2018 | Volume 15 | Nº 4 | Pág. 11269 a 1276
DOI http://dx.doi.org/10.15536/thema.15.2018.1296-1276.1041

REVISTA THEMA

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Sequência de Padovan Afim e as suas propriedades

Padovan-like sequence and its properties

Renata Passos Machado Vieira[1]; Francisco Regis Vieira Alves[1]

RESUMO

A sequência de Padovan tem muitas propriedades interessantes e pode ser explorada através de estudos investigativos, onde podemos tomar como base a sequência de Fibonacci. Neste artigo, estudamos a sequência de Padovan Afim que é definida pela recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ para $n \geq 3$, $P_0 = a_0, P_1 = a_1, P_2 = a_2$. Essa condição inicial pode ser obtida a partir de qualquer valor numérico, e assumindo as mesmas propriedades dos números de Padovan. Aqui definiremos a fórmula de Binet, a função geradora e a matriz geradora Q da sequência de Padovan para que sejam encontrados os termos desta sequência, sem necessitar conhecer os anteriores. Também estudaremos uma classe dessa sequência que pode ser gerada usando uma matriz especial de terceira ordem.

Palavras-chave: *sequência de Fibonacci; sequência de Padovan; sequência de Padovan Afim.*

ABSTRACT

The Padovan sequence has many interesting properties and can be explored through investigative studies, where we can take as a basis the Fibonacci sequence. In this paper, we study Padovan-like sequence that is defined by the recurrence $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ *for all* $n \geq 3$., $P_0 = a_0, P_1 = a_1, P_2 = a_2$. *This initial condition can be obtained from any numerical value, and assuming the same properties as the Padovan numbers. Here we will define the Binet formula, the generating function and the generating matrix Q of the Padovan sequence so that the terms of this sequence are found, without needing to know the previous ones. We will also study a class of this sequence that can be generated using a special third-order matrix.*

Keywords: *Fibonacci sequence; Padovan sequence; Padovan-like sequence.*

1. INTRODUÇÃO

Sequências recorrentes e de números inteiros são comumente encontradas na área de matemática e aplicadas em diversas áreas, uma bastante conhecida e explorada é a de Fibonacci, que possui grandes aplicações em ciências da computação, biologia, matemática, entre outras. A sequência de Padovan foi introduzida por Richard Padovan, que atribuiu a sua descoberta ao arquiteto Hans van

[1] IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza/CE – Brasil.

Der Laan, sendo mais tarde estudada por um matemático chamado Gérard Cordonnier (1907-1977) contribuindo para tal sequência (PADOVAN, 2002; VOET, 2012).

A sequência de Padovan bem como a de Fibonacci, é do tipo linear recursiva, ou seja, necessita-se conhecer os termos anteriores para que seja calculado o próximo, possuindo a seguinte fórmula de recorrência:

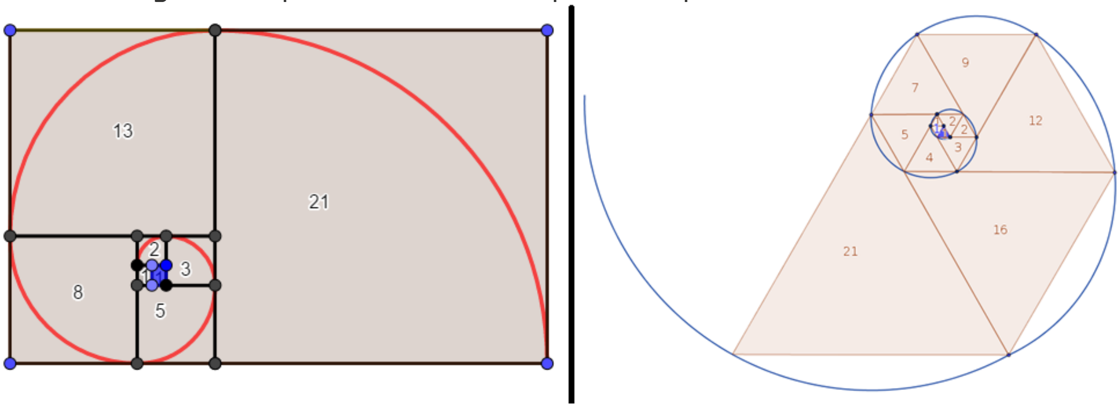
$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$$

Sendo os termos da sequência os seguintes: $1,0,1,1,1,2,2,3,4,5,7,\ldots$

Assim como os termos vizinhos dos números de Fibonacci convergem para o número de ouro, Padovan também possui uma relação deste tipo, a qual é conhecida como número plástico ou constante plástica e o seu valor aproximado é $\psi \approx 1.324718\ldots$. (MAROHNIC, STRMECKI, 2012). Diversas formas de calcular esse valor são encontradas nos trabalhos de Marohnic, Strmecki (2012) e Iliopoulos (2015).

Nesse sentido, torna-se cada vez mais necessário um conhecimento em relação a evolução do tema abordado, assim podendo obter a criação de novas sequências seguindo os mesmos padrões de outras conhecidas. Vale salientar que, assim como ocorre para Fibonacci em que diante de um "hiato histórico" proporcionado pela apreciação da abordagem tradicional, envolvendo competências de História da Matemática, costuma-se enfatizar o caráter lúdico do episódio de sua representação geométrica através do espiral de quadrados de Fibonacci, para os números de Padovan também devemos buscar tal fato (ALVES, 2015), e assim estudar a construção do espiral de triângulos equiláteros de Padovan (ver Figura 1).

Figura 1. Espiral de Fibonacci à esquerda e Espiral de Padovan à direita.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Um outro modo de perceber a História da Matemática é através de uma visão atualizada, discutindo os fatos e acontecimentos históricos, percebendo cada fato ao seu tempo e contextualizando (SANTOS, ALVES, 2016). Essa atualização pode ser feita também através de um estudo em relação a novas propriedades de sequências com características semelhantes a outras.

Para a sequência de Padovan, temos os termos iniciais $P_0 = 1; P_1 = 0; P_2 = 1$. Neste trabalho apresentaremos as propriedades da Sequência de Padovan Afim que é definida por: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ para $n \geq 3$, $P_0 = a_0, P_1 = a_1, P_2 = a_2$. Vale ressaltar que os termos iniciais implicam diretamente em todos os termos restantes da sequência, e, portanto, em outras características tais como a sua função geradora.

2. ALGUNS RESULTADOS DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN AFIM

De acordo com a relação de recorrência da sequência de Padovan descrita acima, seu polinômio característico poderá ser descrito como: $x^3 - x - 1 = 0$, possuindo uma raiz real e as outras duas na forma complexa. Esta equação pode ser resolvida utilizando a fórmula de Cardano, e obtendo (MELO, 2014):

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1.32 \text{ (Número Plástico)} \qquad (1)$$

$$x_2, x_3 = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0.662359 \pm 0.56229i \qquad (2)$$

Pode-se perceber que a raiz real, possui o mesmo valor da relação de convergência entre os termos vizinhos da sequência de Padovan, conhecida como número plástico.

Utilizando a equação característica e as suas raízes, podemos obter a fórmula de Binet, que foi descoberta por Abraham de Moivre (1667-1764). Este procedimento mostra que é possível encontrar o termo geral de uma sequência sem recursividade, porém tal investigação matemática homenageou Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), sendo então chamada de Fórmula de Binet.

Assim, para uma sequência recorrente, é possível encontrar qualquer termo desta sem necessitar conhecer os anteriores, sabendo apenas da posição do termo na sequência.

Assumindo $P_0 = 1; P_1 = 0; P_2 = 1$ tem-se que a sua fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$P_n = A.(x_1)^n + B.(x_2)^n + C.(x_3)^n$$

Os coeficientes desta fórmula, foram ser obtidos através de recursos computacionais, onde encontramos:

$A = 0.411495588662646,$
$B = 0.294252205668677 + 0.138111394322887i,$
$C = 0.294252205668677 - 0.138111394322887i$

E x_1, x_2 e x_3 são como em (1) e (2), respectivamente.

Além disso, os números de Padovan também podem ser obtidos através de uma matriz geradora Q, de ordem 3x3, em que ao elevá-la a n-ésima potência, podemos obter os termos desta sequência sem utilizar a relação de recursividade (SOKHUMA, 2013).

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com os valores iniciais definidos por: 0,0,1, esta propriedade traz consigo os termos desta sequência conforme mostrado abaixo (SEENUKUL, et. al., 2015):

$$Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}, n \geq 3$$

Uma função geradora, denotada por $G(a_n, x)$, é uma série de potências em que os seus coeficientes obtêm informações sobre uma sucessão (a_n) com $n \in$ □ , definida por:

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n = a_0.x^0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \ldots$$

Essa função é multiplicada por x^2 e x^3, respectivamente, nas equações abaixo. Isto ocorre devida a sua relação de recorrência, onde existe um salto do termo vizinho, e só então acontece a soma dos outros dois termos para obter o próximo.

Logo, essa função pode ser escrita da seguinte forma para a Sequência de Padovan:

$$G(P_n, x) = P_0 + P_1.x + P_2.x^2 + P_3.x^3 + P_4.x^4 + \ldots$$
$$x^2 G(P_n, x) = P_0 x^2 + P_1.x^3 + P_2.x^4 + P_3.x^5 + P_4.x^6 + \ldots$$
$$x^3 G(P_n, x) = P_0 x^3 + P_1.x^4 + P_2.x^5 + P_3.x^6 + P_4.x^7 + \ldots$$

Considerando a seguinte expressão $G(P_n, x) - [x^2 G(P_n, x) + x^3 G(P_n, x)]$ e assumindo $P_0 = P_1 = 1; P_2 = 1$, temos a função geradora (FERREIRA, 2015):

$$G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1.x + (P_2 - P_0).x^2$$
$$G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = 1 + x$$
$$G(P_n, x) = \frac{1 + x}{(1 - x^2 - x^3)}$$

3. PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN AFIM

De acordo com os resultados apresentados na seção acima, podemos determinar as propriedades para a sequência de Padovan Afim.

Propriedade 1. A tabela abaixo pode mostrar como acontece a relação de convergência entre os termos vizinhos, assumindo alguns valores de inicialização, até chegarmos a forma generalizada (ver Tabela 1).

Tabela 1. Relação de convergência entre os termos vizinhos da Sequência de Padovan Afim

a_n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
P_n	2	2	2	4	4	6	8	10	14	18	24	32	42	56	74
P_n/P_{n+1}	1	1	2	1	1.5	1.33	1.25	1.4	1.28	1.33	1.33	1.31	1.33	1.32	1.32

Fonte: Elaborado pelos autores.

Como podemos perceber, independente dos valores iniciais, esta sequência irá ter a mesma relação entre os termos vizinhos que os números de Padovan, resultando no número plástico com valor aproximado de 1.32.

Assim, para a sequência:

$$P_n = P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \ldots \text{, tem-se que:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} \approx 1.32$$

Propriedade 2. Para a Sequência de Padovan Afim, o polinômio característico será o mesmo, visto que esta sequência possui a mesma propriedade encontrada na relação de recorrência dos números de Padovan.

Logo, a fórmula de Binet será composta das mesmas raízes, enquanto que os coeficientes dependerão do vetor de inicialização. Levando em consideração a fórmula de Binet encontrada para os números de Padovan, encontraremos os seus coeficientes da seguinte forma:

Para n=0, temos:

$$A + B + C = P_0$$

Para n=1, temos:

$$A.(x_1) + B.(x_2) + C.(x_3) = P_1$$

Para n=2, temos:

$$A.(x_1)^2 + B.(x_2)^2 + C.(x_3)^2 = P_2$$

Assim temos o sistema de equação, que poderá ser resolvido com os valores de inicialização da sequência (P_0,P_1 e P_2) na forma numérica:

$$\begin{cases} A + B + C = P_0 \\ A.(x_1) + B.(x_2) + C.(x_3) = P_1 \\ A.(x_1)^2 + B.(x_2)^2 + C.(x_3)^2 = P_2 \end{cases}$$

Para esta resolução, foram utilizados recursos computacionais, e assim obter a fórmula de Binet:

$$P_n = A.(x_1)^n + B.(x_2)^n + C.(x_3)^n$$

Propriedade 3. Utilizando a matriz Q de Padovan para encontrar os valores desta nova sequência e o vetor **k** com os valores de inicialização, temos que:

$$\mathbf{k}.Q$$

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_0 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz Q ao ser elevada a n-ésima potência juntamente com o vetor **k** de inicialização, obtemos os termos da Sequência de Padovan Afim, encontrando:

$$\mathbf{k}.Q^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \end{bmatrix}$$

Demonstração. Através do princípio da indução finita, temos que:

$$\mathbf{k}.Q^{n+1} = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}.Q^{n+1} = \begin{bmatrix} \underbrace{P_{n+1} + P_n}_{P_{n+3}} & P_{n+2} & P_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}.Q^{n+1} = \begin{bmatrix} P_{(n+1)+2} & P_{(n+1)+1} & P_{(n+1)} \end{bmatrix}$$

$\square$

Propriedade 4. Levando em consideração os procedimentos realizados na seção anterior para obter a função geradora de Padovan, o mesmo foi realizado para a Sequência de Padovan Afim.

$$G(P_n, x) = P_0 + P_1.x + P_2.x^2 + P_3.x^3 + P_4.x^4 + \dots$$
$$x^2 G(P_n, x) = P_0 x^2 + P_1.x^3 + P_2.x^4 + P_3.x^5 + P_4.x^6 + \dots$$
$$x^3 G(P_n, x) = P_0 x^3 + P_1.x^4 + P_2.x^5 + P_3.x^6 + P_4.x^7 + \dots$$

Assim, $G(P_n, x) - [x^2 G(P_n, x) + x^3 G(P_n, x)]$, onde $P_0 = a_0; P_1 = a_1; P_2 = a_2$

$$G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1.x + (P_2 - P_0).x^2 + (\underbrace{P_3}_{P_0 + P_1} - P_1 - P_0).x^3 + (\underbrace{P_4}_{P_2 + P_1} - P_2 - P_1).x^4 + \dots$$

$$G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1.x + (P_2 - P_0).x^2 + (\cancel{P_0} + \cancel{P_1} - \cancel{P_1} - \cancel{P_0}).x^3 + (\cancel{P_2} + \cancel{P_1} - \cancel{P_2} - \cancel{P_1}).x^4 + \dots$$

$$G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1.x + (P_2 - P_0).x^2$$

$$G(P_n, x) = \frac{a_0 + a_1.x + (P_2 - P_0).x^2}{(1 - x^2 - x^3)}$$

Essas são algumas das propriedades da Sequência de Padovan Afim que estudamos neste trabalho, sendo possível a obtenção de mais outras através de aprofundamento neste estudo. Com esses resultados, qualquer termo da sequência pode ser encontrado sem necessitar conhecer os anteriores.

4. CONCLUSÃO

Este artigo descreveu propriedades da Sequência de Padovan Afim. Essas novas propriedades foram descobertas variando o padrão de propriedades já conhecidas da sequência de Padovan, além de utilizar o raciocínio lógico, provas matemáticas e recursos computacionais para diagnosticar novos resultados.

Novas propriedades foram estudadas como forma de obtermos os números desta nova sequência, sem utilizar a relação de recorrência, tais como: a matriz geradora Q, a fórmula de Binet e a função geradora.

Assim, podemos utilizar essas novas propriedades, demonstradas neste trabalho, para aplicações em outras áreas e estudos posteriores.

5. REFERÊNCIAS

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da Sequência de Fibonacci apoiada na tecnologia.** Anais do VI HTEM-Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, p.1-12, 2013.

FERREIRA, Ronaebson de Carvalho **Números mórficos**. Paraíba (João Pessoa): UFP, 2015.Dissertação, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, 2015.

ILIOPOULOS, Vasileios. **The plastic number and its generalized polynomial**. Cogent Mathematics, 2, 1023123, p. 1-6, Mar. 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1080/23311835.2015.1023123. Acessado em 20 de junho de 2018.

MAROHNIC, Luka; STRMECKI, Tihana. **Plastic Number: Construction and Applications.** Advanced Research in Scientific Areas, 2, 5, p. 3-7, December 2012. Disponível em: https://bib.irb.hr/datoteka/628836.Plastic_Number_-_Construct.pdf. Acessado em 23 de maio de 2018.

MELO, Cláudio Umberto. **O método de Cardano e Sua Aplicação no Ensino Médio.** Goiás (Catalão): UFG, 2014. Dissertação, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Goiás, 2014. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3976/2/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Claudio%20Umberto%20de%20Melo%20-%202014.pdf. Acesso em 12 de julho de 2018.

PADOVAN, Richard. **Dom Hans Van Der Laan and the Plastic Number**. Nexus IV: Architecture and Mathematics, 14, 1, p. 181-193, January 2002.

SANTOS, Arlem dos Santos; ALVES, Francisco Regis Vieira. **O estudo e o ensino da Sequência de Fibonacci numa abordagem atualizada**. Revista Thema. 3, 2, p. 42-53. 2016. Disponível em: http://revistathema.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/viewFile/357/308. Acessado em 10 de junho de 2018.

SEENUKULl, Pisuda; NETMANEE, Songpol; PANYAKHUN, Taweesak; AUISEEKAEN, Rossukhon; MUANGCHAN, Sa-at. **Matrices which have similar properties to Padovan Q-Matrix and its generalized relations**. Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology. 7, 2, p. 90-94, December 2015.

SOKHUMA, Kritsana. **Padovan q-matrix and the generalized relations.** Applied Mathematical Sciences. 7, 56, p. 2777–2780, January 2013. Disponível em: http://www.m-hikari.com/ams/ams-2013/ams-53-56-2013/sokhumaAMS53-56-2013.pdf. Acessado em 05 de julho de 2018.

VOET, Caroline. **The poetics of order: Dom hans van der laan's architectonic space.** Architectural Research Quarterly, 16, 2, p. 137–154, June 2012. Disponível em: http://www.vanderlaanstichting.nl/pics/pdf/130105-poetics_of_order-Caroline_Voet.pdf Acesso em 12 de julho de 2017.

Submissão: 12/07/2018

Aceito: 28/08/2018