2023 | Volume 7 | Pág. 163 a 175
DOI: https://doi.org/10.15536/reducarmais.7.2023.3093

Revista Educar Mais

O número de ouro na escolaridade básica: uma possível abordagem pela exploração dos eixos constitutivos dos números reais

The golden number in basic education: a possible approach for the exploration of the constitutive axes of real numbers

El número de oro en la educación básica: el posible enfoque para la exploración de los ejes de la constitución de números reales

Wagner Marcelo Pommer[1]

RESUMO

Um número irracional de destaque – o número de ouro - é pouco explorado nos livros didáticos brasileiros e nos materiais curriculares nacionais mais recentes. Este texto objetivou realizar uma discussão epistemológica e didática envolvendo um possível desenvolvimento e significação do número de ouro no segmento da escolaridade básica. Para tal intento fizemos uso do aporte teórico denominado eixos constitutivos dos números reais, apontados em Machado (2009), o qual designa os pares discreto&contínuo, exato&aproximado e finito&infinito como polaridades que permitem situar e significar o conhecimento dos números irracionais na escolaridade básica. A análise epistemológica e didática revelou conexões do número de ouro com a sequência de Fibonacci e com as frações contínuas simples, que permeiam uma apresentação articulando os eixos constitutivos dos números reais.

Palavras-chave: Número de ouro; Escolaridade Básica; Eixos Constitutivos Números Reais. Números Irracionais.

ABSTRACT

A remarcable irrational number – the golden number – is little explored in Brazilian didactical textbooks and at the most recent national curriculum stanndarts. This text aimed to carry out an epistemological and didactical discussion involving a possible development and significance of the golden number in the segment of basic education. For this purpose, we made use of a theoretical contribution called constitutive axes of real numbers, pointed out in Machado (2009), which designates the discrete&continuous, exact&approximate and finite&infinite pairs as polarities that enables to situate and signify the knowledge of irrational numbers at basic education. The epistemological and didactical analysis revealed connections of the golden numer with the Fibonacci sequence and with simple continued fractions, which permeate a presentation articulating the constitutive axes of real numbers.

Keywords: *Golden Number; Basic School; Constitutive Axles of Real Numbers; Irrational Numbers.*

RESUMEN

Un número irracional prominente, el número de oro, se explora poco en los libros de texto brasileños y los materiales del plan de estudios nacional más recientes. Este texto tenía como objetivo hacer una discusión epistemológica y didáctica que implica un posible desarrollo y importancia del número de oro en el segmento de la educación básica. Para tal intención, utilizamos la contribución teórica llamada ejes constitutivos de los números reales, señalados en Machado (2009), que designa los pares discretos y continuos, exactos y

[1] Bacharel em Engenharia Mecânica, Bacharel em Física, Mestre em Educação Matemática, Doutor em Educação e Professor da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), Diadema/SP – Brasil. E-mail: wagner.pommer@unifesp.br

aproximados, finitos y infinitos como polaridades que permiten ubicar y significan el conocimiento de números irracionales en la educación básica. El análisis epistemológico y didáctico reveló conexiones del número de oro con la secuencia de Fibonacci y con las fracciones simples, que impregnan una presentación que articula los ejes constitutivos de los números reales.

Palabras clave: *Número de oro; Educación básica; Ejes constitutivos números reales. Números irracionales*

1. INTRODUÇÃO

Autores como Machado (1990), Reina; Wilhelmi; Lasa (2012) e Voskoglou (2013) destacam as dificuldades de alunos e professores com relação ao ensino dos números irracionais na escolaridade básica. Porém, os autores relembram que este é um importante tema para o desenvolvimento da Matemática. Do ponto de vista do conhecimento matemático é notório:

> [...] que a maioria absoluta, a quase totalidade dos Números Reais existentes é constituída por números irracionais. Os outros, os racionais, constituem uma ínfima minoria, a despeito de o homem comum não ter contato senão com uns poucos números irracionais, ao longo da vida (MACHADO, 1990, p. 43-44).

Jernajczyk (2015) afirma que os números irracionais são estruturas matemáticas teóricas, mas no senso comum "[...] that they are a difficult issue which escapes intuitive understanding and which is not easily visualized" (p. 270)[2].

Em particular, um número irracional de destaque – o número de ouro - é pouco explorado nos livros didáticos brasileiros, conforme algumas pesquisas como em Condesse; Minnaard (2007) e Pommer (2012). Em termos de escolaridade básica, os autores Dos Santos e Alves (2016) destacam que o número de ouro tem relação com a sequência de Fibonacci, com o triângulo de Pascal e, no Ensino Superior, com as sequências recorrentes, as funções geradoras e as frações contínuas.

Pommer (2012) constatou que alguns livros didáticos da escolaridade básica apresentam o número de ouro por dois modos distintos. Por um lado, há manuais que optam por um viés pragmático, e geralmente realizam a apresentação do número de ouro por meio de alguns contextos históricos, artísticos ou textos jornalísticos, associados a figuras geométricas, como a construção do divino retângulo áureo ou do pentagrama da escola pitagórica. Segue-se a esta apresentação empírica a introdução da definição do número de ouro e a determinação do valor da razão áurea pela resolução da equação de 2º grau.

Em outros livros didáticos a abordagem segue somente o viés teórico, de modo a apresentar uma abordagem mais formal, sem necessariamente focar nos possíveis contextos envoltos na exploração conceitual da razão áurea.

Nesse mote, este texto objetivou realizar uma discussão epistemológica e didática envolvendo uma possível apresentação e significação do número de ouro no segmento da escolaridade básica.

---

[2] "[...] que eles representam um assunto que causa dificuldades, escapam ao entendimento intuitivo e não são facilmente visualizados" (JERNAJCZYK, 2015, p. 270).

2. OS REFERENCIAIS TEÓRICOS

Uma observação inicial em torno dos documentos curriculares nacionais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) indicavam que os números irracionais basicamente se limitavam ao desenvolvimento de radicais e expor um pouco sobre o número PI. O motivo principal alegado neste documento para essa redução se refere ao fato que tal tema envolve uma ideia não intuitiva para os alunos da escolaridade básica.

Mais atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2016) menciona que se aprofunde a noção de número para os alunos da escolaridade básica, mediante a problematização em que "[...] os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais" (p. 267).

Ainda, tal documento propõe o trabalho com os números irracionais no segmento do Ensino Fundamental, no 9º ano, envolvendo as habilidades EF09MA01, EF09MA02, EF09MA03 e EF09MA04, sintetizadas no Quadro 01.

Quadro 01: Habilidades propostas no 9º ano com relação aos números irracionais

Objeto do Conhecimento	Habilidade
Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta. Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica.	(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
Potências com expoentes negativos e fracionários.	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
Números reais: notação científica e problemas.	(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

Fonte: Adaptado de Brasil (2016, p. 269).

Com relação à razão áurea, que também pode ser denominada como número de ouro, segmento áureo ou razão extrema e média, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2016) não faz menção.

Nesse entremeio, um dos possíveis meios de prover significado aos números irracionais poderia ser encaminhado pela abordagem dos pares discreto&contínuo, exato&aproximado e finito&infinito, eixos constitutivos dos números irracionais obtidos pela análise histórico-didático-epistemológica dos números reais, propostos inicialmente em Machado (2009) e desenvolvidos em Pommer (2012).

O par discreto&contínuo pode ser observado a partir de duas ações fundamentais da Matemática relatadas em Caraça (1970): contar e medir. No âmbito dos números naturais o autor destaca que a operação de contagem faz corresponder, a partir do primeiro elemento de uma dada coleção, uma enunciação por meio da correspondência biunívoca.

O antropólogo Thomas Crump (1993) acrescenta que os povos primitivos tanto contavam quanto mediam. O referido autor comenta sobre processos de natureza contínua, realizados por meio da contagem de nós ou de passos para medir distâncias, uma grandeza de origem discreta.

e-ISSN 2237-9185

> O desdobramento da natureza discreta articulada com o contínuo permitiu a passagem dos números naturais para os racionais não negativos. No plano histórico, as frações emergiram a partir de situações empíricas que envolviam a repartição de partes não necessariamente iguais com relação a determinada quantidade (POMMER, 2018, p. 617-618).

Do ponto de vista da história da Matemática, Jernajczyk (2015) comenta que o primeiro relato do contato das antigas civilizações com os números irracionais ocorreu nos estudos da escola pitagórica, em cerca do século V a.C. Este fato foi provavelmente percebido por Hippasus de Metaponto, quando o grego estudava as relações entre as medidas das diagonais no pentágono regular, momento posteriormente designado por incomensurabilidade entre as medidas de dois segmentos.

Caraça (1970) ressalta que a questão de incomensurabilidade entre dois segmentos foi denominada por 'problema da medida' e sugeria a exploração didática deste assunto no ensino básico.

Hariki (1993) retomou essa questão pedagógica e propôs introduzir os números irracionais no ensino básico meio do estudo da problematização da incomensurabilidade. Neste mote, a autora indicou que a comensurabilidade/incomensurabilidade entre dois segmentos AB e CD poderia ser apresentada por meio do seguinte problema: São dados dois segmentos *AB* e *CD* tais que *AB* é maior que *CD.* É possível medir *AB,* utilizando *CD* como unidade?

Hariki (1993) esclarece que se a resposta for positiva teríamos o estudo dos números racionais. De outro modo, se a resposta a essa questão for negativa teríamos o caso dos segmentos *incomensuráveis*. Vale ressaltar que tais considerações sobre os segmentos incomensuráveis, envolvem a medida no sentido de experimento de pensamento, sem se efetivarem medidas reais.

Caso seja realizada alguma medida, esta corresponderia a uma aproximação de um número irracional, que requer a expressão por meio de um número decimal finito.

> O ato de medir é uma atividade pragmática que corresponde ao ato de aproximar um número, um dado ou registro de entrada, quer seja racional ou irracional, e onde o registro de saída deve ser expresso necessariamente por um número racional, na forma decimal e finita. [...] Nesse mote, um possível modo de apresentação dos números irracionais na escolaridade básica se torna viável, em situações práticas e científicas, por meio do desenvolvimento da noção de aproximação (POMMER, 2018, p. 619-620).

Pommer (2018) discute um pouco mais a questão da incomensurabilidade, ao indicar que um número irracional poderia ser apresentado como uma medida da impossibilidade da subdivisão de dois segmentos por meio de uma mesma unidade comum.

A partir do eixo discreto&contínuo emergiria a possibilidade da exploração do eixo 'exato&aproximado'. Caraça (1970) realizou importante discussão ao colocar que o problema da medida envolveria três aspectos "[...] a escolha da unidade; a comparação com a unidade; a expressão do resultado dessa comparação por um número" (p. 30).

Os eixos discreto&contínuo e exato&aproximado envolvem o trabalho com a ideia de infinito, pouco desenvolvida na escolaridade básica. Aristóteles, no séc. III a.C., discutiu o processo de crescimento em sequências não finitas, ao qual foi posteriormente denominado de infinito potencial.

Hilbert (1925) destaca que o infinito, na forma potencial, remete ao processo da contagem. Assim, ao se trabalhar o conjunto dos Números Naturais, o ato de enunciar um sucessor de certo número e, de

  e-ISSN 2237-9185

modo recursivo, buscar sempre um número posterior, na forma costumeiramente denominada de 'mais 1', remete a um processo de natureza discreta, denominado de infinito potencial.

Porém, Hilbert (1925) destaca outro tipo de infinito: o atual, que remete a ideia de totalidade completa. Hilbert (1925) coloca como exemplo "[...] a própria totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como uma unidade acabada ou quando encaramos os pontos de um segmento como uma totalidade acabada de coisas. Esse tipo de infinito é denominado como infinito atual" (HILBERT, 1925, p.6).

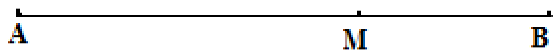
3. REAPRESENTANDO A PROBLEMATIZAÇÃO DO NÚMERO DE OURO

O número **Φ** (designação *phi* maiúsculo, referência às iniciais de Fídias, escultor e arquiteto do Partenon[3]), foi denominado por Euclides de Alexandria[4] (1944) como 'razão extrema e média', conforme relato no livro VI da obra *Os Elementos*[5] (*Stoichia,* em grego). Mais atualmente, a razão extrema e média foi designada por proporção áurea, razão áurea ou número de ouro e foi percebido no estudo de alguns ramos da Matemática, na Física, na Biologia e nas artes.

Inicialmente, passamos a definição dada no livro *Os Elementos*: "Uma linha reta se diz dividida em extrema e média razão, quando toda a linha é para o segmento maior, como este segmento maior é para o segmento menor" (EUCLIDES, 1944, p. 99).

No Quadro 02 consideramos o ponto genérico M e expressamos a razão áurea por meio da definição dada em Euclides (1944).

Quadro 02: Divisão de um segmento em razão áurea

	$\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{MB}$

Fonte: O autor.

Porém, ao invés de apresentar a definição como algo pronto, se considerarmos o ponto de vista pedagógico, podemos construir um caminho didático de problematização das possíveis relações que podem ser obtidas e, a partir disso, ressignificar a definição de razão áurea.

No ensino básico é usual apresentar a divisão de um segmento geométrico contínuo dado em duas ou mais partes inteiras, ou seja, em partes discretas. Por exemplo, seja M o ponto médio de um segmento AB, conforme ilustra o Quadro 03.

Então AM = MB, ou seja, $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{1}=1$ e podemos dizer que a relação $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$ ou ainda $\frac{MB}{AB}=\frac{1}{2}$. Estas relações entre parte e todo recaem na expressão de um número racional.

[3] O Parthenon Grego ou o Templo das Virgens, provavelmente construído entre 447 e 433 a.C., foi uma das obras arquitetônicas mais admiradas da antiguidade, em que provavelmente a razão largura/altura obtida no retângulo imaginário que contêm a fachada expressaria o número de ouro.

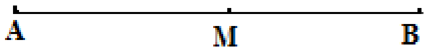
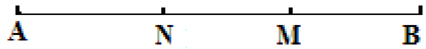
[4] Euclides, em grego clássico Εὐκλεíδης, que trabalhava na Biblioteca de Alexandria.

[5] Os Elementos, de Euclides, é um trabalho que contém treze livros (ou melhor, capítulos), perpassando toda a matemática compilada pela civilização indo-europeia até aquele momento histórico, por volta de 300 a.C.

e-ISSN 2237-9185

É o caso de dividir um segmento AB em três partes iguais, conforme ilustra o Quadro 04.

Podemos tomar algumas relações parte/todo como em $\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}$, $\frac{MB}{AB}=\frac{1}{3}$ e $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{1}$.

Quadro 03: Divisão de segmento em duas partes iguais	**Quadro 04**: Divisão de segmento em três partes iguais
	

Fonte: O autor.

O quadro 05 mostra algumas relações obtidas pela divisão do segmento contínuo em partes iguais, ou seja, relações entre partes múltiplas inteiras (discretas) de certa unidade ***u***, considerando-se M o ponto mais próximo do vértice B.

Quadro 05: Algumas relações entre segmentos

Número de subdivisões	$\frac{AB}{AM}$	$\frac{AM}{MB}$	$\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{MB}$?
2	$\frac{AB}{AM}=\frac{2}{1}=2$	$\frac{AM}{MB}=\frac{1}{1}=1$	não
3	$\frac{AB}{AM}=\frac{3}{2}$	$\frac{AM}{MB}=\frac{2}{1}=2$	não
4	$\frac{AB}{AM}=\frac{4}{3}$	$\frac{AM}{MB}=\frac{3}{1}=3$	não
5	$\frac{AB}{AM}=\frac{5}{4}$	$\frac{AM}{MB}=\frac{4}{1}=4$	não
6	$\frac{AB}{AM}=\frac{6}{5}$	$\frac{AM}{MB}=\frac{5}{1}=5$	não

Fonte: O autor.

Uma análise preliminar inicial com relação aos resultados expressos no Quadro 05 envolvendo o aspecto destas tentativas iniciais geradas pela subdivisão de um dado segmento geométrico contínuo AB em duas partes inteiras (discretas) poderia levar a uma primeira indagação: Das possíveis divisões de um segmento dado AB, se tomamos um determinado ponto M situado dentro deste intervalo e o mais próximo do vértice B, existiria algum ponto para o qual $\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{MB}$ expressaria uma relação entre dois números inteiros?

A última coluna do Quadro 04 nos fornece um indicativo que a resposta a essa pergunta não pode envolver a estratégia da tentativa e erro. Torna-se necessário outro lugar para contornar e desenvolver essa questão e, daí, torna-se necessária a abordagem pelo viés da Álgebra.

  e-ISSN 2237-9185

4. ENCAMINHANDO O PROBLEMA

Para resolver este problema proposto no quadro geométrico, podemos passar para o quadro algébrico. Tem-se, por hipótese, $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AM}}$ (I), onde o ponto M é um ponto intermediário ao segmento de reta AB e mais próximo de B, que gera uma relação entre dois números inteiros (ver Quadro 06).

Quadro 06: Divisão de segmento em duas partes conforme $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AM}}$

Fonte: O autor.

Em particular, no Quadro 06, se considerarmos MB = 1 e AM = x, por construção tem-se que AB = x +1. Aplicando-se esses dados a relação (I), surge:

$$\frac{\mathrm{x}}{1} = \frac{\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}} \text{(II)} \rightarrow \ \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 = 0.$$

Como toda equação de segundo grau, esta tem duas soluções que podem ser determinadas pelo método resolutivo (no Brasil conhecido como método de Bhaskara):

$$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4.\mathrm{a.c} = 1 + 4 = 5$$

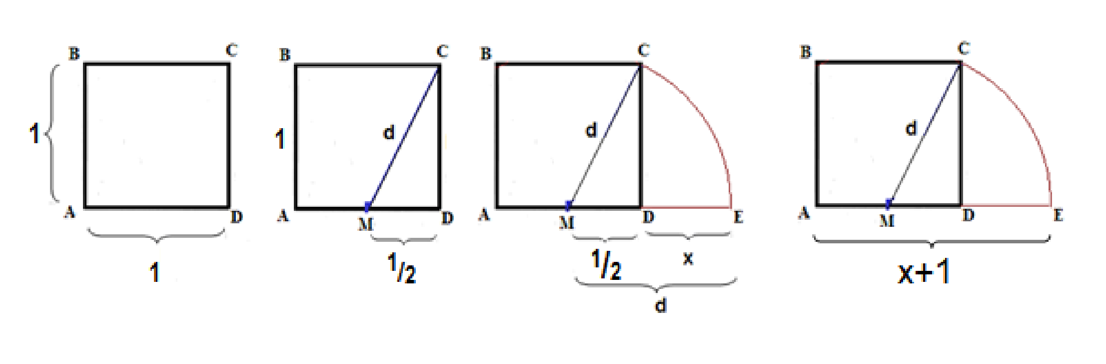
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \mathrm{x}_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1{,}6180.... \\ \mathrm{x}_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi = 0{,}6180.... \end{cases}.$$

A solução positiva (x_1) para o problema proposto, dada por $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180....$ representa uma constante importante, porém não representa uma razão entre dois números inteiros. Assim, o problema proposto tem uma solução e, daí, podemos interpretar esse resultado do quadro algébrico retomando a conexão com a Geometria.

A razão áurea pode ser observada por um processo construtivo, a partir de um quadrado de lado unitário, conforme expressa o Quadro 07.

  e-ISSN 2237-9185

Quadro 07: Construção geométrica do segmento áureo



Fonte: O autor.

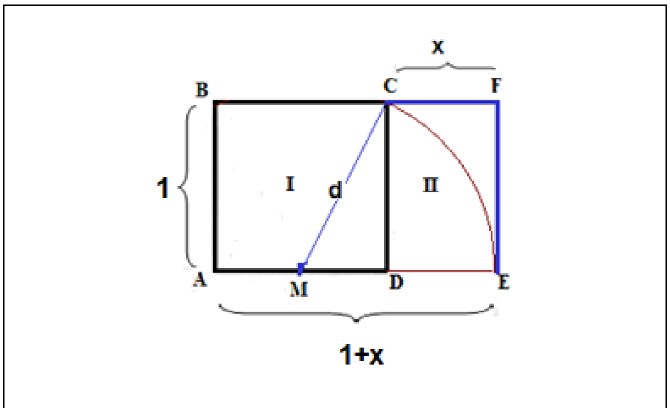
No triângulo MDC determina-se o segmento **d** por aplicação do teorema de Pitágoras.

$$d^2 = (\frac{1}{2})^2 + \ 1^2 \leftrightarrow d^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{1+4}{4} = \frac{5}{4} \leftrightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Traçando-se o arco CE, de centro em M, no sentido horário, obtém-se o ponto E, encontro do arco CE com a reta suporte do lado AD. A medida 'x' representa a distância $DE = d - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$. Daí: $AE = 1 + x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, que representa o segmento áureo dado por $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180....$

O Quadro 08 indica o retângulo áureo ABFE.

Quadro 08: O retângulo áureo ABEF



Fonte: O autor.

Este percurso permitiria iniciar a apresentação da razão áurea, um número irracional, a alunos da escolaridade básica, por um viés construtivo inserido nos conhecimentos próprios da escolaridade básica.

5. O NÚMERO DE OURO E AS FRAÇÕES CONTÍNUAS SIMPLES

Outra importante característica do número de ouro é que ele pode ser representado por meio de uma fração contínua simples. Mas o que é uma fração contínua simples?

e-ISSN 2237-9185

Da expressão (II) $\frac{x}{1}=\frac{x+1}{x}$, segue $\Phi = \frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$. $Mas\ \frac{1}{x} = \frac{1}{\Phi}$.

Daí: $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \leftrightarrow \Phi^2 = \Phi + 1 \leftrightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Porém, podemos seguir outro caminho.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\vdots}}} = [1; 1,1,1 \dots].$$

Esta forma de representar o número de ouro, em uma estrutura de frações com numerador '1' é conhecido como fração contínua simples. No caso particular, o número de ouro representa uma arquitetura de números formada somente a partir do número '1', em uma sequência infinita. De modo geral, uma fração contínua simples pode ser representada por:

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots}}} = [a_1; a_2, a_3, a_4 \dots]$$

Uma fração contínua com a_1 inteiro e demais termos naturais não nulos pode representar um número racional ou irracional. No caso de um número racional a fração contínua é uma sequência finita $[a_1;a_2,a_3,a_4,..,a_n]$. Caso a fração contínua seja infinita, ou seja, da forma $[a_1;a_2,a_3,a_4,..,a_n, \dots]$, ela indica um número irracional. Em síntese, o número de ouro representa a fração contínua simples infinita $\Phi = [1;1,1,1,1,1,\dots.]$, que representa a fração contínua mais elementar. Ainda, a partir da forma $\Phi = [1;1,1,1,1,1,\dots.]$ podemos tomar as aproximações (ver Quadro 09).

Quadro 09: Aproximações do número de ouro expresso pela fração contínua simples

1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$
3	$a_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$
4	$a_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}666666.$
5	$a_5 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$

6	$a_6 = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}} = 1+\cfrac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{13}{8} = 1{,}625.$
...	...

Fonte: O autor.

O uso da fração contínua simples permite observar uma característica essencial dos números irracionais. Um número irracional pode ser definido por meio da "[...] sequência de racionais que constituem suas aproximações" (MACHADO, 1994, p. 12). Ainda, a sequência de valores aproximados, pelo truncamento sucessivo dos termos da expressão (**n**), ou seja, a sucessão em termos de valores decimais (1; 2; 1,5; 1,66...; 1,6; 1,625; 1,615385; ...), ou ainda (1; 2; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; 21/13; ...).

Ainda, podemos perceber que essa sequência de aproximações do número de ouro (um número irracional) tem relação e pode ser obtida relacionando-se dois números sucessivos a partir da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...), tema que abordamos a seguir.

6. O NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: UMA QUESTÃO DE APROXIMAÇÃO

Em 1202, Leonardo, de Pisa, mais conhecido por Fibonacci (nome que indica a origem ou família de boa estirpe), publicou o *Liber Abaci* (O Livro dos Ábacos), conforme relata Boyer (1991). Neste livro se destacou o problema de calcular quantos coelhos poderiam ser produzidos em um ano, a partir de um único casal.

O 'Problema dos Coelhos', do *Liber Abaci*, supõe implicitamente que cada casal leva um mês, após nascer, para ficar fértil, gera sempre outro casal, a cada mês, e que nenhum coelho morre (os coelhos teriam existência eterna).

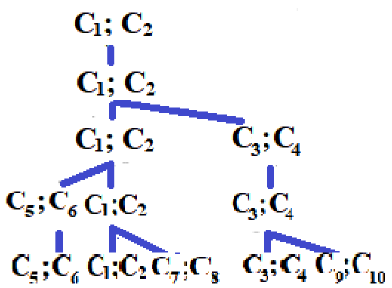
O mês inicial (mês 0) é usado para designar o início do problema. No mês 1, o casal antigo (C_1;C_2) ainda não está pronto para procriar. No mês 2 o casal antigo procria, gerando 1 novo casal (C_3;C_4), totalizando dois casais (C_1+C_2; C_3+C_4).

No mês 3, o casal (C_1;C_2) está fértil e gera um 2º casal (C_5;C_6). Porém, o casal C_3;C_4 ainda não está pronto para procriar. Portanto, no mês 3, tem-se um total de 3 casais (C_1;C_2+ C_3;C_4 + C_5;C_6).

No mês 4, o casal (C_1;C_2) gera um novo casal (C_7;C_8) e o casal (C_3;C_4) gera o 1º par (C_9;C_{10}). Portanto, no mês 4 tem-se 5 casais (C_1;C_2+ C_3;C_4+ C_5;C_6+ C_7;C_8+ C_9;C_{10}). E assim por diante. O Quadro 10 sintetiza estes cálculos.

 CC BY-NC 4.0 e-ISSN 2237-9185

Quadro 10: Representação pictórica e analítica da solução do problema dos coelhos

Mês	Diagrama	Nº de casais antigos F(n-2)	Nº de novos Casais F(n-1)	Total de casais F(n)
0		1 (C_1; C_2)	0	1
1		1 (C_1; C_2)	0	1
2		1 (C_1; C_2)	1 (C_3; C_4	2
3		2 (C_1; C_2) + (C_3; C_4)	1 (C_5; C_6)	3
4		3 (C_1; C_2) + (C_3; C_4) + (C_5; C_6)	2 (C_7; C_8) + (C_9; C_{10})	5

Fonte: O autor

Continuando-se o processo, são encontrados alguns outros números na sequência, que pode ser expressa por (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...). Explorando-se as relações internas a esta sequência pode-se observar que cada número, a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois números imediatamente anteriores. De modo mais geral, F (n) = F (n - 1) + F (n - 2).

Uma exploração importante foi realizada por Johannes Kepler (século XVII), o célebre astrônomo, que parece ter sido o primeiro a notar que a divisão entre dois números consecutivos da sequência de Fibonacci (número/precedente) são aproximações do número de ouro (**Φ)**, de acordo com Boyer (1991)**.**

Em suma, a representação decimal infinita e não periódica dos números irracionais é conhecida no Brasil pelo nome de dízima não periódica. O único modo de acesso a um número irracional ao mundo pragmática se faz por meio de aproximações.

Assim, quando se avança para valores cada vez maiores na sequência de Fibonaci, ou seja, quando 'n' tende para o infinito, a razão tende para o número de ouro (**Φ).** Assim, este problema viabilizaria se explorar o conceito de infinito potencial na escolaridade básica.

7. CONCLUSÕES

O conjunto dos Números Racionais, um tema explorado do 3º ao 7º ano do Ensino Fundamental, conforme expresso na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2016), é geralmente apresentado em livros didáticos por um viés ligado ao pragmático. De modo oposto, os números irracionais têm sua essência ligada a aspectos teóricos. O ensino brasileiro usualmente não considera esse descompasso, tentando tratar os números irracionais por uma via simplificada ligada ao pragmático ou, num viés oposto, tratando-o de modo teórico, sem relacioná-lo aos números racionais.

Ainda, o ensino da escolaridade básica costuma se centrar em aspectos discretos até cerca do 7º ano do Ensino Fundamental e passa a explorar o contínuo a partir daí. Ainda, nesse segmento de ensino os aspectos ligados ao aproximado e ao infinito são evitados ou explicados de modo simplista. Assim, a exploração dos pares discreto&contínuo, exato&aproximado e finito&infinito, conforme expõe

  e-ISSN 2237-9185

Machado (2009), abriria uma oportunidade de iniciar o processo de significar os números irracionais na escolaridade básica.

Uma característica essencial aos números irracionais é que estes somente são acessíveis no nosso mundo por meio das aproximações por meios dos números racionais. Esse mote pode ser constatado na apreciação do número de ouro – um número irracional – articulado com a sequência de Fibonacci e as frações contínuas, em que a divisão do sucessor e um termo dessa sequência apresenta aproximações cada vez melhores da razão áurea. Ainda, levando-se esse processo ao infinito potencial, a própria sequência converge para o número de ouro, revelando a totalidade do conceito de infinito atual.

Um ponto inicial a se chamar a atenção se faz com as possibilidades de articular o número de ouro a diversos contextos internos a própria Matemática, perpassando o quadro geométrico, numérico e algébrico, algo não usual de ocorrer no ensino básico.

O matemático Weierstrass (século XIX) elaborou uma definição de número irracional que se baseia na identificação do número real com a própria sequência que converge para ele. Assim, no prototípico exemplo da sequência de Fibonacci, o número de ouro se define não mais pelo limite da sequência formada pelas sucessivas aproximações das razões entre dois termos de números inteiros sucessivos da sequência de Fibonacci (1; 2; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; 21/13; ...), que remete ao discreto, mas como sendo a própria sequência que converge para o número de ouro, em uma concepção de totalidade inerente ao conceito de infinito atual.

Alia-se a isso a oportunidade de explorar alguns contextos ligados à História da Matemática. O problema da medida, apresentado em Caraça (1970) aponta aspectos ligados à explicação dos segmentos incomensuráveis, como um momento chave da História da Matemática que pode enriquecer a discussão da apresentação dos números irracionais e diferenciá-lo dos números racionais.

Cerri (2006) destaca que alguns historiadores acreditam que o número de ouro foi o primeiro par de segmentos incomensuráveis descoberto pelos pitagóricos, em cerca do século V a.C.

> Existe uma vertente que defende a tese de que a descoberta dos incomensuráveis está relacionada ao pentagrama, que é o símbolo dos pitagóricos, pois a razão entre o lado de um pentágono regular com a sua diagonal resulta na *razão áurea* que é dada pelo número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (CERRI, 2006, p. 4).

Acrescentamos que, do ponto de vista apresentado por meio de elementos da teoria dos Conjuntos, usualmente tratado em manuais do 1º ano do Ensino Médio, os Números Racionais e os Números Irracionais são conjuntos disjuntos. Esta concepção matemática correta pode induzir, em uma concepção simplista, a não necessidade de exploração das possíveis relações entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, considerando-se o ponto de vista pedagógico. Essa lacuna pode ser trabalhada pela exploração dos pares discreto&continuo, exato&aproximado e finito&infinito.

8. REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (2ª versão).** Brasília: MEC, 2016.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: SEMT/MEC, 1997.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Portugal: Lisboa, 1970.

CERRI, Cristina. **Desvendando os Números Reais**. IME-USP, 2006.

CONDESSE, Viviana; MINNAARD Claudia. La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro. **Revista Iberoamericana de Educación.** n. 42, v.2. mar. 2007.

CRUMP, Thomas. **La Antropología de los números.** Editora: Alianza, **1993**.

DOS SANTOS, Arlem Atanazio; ALVES, Francisco Régis Vieira. O estudo e o ensino da sequência de Fibonacci numa abordagem atualizada. **Revista Thema**, v. 13, n. 2, p. 42-53, 2016.

EUCLIDES**. Os Elementos** (Edição latina de Frederico Commandino). São Paulo: Edições Cultura. 1944.

HARIKI, Seiji. Sobre Frações Próprias, Impróprias e Aparentes. **Revista do Professor de Matemática,** IME-USP, São Paulo, 1993, n. 23, p. 19-22.

HILBERT, David. Sobre o Infinito. Tradução de Marcelo Papini. p. 1-11. In: **Encontro de Matemáticos**. Sociedade de Matemática de Westfalen: Münster, 1925, p. 161-190.

JERNAJCZYK, Jakub. Irrational images: the visualization of abstract mathematical terms. **Mathematica Applicanda**. v. 43, n.2, 2015, p. 269–279.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna.** São Paulo: Editora Cortez, 1990.

_________________________. Matemática e Realidade. 3. ed. São Paulo: Editora Cortez, 1994.

_________________________. Sobre alguns desequilíbrios na apresentação da Matemática básica: discreto/contínuo, finito/infinito, exato/aproximado, determinístico/aleatório. São Paulo: IME-USP, 2009.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico**: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 235f. Tese (Faculdade de Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo.

___________________________. Números irracionais na escolaridade básica: um olhar pelo viés dos eixos constitutivos dos números reais. **Revista de Educação Matemática**, v.15, p. 610-628, 2018.

REINA, Luis; WILHELMI, Miguel R.; LASA, Aitzol. Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafios en Educación Secundaria. **Educación Matemática**, v. 24, n. 3, dez. 2012. p. 67-97.

VOSKOGLOU, Michael Gr. An Application of the APOS/ACE Approach in Teaching the Irrational Numbers. **Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education**. v. 8, n.1, 2013. p. 30-47.

Submissão: 30/12/2022

Aceito: 24/01/2023