didática proposta em uma análise posterior a sua aplicação.

A importância dada à demonstração em seu trabalho está na apresentação da validade dos procedimentos adotados na construção geométrica e no respaldo das argumentações a respeito das propriedades discutidas.

O *GeoGebra* é utilizado como recurso que possibilita tal feito de maneira dinâmica, instigante, permitindo ao aluno não apenas realizar a construção pretendida, mas ainda a explorar, investigar, experimentar, construir imagens mentais, conjecturar hipóteses, testar e validar - com maior exatidão (p.15) - a partir das potencialidades que o *software* permite.

Trata-se de uma proposta de transformação da prática pedagógica presente nos ensino de Geometria (p.31).

Para uma apresentação didática das possibilidades de uso do *GeoGebra*, a autora apresenta uma sequência de construções (com procedimentos e indicativos do que seria interessante discutir com os alunos) de objetos da Geometria Plana, cuja finalidade visa apontar para as ferramentas de régua e compasso que o *software* detém, de maneira que se perceba que as mesmas construções realizadas com as tecnologias de lápis e papel, podem não só serem realizadas por meio do *GeoGebra*, como seu estudo pode tomar proporções não realizáveis no caderno pelo aluno, ir além do que um estudo com base em figuras estáticas no caderno permitem (p.37), uma vez que propriedades por vezes não declaradas na construção do objeto, se mostram presentes e aptos a serem explorados (p.35).

Os ambientes de Geometria dinâmica incentivam o espírito de investigação Matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado de suas ações/operações, conjecturam e testam a validade das conjecturas. (GAVIRIA, 2001, p.104 *apud* GIROTTO, 2016, p.36).

A sequência didática que propõe o autor, foi dividida em duas atividades guiadas, subdivididas em quatro momentos cada, ao qual se constatou a presença de cada um dos hábitos de pensamento propostos, ao possibilitar as ações elencadas na citação anterior, e destacar possibilidades de estudo de objetos matemáticos a partir de sua visualização, exploração e experimentação, na medida em que permitiu a procura pelos alunos por reconhecer padrões e invariantes nas construções, e descrever de modo formal e/ou não, relações entre os elementos e processos utilizados na construção.

- MOD, Luiz Felipe Araújo. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus**: um estudo de suas demonstrações mediado pelo *GeoGebra*. 105 f. : il. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016.

MOD (2016), procurou investigar, com o uso do *software GeoGebra*, a demonstração de alguns teoremas do Matemático Regiomontanus, no que diz respeito a triângulos, com o fim de apontar para possibilidades de utilização da demonstração de teoremas em atividades em sala de aula, nas séries finais do Ensino Fundamental. Os teoremas são aqui abordados dentro de um contexto de legado de produções históricas a respeito da própria história da Matemática, e que devem ser tratados como “provedoras de recursos que conduz à reflexão” no processo de construção do conhecimento matemático. (MOD, 2016, p.24).

O autor encara as ferramentas dinâmicas do *GeoGebra* como possibilidades de desenvolvimento de demonstrações em sala de aula, dos teoremas escolhidos; como instrumento mediador e investigativo que lhe permite explorar possibilidades não apontadas no trabalho de Regiomontanus; ou como recurso que permite fazer de teoremas como estes, uma oportunidade de trabalho pedagógico ao professor, de forma que auxilie o aluno do desenvolvimento de argumentos a respeito dos teoremas durante os trabalhos de sua construção.

No caso desta pesquisa, o *GeoGebra* foi uma ferramenta importante para auxiliar na construção de argumentos a respeito dos teoremas analisados, pois, por meio da movimentação dos pontos, foi que se constaram casos que não estavam contemplados na demonstração. (MOD, 2016, p.90).

Como direcionamento de pesquisa procurou identificar “[...] quais funções da demonstração se revelam nas situações geométricas dos teoremas de Regiomontanus sobre triângulos quando explorados no *GeoGebra*?” (MOD, 2016, 22 e 89) e “como a exploração da demonstração pode se tornar uma atividade de investigação Matemática ou estratégia didática em sala de aula?” (MOD, 2016, 22 e 89).

Para isso, MOD (2016) discorre sobre algumas demonstrações de objetos matemáticos como prova do teorema de Pitágoras, representação de um triângulo retângulo qualquer, e outras construções, e, principalmente, versa sobre cinco teoremas de Regiomontanus, e algumas de suas argumentações, e apesar de não estar declarada, sua visão de demonstração parece-nos dar ênfase na verificação visual geométrica dos teoremas (mesmo que apontado para uso de imagens, cálculos e manipulação de propriedades dos objetos em alguns casos), que são em alguns casos finalizados com a produção na forma textual no próprio *software*, de sua representação algébrica.

Durante essa pesquisa, percebeu-se que o *GeoGebra* permite a exploração das diferentes funções da demonstração. Mais do que isso, possibilita uma forma de representação de resultados matemáticos e pode ajudar na visualização de novos casos ou na criação de outras possibilidades a serem exploradas. (MOD, 2016, p.90).

A estrutura de sua análise no Capítulo quatro aponta para sua preocupação em estabelecer um caráter didático-argumentativo das demonstrações dos teoremas (MOD, 2016, p.36) - a sua produção, enfatizando a sequência de apresentação: de cada teorema em inglês; uma versão de tradução em português; os passos para sua construção no *GeoGebra*; a representação geométrica resultante do processo de construção; e uma análise do teorema a partir da sua representação construída, que para tal é organizada em forma de argumentações que integram o uso do *software* como instrumento de investigação dos elementos do objeto, de seu manuseio e constatação de suas características.

O autor procura desenvolver uma linguagem que descreva o uso do *software* na investigação didática do objeto, apontando quais ferramentas utilizar e o que realizar na investigação, e assim argumentar com conceitos matemáticos elementos do objeto construído, apontar elementos não presentes na demonstração realizada por Regiomontanus no livro I da obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*.

Procurou, também, apontar possibilidades específicas de uso do *GeoGebra* que podem potencializar a discussão em sala de aula, como: a modificação de características do objeto construído a partir da manipulação na posição de um de seus elementos (p.74); Linguagem LaTeX (p.79) e utilização de comandos e construções algébricas na janela de álgebra do *software* (p.61).

Entendemos que o autor acabou por elaborar uma proposta de atividade que contemple aspectos de um trabalho de transposição didática (MOD, 2016, p.33) - transposição informática - (p.34) ao seguir procedimentos investigativos que conversem com as seis funções (p.41) estabelecidas por Villiers (2001), utilizado em

seu trabalho para representar a forma como concebe o estudo de demonstrações (p.41).

A nosso ver, tal proposta permitiu ao autor alcançar o objetivo de apontar para possibilidades de seu uso em sala de aula, ao tempo que integra o uso do *GeoGebra* como instrumento de investigação e mediação no trabalho em sala de aula nas séries finais do Ensino Fundamental, sobre tudo, ao destacar o caráter de explicação e descoberta em sua formulação (p.44).

- VARGAS, Anderson Reis de. **O teorema de Miquel revisitado por Clifford**. 64 f: il. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2016.

Vargas (2016) se utiliza do *GeoGebra* como uma ferramenta pedagógica que potencializa a dedução de teoremas de Geometria a partir da possibilidade de visualização e de dinamização que o *software* permite ao se utilizar de ferramentas de Geometria dinâmica.

Para tal propositura, apresenta e demonstra alguns teoremas de Miquel e Clifford, ousando, no entanto, em substituir o recurso da Geometria Projetista utilizada por Clifford pela Geometria Euclidiana, a partir das ferramentas de régua e compasso disponíveis no *GeoGebra*.

“Naturalmente, devemos levar em consideração que o uso do computador deve ser um mediador entre o ataque ao problema e a formalização de conceitos e resultados, assim como suas demonstrações.” (VARGAS, 2016, p.49).

O autor aponta para o uso do *software* como possibilidade de se trabalhar a Geometria com os alunos do Ensino Médio, de modo que ao se recorrer ao uso da visualização dos processos pertinentes as construções de modo dinâmico, o aluno possa em seguida, fixar os resultados, os conhecimentos desenvolvidos na construção, no momento em que exercitar sua demonstração com *GeoGebra*.

Inicia apontando algumas considerações históricas a respeito da Geometria, e percorre brevemente a figura de Auguste Miquel e William Kingdom Clifford; em seguida aborda os teoremas propostos segundo os autores, além de construir uma demonstração da generalização ao teorema de Miquel como aponta Clifford, apresentando lemas e casos dos teorema juntamente com hipótese e argumentação (VARGAS, 2016, p.38-48); e passa a desenvolver cinco atividades de demonstrações com uso do *GeoGebra* afim de lançar luz a sua compreensão.

A proposta de desenvolver cinco teoremas de Miquel no capítulo quatro de sua dissertação, visa apontar que o uso do *software* de Geometria dinâmica (como define o *GeoGebra*) pode levar alunos do Ensino Médio (mesmo que tenha que adaptar as construções) a deduzirem resultados de teorema a partir da realização de construções como estas. Para tanto, elabora para cada atividade quadros objetivos, pré-requisitos e nível de dificuldade ao qual se refere, e os passos a serem executados no *software*, a fim de se alcançar as construções.

Vemos aqui que o *GeoGebra* é utilizado como um recurso que permite a realização de demonstrações de teoremas da Geometria Euclidiana, de modo que enriqueça o ensino e o estudo desta disciplina, sobretudo no uso do recurso da animação e da

visualização geométrica das construções, tidas muitas vezes como difícil de se construir na utilização de régua e compasso, lápis e papel.

Percebemos que seu trabalho visou ao mesmo tempo desenvolver uma proposta de atividades para estudo ensino de Geometria Euclidiana no Ensino Médio (apesar de apontar que pode ser desenvolvido também no Ensino Superior), ao tempo que apontou para possibilidade de uso do *GeoGebra* para desenvolver as demonstrações de teoremas desta disciplina, de modo que represente visualmente as construções realizadas por Miquel e Clifford, e para possibilidade de alunos também os realizarem de maneira dinâmica e menos cansativa.

Após apresentar uma síntese direcionada dos trabalhos investigados, apontamos no próximo tópico uma análise individual de cada trabalho, uma descrição dos resultados alcançados de forma sucinta e direcionada a atender os objetivos propostos nesta pesquisa.

A Tabela 2 apresenta uma comparação dos trabalhos, tendo como base alguns dos objetivos alcançados. Nesta tabela, algumas informações podem ser extraídas, possibilitando novas investigações a respeito do uso do *GeoGebra* em atividades de demonstrações, como por exemplo: sua centralização (se podemos assim colocar) no Ensino Fundamental e na proposta de visualização geométrica em detrimento de atividades de cálculos simbólicos e numéricos.

Tabela 2 - Tabela comparativa das obras investigadas.

OBRA	INTERESSE
<i>Nível de ensino para o qual a obra foi dirigida</i>	
Freitas B (2013)	Ensino Fundamental.
Mod (2016)	Ensino Fundamental.
Giroto (2016)	Ensino Fundamental.
Vargas (2016)	Ensino Médio.
<i>Modo de trabalho pedagógico proposto</i>	
Freitas B (2013)	Abstração e consolidação de conceitos. O <i>GeoGebra</i> é tido como um recurso que pode simplificar o trabalho do professor.
Mod (2016)	Alia potencialidades das tecnologias e da história da Matemática para estudo de demonstrações de teoremas a respeito de triângulos e estimular a reflexão no processo de construção do conhecimento matemático, com base na verificação visual geométrica. Uma proposta de transposição didática.
Giroto (2016)	Elabora sequência didática (a partir de um experimento) que potencialize atividades desenvolvidas com régua e compasso e construções no <i>GeoGebra</i> com suas ferramentas similares para desenvolver hábitos de pensamento, argumentos e imagens mentais.
Vargas (2016)	Utiliza do <i>GeoGebra</i> como uma ferramenta pedagógica que potencializa a dedução de teoremas de Geometria a partir da possibilidade de visualização e de dinamização que o <i>software</i> permite ao se utilizar de ferramentas de Geometria dinâmica.

Considerações dos autores a respeito do uso do software no ensino de Matemática

Freitas B (2013)	Trabalha por meio de construções de applets o pensamento indutivo e intuitivo, para explorar o conhecimento geométrico (predominantemente) e algébrico. Visa criar condições para que os alunos compreendam e explorem atividades de demonstrações de teoremas em Geometria Plana.
Mod (2016)	Se apoia nas possibilidades dinâmicas do <i>software</i> para trabalho de demonstrações em atividades em sala de aula e do desenvolvimento de argumentos a respeito do tema.
Giroto (2016)	O <i>software</i> permite ocorrências de atividades experimental, estimulantes, agradável e dinâmica de compreensão das figuras geométricas a partir de sua construção no software.
Vargas (2016)	Sugere o uso da visualização da geometria pelos processos pertinentes a suas construções de modo dinâmico, para que o aluno possa em seguida, fixar os resultados, os conhecimentos desenvolvidos na construção, no momento em que exercitar sua demonstração com <i>GeoGebra</i> .

Fonte: autores.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após os estudos destas dissertações, buscamos apresentar de forma sucinta as compreensões que formamos a partir de uma leitura voltada a responder os objetivos iniciais de nossa pesquisa. Em geral as pesquisas se destinam a trabalhos de ensino nos níveis de educação básica, sendo que dois deles indicam sua possibilidade de uso também no Ensino Superior.

De mesmo modo, percebemos o uso do *GeoGebra* em atividades de construção e experimentação Matemáticas pelos alunos, seja por atividades guiadas, sequência didática ou por movimentos de investigação e exploração de *applets*³ construídos. A abordagem dos conteúdos, no entanto, sugere recorrência de utilização de recursos visuais provocados pela manipulação do *software*, pouco vemos sobre o uso da linguagem simbólica dos exercícios, a não ser para discussão daquilo que se percebe na manipulação nos *applets* e não em seu corpo propriamente dito (havendo uma exceção).

O uso do *GeoGebra* aliado com diferenciadas estratégias de ensino é percebido como possibilidade de engajamento dos alunos, de estímulo ao desenvolvimento de hábitos de pensamento, na construção de argumentos na investigação de teoremas, permite formalizar conceitos, e propõe uma aprendizagem mais ativa e dinâmica pelo aluno por meio de experimentações, descobertas e visualização de seus resultados, além de proporcionar uma verdadeira transformação da prática pedagógica no fazer didático em sala de aula.

O *GeoGebra* é concebido como um instrumento mediador na realização de atividades em sala de aula, potencializador no estudo de Geometria Plana, Geometria Euclidiana e Demonstrações de teoremas matemáticos, um instrumento que permite realizar investigações mais aprofundadas dos objetos matemáticos e demonstrações

³ Em nosso trabalho, entendemos animações geradas no *GeoGebra*, objetos de aprendizagem gerados no *GeoGebra* e *applets*, como sendo os mesmos objetos.

conceituais relacionadas a abordagem geométrica dos temas em estudo, sobre tudo na proposta de utilização das ferramenta de régua e compasso e controles deslizantes no processo de investigação a respeito de atividades de demonstrações.

Sentimos aqui a falta de uso do recurso de cálculo simbólico do *GeoGebra* (janela CAS) para aproximação dos cálculos simbólicos realizados normalmente com as mídias lápis e papel, e identificamos pouco uso da linguagem *LaTeX* na elaboração de textos matemáticos que apontem para os cálculos demonstrativos dos teorema em estudo em apenas um dos trabalhos. (MOD, 2016).

Dentre as cinco pesquisas de mapeamento que realizamos em nosso Projeto (a qual se junta o presente trabalho), a respeito de uso do *GeoGebra* em atividades de estudo e ensino de Matemática, e mesmo especificamente no estudo e ensino de Derivada, a única divergência (novidade seria a melhor expressão) que encontramos quanto as concepções de uso do *software*, nível de ensino ao que propõe seu uso, modo de trabalho, estratégia de ensino ou abordagem do conteúdo, está na utilização da linguagem *LaTeX* no *GeoGebra* para expressão simbólica/algébrica no estudo de Matemática, mesmo que não de forma expressiva.

Como próximos passos da pesquisa, pretendemos desenvolver outras investigações quanto ao uso de *software* educativos, Objetos de Aprendizagem ou *applets* gerados no *GeoGebra* e mesmo por outros *software*, em trabalhos publicados na BDTD a respeito do ensino da derivada. A partir desta pesquisa, pretendemos reconhecer o texto norteador dos discursos presentes com base na Análise Textual Discursiva (ATD) de Moraes e Galizazzi e Modelo de Campos Semântico (MCS) de Lins, de maneira que nos permita ampliar nossos horizontes quanto a forma de uso destes recursos para ensino e estudo de derivada.

5. REFERÊNCIAS

BASSO, M. V. A., GRAVINA, M. A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A. (Org.). **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: 2011. Cap. 1, p.4-25.

FREITAS, E. F. **Um estudo sobre funções afim e quadrática e métodos algébricos e geométricos para solução de equações do 1º e 2º graus**. 2016. 137 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

FREITAS, A. P. A. **Lemas e teoremas**: um caminho para a consolidação de conceitos geométricos na educação básica. 2016. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

FREITAS, B. A. **Introdução á Geometria Euclidiana Axiomática com GeoGebra**. 61 f. : il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

GARNICA, A. V. M.; PEREIRA, M. E. A pesquisa em Educação Matemática no Estado de São Paulo: um possível perfil. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, Rio Claro, v.11, n.12, p.59-74, 1997.

GIROTTI, N. **O desenvolvimento de hábitos de pensamento**: um estudo de caso a partir de construções geométricas no *GeoGebra*. 2016. 111 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

GOLDENBERG, E. P. “Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (II). **Educação e Matemática**, v.48, p.37- 44, 1998.

LIMA, G. L. de; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. Cálculo e Análise: Mapeamento das pesquisas do GT04- Educação Matemática no Ensino Superior. **VIDYA**, Santa Maria, v.37, n.2, p.317-334, 2017.

MOD, L. F. A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus**: um estudo de suas demonstrações mediado pelo *GeoGebra*. 2016. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

OLIVEIRA, R. A.; GONÇALVES, W. V.; PIASSON, D. O Uso do *GeoGebra* para Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, um Mapeamento de suas publicações. **Revista Thema**, Pelotas, v.15. n.2, p.466-484, 2018.

PALANCH, W. B. de L. **Mapeamento de pesquisas sobre currículos de Matemática na Educação Básica Brasileira**. 2016. 297 f. Tese (Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

VARGAS, A. R. de. **O teorema de Miquel revisitado por Clifford**. 2016. 64 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

VILLIERS, M. de. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. **Educação e Matemática - APM**, Portugal, n.62, p.31-36, mar./abr. 2001.

Submetido em: **02/09/2018**

Aceito em: **21/03/2019**