2022 | Volume 6 | Pág. 467 a 492
DOI: https://doi.org/10.15536/reducarmais.6.2022.2728

Revista
Educar Mais

Modelagem Matemática, BNCC e a prova do ENEM de 2019: confluências e reflexões

Mathematical modeling, BNCC and the 2019 ENEM test: confluences and reflections

La modelización Matemática, BNCC y la prueba del ENEM 2019: confluencias y reflexiones

Claudia de Oliveira Lozada[1]; Anneliese de Oliveira Lozada[2]

RESUMO

Neste trabalho fazemos uma análise das questões da prova de Matemática e suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM 2019 - que ensejam a modelagem matemática. Para tanto, tecemos considerações sobre as habilidades e competências previstas pela Base Nacional Comum Curricular e a Matriz de Referência do ENEM para verificar as confluências, assim como para uma melhor análise utilizamos a pesquisa qualitativa e classificamos as questões de acordo com uma tipologia, fornecendo deste modo parâmetros balizadores acerca das articulações dos conhecimentos para a resolução das questões. Os resultados desta pesquisa demonstraram que há um quantitativo considerável de questões do ENEM 2019 que ensejam a modelagem matemática, sendo que houve uma preponderância do tipo 4, que são questões que podem ser resolvidas intuitivamente ou elaborando um modelo matemático, assim como uma prevalência do nível fácil nas questões analisadas e interdisciplinaridade com seis componentes curriculares da Educação Básica. Desta forma, trazemos uma nova reflexão sobre as modelagens matemáticas existentes, em especial, a modelagem matemática por meio de situações-problema e como o professor pode trabalhá-la nas aulas de Matemática, a partir de questões do ENEM.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Base Nacional Comum Curricular; Exame Nacional do Ensino Médio.

ABSTRACT

In this work we analyze the questions of the Mathematics test and its Technologies of the National High School Exam - ENEM 2019 - that give rise to mathematical modeling. For that, we made considerations about the abilities and competences foreseen by the National Curricular Common Base and the Reference Matrix of ENEM to verify the confluences, as well as for a better analysis, we used qualitative research and classified the questions according to a typology, providing this so beacon parameters about the articulation of knowledge for the resolution of questions. The results of this research showed that there is a considerable amount of ENEM 2019 questions that give rise to mathematical modeling, and there was a preponderance of type 4, which are questions that can be solved intuitively or by elaborating a mathematical model, as well as a prevalence of the level easy in the analyzed issues and interdisciplinarity with six curricular components of Basic Education. In this way, we bring a new reflection on the existing mathematical modeling, in particular, the mathematical modeling through problem situations and how the teacher can work it in Mathematics classes, based on ENEM questions.

Keywords: *Mathematical Modeling; Common Base National Curriculum; National High School Exam.*

[1] Docente do Instituto de Matemática (IM/UFAL) e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Maceió/AL - Brasil. E-mail: clalloz@yahoo.com.br

[2] Doutoranda em Ensino e História das Ciências e da Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André/SP - Brasil. E-mail: ans.lozada@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo analizamos las preguntas de la prueba de Matemáticas y sus Tecnologías del Examen Nacional de Bachillerato - ENEM 2019 - que dan origen a la modelación matemática. Para eso, hicimos consideraciones sobre las habilidades y competencias previstas por la Base Común Curricular Nacional y la Matriz de Referencia de la ENEM para verificar las confluencias, así como para un mejor análisis, utilizamos investigación cualitativa y clasificamos las preguntas según una tipología, brindando así parámetros de referencia sobre la articulación de saberes para la resolución de interrogantes. Los resultados de esta investigación mostraron que existe una cantidad considerable de preguntas de la ENEM 2019 que dan lugar a la modelación matemática, y hubo una preponderancia del tipo 4, que son preguntas que pueden resolverse intuitivamente o elaborando un modelo matemático, así como un predominio del nivel fácil en los temas analizados y la interdisciplinariedad con seis componentes curriculares de la Educación Básica. De esta manera, traemos una nueva reflexión sobre la modelación matemática existente, en particular, la modelación matemática a través de situaciones problema y cómo el docente puede trabajarla en las clases de Matemáticas, a partir de preguntas ENEM.

Palabras clave: *Modelización Matemática; Currículo Nacional de Base Común; Examen Nacional de Escuela Secundaria.*

1. INTRODUÇÃO

É evidente que a maioria dos alunos não estão familiarizados com a resolução de problemas, decorrente do pouco ou nenhum trabalho realizado nas aulas de Matemática cuja "prioridade" é dada para exercícios que visam mecanizar procedimentos de maneira excessiva (CÂNDIDO, 2001; LOZADA, 2007). A esse respeito, Dante (1998) coloca:

> [...] embora tão valorizada, a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. É muito comum os alunos saberem efetuar os algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos. Isso se deve à maneira com que os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados. (DANTE, 1998, p.8).

Essa ênfase em exercícios de mecanização de procedimentos certamente é um resquício do modelo de ensino pregado pelo Movimento da Matemática Moderna com viés tecnicista, ainda muito presente nas práticas docentes e que precisa ser superado:

> O tecnicismo formalista, surgiu a partir do Movimento da Matemática Moderna e da pedagogia tecnicista, que traz uma associação entre duas concepções, uma refere-se ao modo de conceber a matemática, e a outra refere-se ao modo de conceber a organização do processo ensino-aprendizagem. Tal associação é encontrada nos autores Sangiorgi, Scipione e Castrucci, através da priorização das habilidades técnicas. Onde os conteúdos são apresentados em forma de instrução, sem relação com a vida social, política, ambiental entre outras, apenas com a matemática neutra (Matemática pela Matemática) e a aprendizagem ocorre de forma mecanizada, fazendo com que o aluno memorize os passos de resolução ao invés de aprender. (SANTOS; BATTISTI, 2017, p. 05).

Um dos principais documentos curriculares brasileiros, os Parâmetros Curriculares Nacionais, publicado em 1998, já demonstrava preocupação em relação a isso ao colocar a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas, que era desde a década de 80 uma recomendação do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), dos Estados Unidos, importante órgão norte americano que discute questões curriculares com amplitude mundial. E

e-ISSN 2237-9185

seguiram-se reformas curriculares em nível estadual e municipal na década de 90 no Brasil que colocaram a resolução de problemas como necessária nas aulas de Matemática.

Outrossim, os livros didáticos também foram reformulados e passaram a trazer a resolução de problemas, inclusive, colocando-a como elemento para introdução de conceitos matemáticos na perspectiva da contextualização, além de permear as pesquisas em Educação Matemática (STANIC; KILPATRICK, 1989; SCHOENFELD, 1992; ONUCHIC; ALEVATTO, 2011; ONUCHIC, 2013; NUNES; SANTANA, 2017) e colocar-se como uma tendência (REDLING, 2011; GALVÃO et al, 2016).

Embora essas e outras ações tenham sido tomadas para tornar a resolução de problemas uma prática frequente, ainda como já dissemos, é preterida em relação aos exercícios. Criar o hábito de trabalhar com problemas nas aulas de Matemática é compreender antes de tudo no que implica a resolução de problemas, quais os tipos de problemas e as competências e habilidades com as quais estão relacionados, as suas aplicações no cotidiano e em outras áreas do conhecimento, pois resolver problemas matemáticos não deve ser restrito às atividades escolares, mas ampliar-se para a vida diária onde o componente matemático aparece em diversas situações nas quais se exige estratégia para uma tomada de decisão.

Mas, a resolução de problemas não deve se limitar aos problemas de aplicação, aqueles que aparecem seguidamente a um conceito matemático desenvolvido nos livros didáticos e que geralmente são contextualizados, com um enunciado que apresenta uma simulação da realidade (com história fictícia) ou tendo como referência fatos reais que já ocorreram e foram extraídos de notícias de jornal (realidade de referência). Deve alcançar também aqueles problemas reais, da realidade imediata, que está acontecendo agora, que cerca o dia a dia dos alunos, do seu bairro, do seu contexto. Os alunos precisam experenciar a resolução de problemas no contexto real de suas vidas como um caminho para desenvolver o pensamento crítico (ENNIS, 1996), compreender que a Matemática está presente no seu dia a dia, que ela exerce um papel na sociedade (SKOVSMOSE, 2001), que devem enxergá-la criticamente e que vai além das quatro operações fundamentais.

E é isso que Lester Jr (2013) afirma ao pontuar o que é necessário para se resolver problemas, como coordenação de experiências prévias, conhecimento, representações familiares, padrões de inferência e intuição, ou seja, o indivíduo deve ter ampla experiência em como resolver problemas, forte conhecimento do conteúdo, proficiência no uso de uma variedade de representações e uma sólida compreensão de como reconhecer e construir padrões de inferência. Tudo isso ligado, segundo Lester Jr (2013) ao desenvolvimento de habilidades metacognitivas pelos alunos.

Contudo, os professores precisam compreender qual a finalidade de se trabalhar com a resolução de problemas, ou seja, podem adotar uma das três perspectivas definidas Schroeder e Lester Jr (1989) ou conjugá-las: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolver problemas de Matemática e ensinar Matemática através da resolução de problemas. Em seguida, é importante que o professor defina se essa perspectiva terá uma abordagem exploratória, investigativa ou exploratório-investigativa, e principalmente compreenda a diferença entre situação-problema, comumente presente em livros didáticos, e problema. Ambos, problema e situação-problema, são tipos de tarefas matemáticas, sendo que a situação-problema, encontra-se num nível intermediário entre o exercício e o problema, conforme mostra Viana (2020, p. 42) a partir do esquema elaborado por Ponte (2005):

  e-ISSN 2237-9185

Figura 1 – Tipos de tarefas matemáticas

Fonte: Viana (2020, p. 42) adaptado de Ponte (2005)

No problema, o aluno "se depara com algo que ele não conhece, não tem consolidado um caminho, um procedimento, e deste modo, lança-se uma exigência cognitiva, coloca-se o aluno diante de uma necessidade do conhecimento" (LOZADA; D´AMBROSIO, 2018, p. 14), o que exige uma postura mais exploratório-investigativa por parte do aluno, levando-o a pesquisar, buscar o conhecimento que não possui para resolver o problema, constituindo-se como um desafio. Já a situação-problema "orienta a aprendizagem, é constituída por um problema construído com finalidade didática e cria a necessidade de se aprender por meio de elementos reais ou abstratos" (LOZADA; D´AMBROSIO, 2018, p. 14), sendo que os alunos dispõem de conceitos em sua estrutura cognitiva cabendo mobilizá-los e/ou articulá-los para resolvê-la.

No campo da resolução de problemas se insere a Modelagem Matemática. A modelagem matemática genuína implica em resolução de problemas (mas nem toda resolução de problemas implica em modelagem) inserida num processo maior que não se resume em resolução pontual, mas num ciclo que permite a exploração e a investigação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Por concentrar-se num ciclo, demanda um planejamento, pois exige um tempo maior para que o ciclo se complete, além da mediação constante do professor durante as fases do ciclo, portanto, sua aplicação nem sempre poderá ser finalizada em apenas uma aula, exigindo outras aulas para que o ciclo seja concluído. Mas, a modelagem matemática genuína pode desdobrar-se em atividade de pré-modelagem matemática (LOZADA, 2021) quando se trabalham questões que envolvem situações-problema para a familiarização dos alunos com a metodologia tanto da modelagem quanto da própria resolução de problemas.

É nesse sentido, de apresentar a modelagem matemática com o perfil de atividade composta por situações-problema, que trazemos neste trabalho uma análise das questões do ENEM 2019 que podem ensejar a modelagem matemática em sua resolução e que podem posteriormente ser trabalhadas nas aulas de Matemática, preparando os alunos para a aplicação da modelagem matemática genuína, com um ciclo e composta por um problema da realidade.

2. A MODELAGEM MATEMÁTICA E A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A modelagem matemática é considerada uma tendência na Educação Matemática, no entanto, mais do que uma tendência é uma metodologia de ensino de Matemática (BURAK, 2006) que se consagrou importante no currículo brasileiro, pois pode ser explorada no contexto da resolução de problemas ou do ambiente da aprendizagem baseada em problemas (CHAN, 2010).

A modelagem matemática possui várias concepções (BURAK, 1987; BIEMBENGUT; HEIN, 2005; ARAÚJO, 2009; BASSANEZI, 2015) com seus respectivos ciclos e também suas perspectivas (KAISER; SRIRAMAN, 2006; LOZADA, 2013). Em síntese, essas concepções de modelagem a definem como uma forma de resolver problemas matemáticos e não-matemáticos oriundos da realidade ou baseados nela, utilizando a Matemática e gerando um modelo matemático. Os ciclos representam as etapas do processo de modelagem (que vão desde a interpretação do problema, até se chegar a elaboração do modelo matemático e sua validação) e as perspectivas se referem aos objetivos e aplicações da modelagem matemática, conforme explica Lozada (2013).

As perspectivas foram inicialmente enunciadas por Kaiser e Sriraman num trabalho publicado em 2006 na revista ZDM, intitulado de "A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education" no qual colocam seis perspectivas de modelagem matemática: realística (focada na resolução de problemas do mundo real), epistemológica (a Matemática a partir do ponto de vista teórico), educacional (objetiva desencadear processos de aprendizagem focando em conceitos matemáticos), sociocrítica (com foco no papel da Matemática na sociedade), contextual (visa mostrar as aplicações dos conteúdos matemáticos a partir de situações contextualizadas) e cognitiva (tem a finalidade de compreender os processos cognitivos durante a modelagem). Essas perspectivas foram expandidas conforme explica Lozada (2013) por meio de um estudo publicado em 2007 no ICTMA (The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications Newsletter) e num trabalho de Blomhoj publicado em 2009:

> Os pesquisadores da comunidade de MM revisaram as perspectivas de MM, dando ênfase às teorias as quais as perspectivas estavam atreladas e que levaram em conta os aspectos educacional, filosófico e cultural nos quais os objetivos e intenções das aplicações e desenvolvimento da MM se debruçavam. A Etnomatemática e o Método MEA (modelo provocando atividades) foram considerados nesse novo quadro de perspectivas proposto. (LOZADA, 2013, p. 147)

Assim, no quadro explicitado por Lozada (2013) foram acrescentadas as perspectivas afetiva (abordagens psicológicas), pragmática (abordagens de ensino orientadas), teórica (desenvolvimento de meta-análise de modelos e abordagens de modelagem), assim como a perspectiva baseada no MEAs (model eliciting activies) e o acréscimo do aspecto sociocultural à perspectiva sociocrítica, considerando os estudos sociológicos e etnomatemáticos.

Ao implantar a modelagem matemática genuína na sala de aula é importante que o professor adote um ciclo e uma perspectiva de modelagem matemática, de modo a organizar o trabalho pedagógico e delinear uma identidade para o processo de modelagem que estará desenvolvendo.

Cabe dizer que a maior parte das concepções de modelagem matemática tem como objeto o conhecimento matemático presente na realidade, pois como assevera Barbosa (2001, p. 07) a "Matemática é tão real quanto qualquer outro domínio da realidade, já que, sendo ideias, interfere nas ações e práticas sociais". Daí, em muitos de seus trabalhos, Barbosa (2003) optar por adotar a perspectiva sociocrítica da modelagem, uma vez que permite uma visão crítica do mundo e contribui para a formação cidadã oportunizando discussões reflexivas, pois "mais do que informar matematicamente, é preciso educar criticamente através da Matemática" porque "[...] as aplicações da Matemática estão amplamente presentes na sociedade e trazem implicações para a vida das pessoas". (BARBOSA, 2003, p. 4-6).

Aliás, a realidade sempre foi o elemento principal na concepção de modelagem matemática proposta por D´Ambrosio (1986), que é um dos precursores da modelagem matemática no Brasil, e que coloca que a partir da observação e reflexão sobre uma situação da realidade, se pode resolvê-la com a Matemática num processo analítico e crítico, e não se resumindo apenas a se chegar a um modelo matemático, mas observar os impactos desse modelo na realidade.

Por outro lado, é inquestionável que a modelagem matemática auxilia na promoção da interdisciplinaridade, pois os problemas propostos podem abarcar outras áreas do conhecimento. Por isso, no âmbito educacional, a concepção de Barbosa (2001) se coaduna com esta referência à interdisciplinaridade, pois o autor concebe a modelagem como "[...] um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade" (BARBOSA, 2001, p. 07).

Já Sriraman (2006) afirma que o modelo matemático é um produto e que modelagem é um processo de criação de um modelo físico, simbólico ou abstrato relativo a uma situação. Aqui, cabe a ressalva de que há várias formas de se representar um modelo matemático, pois como explica Biembengut (2014, p. 20) um modelo pode ser representado por meio de um "desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas", e neste artigo, optamos pela representação por meio de uma expressão algébrica com variáveis (que denominamos de modelo matemático usual) com a finalidade de se adequar à análise das questões do ENEM.

O NCTM também deu destaque à modelagem matemática. Em 2015, os membros da Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) e do Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP), com a contribuição do NCTM, se reuniram para escrever as Diretrizes para Avaliação e Instrução em Educação de Modelagem Matemática (GAIMME), um recurso para professores que desejam incorporar a prática da modelagem matemática em sala de aula. O relatório GAIMME, em sua segunda versão publicada em 2019, define a modelagem matemática como "um processo que usa Matemática para representar, analisar, fazer previsões ou fornecer informações sobre fenômenos do mundo real". (GAIMME, 2019, p. 08). E prossegue explicando que as definições de modelagem matemática procuram relacionar a modelagem com o mundo que rodeia os sujeitos, além de privilegiar alguns aspectos, como:

> Usar a linguagem da matemática para quantificar fenômenos do mundo real e analisar comportamentos; usar a matemática para explorar e desenvolver nossa compreensão dos problemas do mundo real; um processo iterativo de resolução de problemas em que a matemática é usada para investigar e desenvolver uma compreensão mais profunda. (GAIMME, 2019, p. 08).

No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), em relação aos anos finais do Fundamental, apresenta o componente curricular Matemática (da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias) dividido em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Assume-se, no Ensino Fundamental, o compromisso com o letramento matemático reafirmando o trabalho com a resolução de problemas e a modelagem, citados em documentos anteriores, ao referir-se aos processos matemáticos.

  e-ISSN 2237-9185

Nas competências específicas, a modelagem é desta forma citada com a resolução de problemas: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267).

Em que pese a modelagem matemática implicar na resolução de um problema que desencadeia um modelo matemático, há que se fazer um adendo sobre as diferenças em relação à resolução de problemas tradicional, e que aqui citamos quatro principais diferenças, segundo Erbas et al (2014) adaptado dos trabalhos de Lesh e Doerr (2003) e Lesh e Zawojewski (2007): na modelagem matemática as estratégias de solução são abertas e numerosas desenvolvidas pelos alunos de acordo com as especificações do problema, há mais de uma abordagem de solução (modelos matemáticos possíveis), o trabalho em grupo é enfatizado (interação social, troca de ideias matemáticas, etc.), além de priorizar o contexto autêntico da vida real. Já na resolução de problemas, os autores afirmam que o trabalho individual é enfatizado, que há o ensino de estratégias específicas de solução de problemas transferível para problemas semelhantes, que o problema desencadeia uma única resposta correta (desde que não seja problema aberto) e que o contexto do problema geralmente é uma situação ideal da vida real ou uma situação de vida realista.

Retornando à BNCC (BRASIL, 2018), mais adiante, ao explanar sobre o campo da Álgebra citam os modelos matemáticos atrelados ao desenvolvimento do pensamento algébrico:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2018, p. 270).

No entanto, na lista de competências específicas relativas à Álgebra não foi encontrada citação em relação à modelagem, mas há para o 7º ano, em uma de suas habilidades, menção à linguagem algébrica (variável e incógnita) que é utilizada na elaboração dos modelos matemáticos: “compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita” (BRASIL, 2018, p. 307). O texto da BNCC (BRASIL, 2018) segue com as competências relativas à resolução de problemas envolvendo equações, variação de grandezas, sistemas de equações e funções, para o 8º e 9º ano, respectivamente, sem especificar processos de modelagem.

Chegando ao Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) continua dando ênfase à resolução de problemas e coloca como pressuposto que o aluno já está letrado matematicamente e processos mais elaborados de reflexão e de abstração devem dar sustentação aos modos de pensar que permitam a formulação e resolução de problemas em contextos diversos. E para que isso se concretize “os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 529). Novamente a modelagem matemática aparece atrelada à resolução de problemas e também aos processos de investigação, ambos importantes dentro do processo de modelagem. Considerando-se algumas diferenças já apontadas sobre modelagem e resolução de problemas tradicional, podemos afirmar que a modelagem matemática é espécie e a resolução de problemas é gênero, se interseccionam, estando numa esfera maior que é a problematização. Nas competências específicas elencadas para o Ensino Médio, a construção de modelos é citada:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 531).

Essa construção de modelos matemáticos é asseverada mais adiante, relacionando-a com a resolução de problemas:

> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problemas, incluindo a construção e o e conhecimento de modelos que podem ser aplicados. (BRASIL, 2018, p. 536).

Diferentemente da organização das habilidades nos anos finais do Ensino Fundamental que estão listadas de acordo com cada unidade temática, para o Ensino Médio, as habilidades específicas estão listadas logo abaixo da competência específica. Assim, para a competência específica citada acima para o Ensino Médio, dentre as 16 habilidades relacionadas, 13 citam a resolução de problemas e uma delas faz menção à modelo matemático: "construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 536).

Contudo, infere-se que nestas 13 habilidades que se referem à resolução de problemas, elas também impliquem implicitamente em processos de modelagem e que podem se concretizar quando o professor optar por trabalhar com modelagem matemática nas aulas de Matemática. E isso se aplica às outras competências específicas que tratam de resolução de problemas relativa a outros conteúdos.

Interessante notar a recomendação da BNCC (BRASIL, 2018) sobre a construção de modelos usando tecnologias digitais, pois atualmente as tecnologias móveis são acessíveis assim como o download de aplicativos matemáticos, o que facilita a utilização de recursos mais interativos e dinâmicos de aprendizagem. Além do mais, a BNCC (BRASIL, 2018), dentre as suas 10 competências gerais, coloca a cultura digital e nela se inserem as ferramentas pedagógicas digitais auxiliares no processo ensino-aprendizagem relativos aos conteúdos dos componentes curriculares.

Essa confluência que existe entre resolução de problemas e modelagem matemática ficou bastante evidente na BNCC (BRASIL, 2018), diferentemente de outros documentos como as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) que trata a modelagem matemática de maneira particular com suas especificidades.

Como a BNCC (BRASIL, 2018) foi publicada no final de 2018, a prova do ENEM 2019 seguiu a Matriz de Referência do ENEM – Matemática e suas Tecnologias -, que se baseia em 5 eixos cognitivos, objetos de conhecimento (numéricos, algébricos, geométricos, estatística e probabilidade, algébricos/geométricos) e em 7 competências e suas respectivas habilidades. Na Matriz de Referência do ENEM, a competência pertinente à modelagem é a Competência de área 5 (modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas) e sua habilidade correspondente mais específica é a H21 (resolver situação-problema cuja

  e-ISSN 2237-9185

modelagem envolva conhecimentos algébricos). As habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2018) são mais detalhadas, enquanto as habilidades previstas na Matriz de Referência do ENEM são mais abrangentes, mas elas são bem próximas, se correlacionam, há uma confluência, portanto, a prova ENEM 2019, embora não tenha a BNCC (BRASIL, 2018) como instrumento curricular de parâmetro, não se distanciou do que ela propõe.

3. A PROVA DO ENEM 2019: A ANÁLISE DAS QUESTÕES

Procedemos a uma pesquisa qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986) realizando um levantamento das questões de Matemática do ENEM 2019 cuja resolução pudesse desencadear em um modelo matemático. O intuito era verificar a interface com as competências e habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2018) relativas à modelagem. Não foram analisadas a que tipo de perspectiva de modelagem matemática ou ciclo nos quais as questões do ENEM 2019 se enquadrariam porque dependem da efetiva aplicação em um contexto de modelagem na sala de aula. As questões foram classificadas em níveis de dificuldade sintetizados no quadro 1, havendo apenas breves apontamentos a respeito desse aspecto em algumas questões para podermos compreender as origens de possíveis erros que os alunos poderiam manifestar ao resolverem as questões.

Para qualificar as questões por níveis de dificuldade - fácil, mediano e difícil -, consideramos as articulações algébricas que o aluno teria que fazer para elaborar o modelo matemático e os conhecimentos matemáticos prévios que deveria ter para mobilizar durante a resolução, sendo: nível fácil (o modelo matemático é elaborado com articulações algébricas/aritméticas diretas presentes no enunciado e/ou extraídas através da leitura e interpretação sem passos extensos de resolução e/ou aplicações de dados em modelos matemáticos presentes no enunciado/alternativas), nível mediano (o modelo matemático é elaborado por articulações algébricas/aritméticas diretas e indiretas por meio de relações que estão implícitas e explícitas no enunciado com aparecimento de etapas na resolução) e nível difícil (o modelo matemático a ser elaborado implica em articulações algébricas/aritméticas diretas e indiretas, com mais de 2 etapas na resolução com processos extensos e relações diversas). Cabe ressaltar que a classificação do que seja uma questão fácil, mediana ou difícil de resolver, implica em subjetividade, uma vez que depende do arcabouço de conhecimentos que o aluno possui, como interpreta a questão e as articulações cognitivas que realiza.

Asseveramos que não foi encontrado no site do INEP/MEC o relatório pedagógico relativo à prova do ENEM 2019 com a descrição e análise da prova e das questões. Aliás, o último relatório que consta no site é referente aos anos de 2011 e 2012 e foi publicado em 2015. Os relatórios pedagógicos constituem importantes instrumentos para reflexão sobre o processo ensino-aprendizagem e contém subsídios para a elaboração de políticas públicas educacionais, trazendo um panorama do desempenho dos alunos, seus níveis de proficiência e o que precisa ser melhorado. Deveria haver continuidade na elaboração desses relatórios para se ter uma visão longitudinal das provas do ENEM e suas questões ao longo dos anos. O que foi possível apurar, diz respeito às notas mínima e máxima e a média geral da Prova de 2019, que foram estas em Matemática e suas Tecnologias: nota mínima 359, nota máxima 985,5 e média geral 523,1. Em comparação como o ano de 2018, a média em Matemática e suas Tecnologias teve uma queda de 12,4.

A prova de Matemática e suas Tecnologias é composta de 45 questões e tomamos como base para análise a prova de cor amarela aplicada em 2019 que foi coletada do repositório do Portal do INEP/MEC.

Das 45 questões, apenas uma delas (questão 167) não era contextualizada e trazia no enunciado um pequeno texto sobre o que é o sistema decimal seguido de uma tabela com a unidade de medida e sua equivalência, perguntando quanto que um pé equivale em polegada. É um texto semelhante àqueles que se encontram em resumos, servindo de pano de fundo para um exercício de conversão de unidades, portanto, não se configura em uma problematização.

Por sua vez, foram identificadas 25 questões contextualizadas que apresentavam contextos interdisciplinares e transversais, e dentre estas, havia aquelas que podiam ser resolvidas intuitivamente e aquelas cuja resolução envolvia a Matemática Básica, com as 4 operações e outros conteúdos como porcentagem, razão e proporção, sequências, leitura e interpretação de gráficos, média aritmética, todos estes conteúdos implicando num domínio operacional sem níveis de dificuldades grandes. Caso os alunos tenham baixo desempenho nestas questões que não são consideradas difíceis, pois abordam conteúdos básicos e podem ser resolvidas intuitivamente, inferimos que o baixo desempenho pode ser decorrente do pouco domínio destes conteúdos, defasagem ou dificuldades de leitura e interpretação de situações-problema, que muitas vezes não são trabalhadas com frequência em sala de aula, em detrimento de um volume excessivo de exercícios para fixar procedimentos de resolução.

Dentre as 25 questões contextualizadas, 8 apresentavam interdisciplinaridade, ou seja, relação com disciplinas do Ensino Médio, sendo elas: Biologia, Física, Química, Educação Física, Geografia, Artes e História. Destas 8 questões, 4 apresentavam interdisciplinaridade com 2 disciplinas simultaneamente, sendo que numa análise global, Biologia aparece em 5 questões, portanto, sendo a disciplina com maior marcador de interdisciplinaridade. As outras 17 questões eram contextualizadas, sendo que muitas delas abordavam temática transversal.

Das 25 questões contextualizadas, 19 questões implicavam em modelagem matemática, sendo que destas 19, sete apresentavam interdisciplinaridade: duas questões possuíam interdisciplinaridade simultânea, uma delas com Física e Geografia e a outra com Física e Química, duas eram interdisciplinares com Educação Física, uma com Artes, uma com Biologia e uma com Geografia, denotando a potencialidade da modelagem matemática em interconectar áreas do conhecimento.

Desse quantitativo de questões que desencadeavam um modelo matemático efetuamos uma classificação de acordo com alguns critérios pontuados no trabalho de Lozada, Ribeiro e D´Ambrosio (2015): questões com aplicação no modelo matemático contido no enunciado e/ou alternativas da questão (tipo 1), questões que exigiam a utilização de modelos matemáticos previamente conhecidos (tipo 2), questões que exigiam a elaboração de um modelo matemático (tipo 3) e questões que poderiam ser resolvidas intuitivamente utilizando Aritmética e/ou elaborando um modelo matemático (tipo 4).

A classificação mostrou-se adequada, uma vez que as questões permitem diversas formas de resolução, inclusive formas mais intuitivas, por meio de Aritmética, sem a algebrização que geralmente desencadeia um modelo matemático que denominamos de usual, descrito por uma expressão algébrica, que costumeiramente é utilizado em modelagem matemática, lembrando que há outras formas de representação dos modelos matemáticos, como já falamos anteriormente. Cabe destacar que o modelo matemático é uma representação da realidade, constitui "um sistema conceitual, descritivo, explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13). Complementando essa definição, é importante mencionar a definição de

e-ISSN 2237-9185

Biembengut (2014, p. 20) que coloca que um modelo matemático é "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real" e que "o valor do modelo vai além dos motivos de quem o modelou, mas essencialmente dos motivos que dele se servirão" (BIEMBENGUT, 2014, p. 21), asseverando as implicações desse modelo na realidade.

Por outro lado, Barbosa (2009) esclarece que os modelos matemáticos representam diferentes papéis nos discursos pedagógicos da Ciência, podendo ser vistos como justificativa, definição ou estruturante, pois o discurso pedagógico da Matemática é "transferido" para as outras áreas do conhecimento que tem suas formas típicas de apropriação, recolocação e reposicionamento, ou seja, se recorre aos conhecimentos matemáticos para se abordar outra área, ocorrendo um processo de recontextualização para interpretar essa realidade, como veremos nos modelos decorrentes das resoluções das questões do ENEM, sobretudo, aquelas que são interdisciplinares.

A seguir, analisaremos as 19 questões que ensejavam a modelagem matemática e suas resoluções, observando a numeração apresentada pela prova de cor amarela. Por limitação de páginas deste artigo, recomendamos o acesso à prova de cor amarela pelo link presente nas referências, pois não houve a possibilidade de colocar todos os enunciados das questões.

A questão 145 era contextualizada, não interdisciplinar e se enquadrava no tipo 3. Na resolução, a ideia era elaborar dois modelos matemáticos considerando-se a força de defesa (FD) e a força de ataque (FA), o nível N, a experiência de cada jogador (E) e "k", a constante de proporcionalidade. A proporcionalidade é direta para ambas as forças, sendo que a força de ataque é diretamente proporcional ao seu nível e ao quadrado de sua experiência, enquanto a força de defesa é diretamente proporcional à sua experiência e ao quadrado do seu nível. Dessa forma, temos os dois modelos e suas variáveis: $FD = k_1 . N^2 . E$; $FA = k_2 . N . E^2$.

Segundo os dados fornecidos pela questão, os jogadores iniciam o jogo no nível 1 com experiência 1 e possuem força de ataque 2 e de defesa 1. Dessa forma, após a elaboração dos modelos matemáticos da força de ataque e da força de defesa, bastava substituir os valores e calcular o resultado, a partir da diferença entre os valores da força de ataque e da força de defesa.

Levando-se em conta que modelos desse tipo são comumente desenvolvidos no 7º e 8º ano do Ensino Fundamental, anos nos quais se estudam as grandezas diretamente e inversamente proporcional e equações/sistemas de equações, pode se avaliar que esta questão não implica em maiores dificuldades para a elaboração dos modelos matemáticos, uma vez que se presume que o aluno tenha adquirido domínio da linguagem algébrica e assimilado o papel das variáveis, sendo importante compreender o aspecto da proporcionalidade em cada modelo e que está explícita no enunciado. No entanto, há alunos que apresentam dificuldades com a linguagem algébrica e com o estabelecimento de relações entre as variáveis para a elaboração do modelo matemático, de modo que esta questão pode ser vista pelo aluno como uma questão de nível mediano e até mesmo difícil.

A questão 146 era contextualizada, não interdisciplinar, abordava Geometria e se enquadrava no tipo 2, pois implicava em modelo matemático previamente conhecido, ou caso, o aluno dominasse os conhecimentos sobre a área da coroa do círculo e não se recordasse do modelo matemático, ele poderia deduzi-lo e também poderia desenhar para melhor visualizar as medidas. Para a resolução, seria necessário lembrar que a área da região a ser pavimentada equivale à diferença entre o círculo maior formado pela área total (área pavimentada mais a área não pavimentada) e o círculo menor da área pavimentada, ou seja, o cálculo da área que será pavimentada é dado por $A = \pi . R^2 - \pi . r^2$ ou $A = \pi (R^2 - r^2)$

Outro dado a se atentar é que o círculo menor possui diâmetro igual a 6 metros e o raio equivale à metade do diâmetro, portanto, 3 metros. O círculo maior possui diâmetro de (6 + 8) metros e seu raio 7 m. Como é um modelo matemático conhecido, basta mobilizá-lo e aplicá-lo à questão adequadamente.

A questão 149 era contextualizada, não interdisciplinar, abrangia conteúdos de Geometria (diâmetro) e proporcionalidade e pode ser classificada como tipo 4, dando a possibilidade ao aluno de resolvê-la intuitivamente, efetuando diretamente a multiplicação, sem necessidade de algebrizar a resolução por meio de um modelo matemático. Caso o aluno optasse por elaborá-lo, o modelo deveria considerar que as grandezas são inversamente proporcionais, sendo "d" o diâmetro e o avanço representando por "a". Assim, teremos: $d_1.a_1 = d_2.\ a_2$.

Por sua vez, a questão 151 era semelhante à questão 146, contextualizada, não interdisciplinar, abordava Geometria e se enquadrava no tipo 2, pois implicava em modelo matemático previamente conhecido. O aluno poderia desmembrar a figura fornecida na questão em duas (semi-círculo e retângulo) e efetuar os cálculos separados com os modelos matemáticos conhecidos e processá-los conjuntamente ao final, ou fazer a junção dos modelos e chegar num modelo único, como este: $S = 10\ (\pi .\ r^2 + x.d)/2$

A questão 152 era contextualizada, não interdisciplinar, abrangia conhecimentos de Geometria (volume) e abria a possibilidade para o aluno elaborar o modelo ou resolver de forma intuitiva, sendo classificada como tipo 4. Conhecimentos de porcentagem, aproximação e conversão de medidas também são utilizados nessa questão, cujos cálculos podem ser efetuados em separado. Vejamos como ficariam os modelos matemáticos:

Figura 2 - Modelo Matemático – Questão 152

Questão 152

O rótulo da embalagem de um cosmético informa que a dissolução de seu conteúdo, de acordo com suas especificações, rende 2,7 litros desse produto pronto para o uso. Uma pessoa será submetida a um tratamento estético em que deverá tomar um banho de imersão com esse produto numa banheira com capacidade de 0,3 m^3. Para evitar o transbordamento, essa banheira será preenchida em 80% de sua capacidade.

Para esse banho, o número mínimo de embalagens desse cosmético é

A 9.
B 12.
C 89.
D 112.
E 134.

Modelos Matemáticos

Vproduto = capacidade a ser preenchida x capacidade da banheira => *Modelo* => Vp = cp x cb
Número mínimo de embalagens = Volume do produto /rendimento de cada embalagem => *Modelo* => Nm = Vp/Re

Vp = cp x cb
Vp = 80/100 x 0,3 = 0,24 m³ . 1000 = 240 litros

Nm = Vp/Re
Nm = 240/2,7 = 88,8 = 89 embalagens

Fonte: Elaborado pelas autoras

Na questão 154, a contextualização versava sobre a venda de um produto, portanto, abordava conteúdo de Matemática Financeira (juros compostos). Era não interdisciplinar e o aluno podia elaborar o modelo ou resolvê-la de forma intuitiva, fazendo as operações intermediárias, sendo classificada como tipo 4. Na resolução é preciso observar que o primeiro pagamento foi feito um mês após a compra, portanto é de 1% a mais do que o valor (x) do primeiro pagamento. Desse modo, podemos obter o seguinte modelo matemático: x + (1 + 1/100) = 202. Com esse modelo descobrimos o valor do primeiro pagamento e partimos para descobrir o valor do segundo pagamento (que podemos representar por y). Como o segundo pagamento foi feito 2 meses após a compra, ele sofreu um acréscimo de 2 vezes os juros compostos de 1%, desencadeando o seguinte modelo matemático: y . (1 + 1/100) . (1+1/100) = 204,02 ou y . $(1,01)^2$ = 204,02. Ao final, somando-se os valores de x e y, chegava-se ao valor à vista, correspondente à 400 reais.

A questão 156 seguia a classificação tipo 4, e como a maioria das questões desse quantitativo que ensejava a modelagem, era contextualizada e não interdisciplinar. Envolvia o conteúdo de grandezas inversamente proporcionais, portanto, conteúdo de Matemática do Ensino Fundamental. É preciso atentar para o dado presente no enunciado que diz que o valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital, pois a partir disso serão definidas as proporcionalidades. O aluno poderia elaborar dois modelos: um deles, único, que levará ao resultado final ou outro que dependerá de uma operação complementar para se chegar ao resultado final. Vejamos:

Figura 3 - Modelo Matemático – Questão 156

Modelo único: aqui são definidos por x, y, z os valores pagos para as empresas que cadastraram as máquinas de 2, 3 e 5 anos, respectivamente, considerando que o total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31 000,00 e que o valor a ser encontrado é para a empresa com a máquina com maior idade de uso. Assim, teremos:

$$\frac{x}{1/2}+\frac{y}{1/3}+\frac{z}{1/5}=\frac{x+y+z}{1/2+1/3+1/5}=\frac{31\,000}{31/30} => Modelo => 5z=\frac{31\,000}{31/30}$$

Fonte: Elaborado pelas autoras

Já a questão 158 era contextualizada, interdisciplinar com Geografia (abordava a Escala Richter) e com Física (frequência de onda) e trazia o modelo matemático no enunciado (tipo 1). O modelo matemático é nomeado de "fórmula" no enunciado, e pensamos que não seja a nomenclatura mais adequada, pois pode ser associada a algo "mágico", que tudo resolve, à aplicação imediata e tudo está resolvido, à ideia de "praticidade", "facilidade" para obter um resultado numérico de modo mais rápido e resolver a questão sem demorar ou ter que raciocinar muito, ter que se esforçar, ou seja, uma maneira simplista e equivocada, incorrendo à um desprezo pela análise das variáveis e seu papel no modelo matemático e no fenômeno estudado.

A resolução se resumia em aplicar os dados no modelo matemático e os conhecimentos sobre logaritmo, conteúdo do Ensino Médio, assim, não apresentava um nível elevado de dificuldade, lembrando que o aluno precisa compreender as relações entre as variáveis do modelo matemático nesse tipo de questão para não incorrer na ideia equivocada que mencionamos anteriormente de aplicação em "fórmula". A seguir, vemos o enunciado da questão que continha o modelo matemático:

e-ISSN 2237-9185

Figura 4 - Modelo Matemático – Questão 158

Questão 158

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm · Hz)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3{,}9$
Ligeiro	$4{,}0 \leq M_s \leq 4{,}9$
Moderado	$5{,}0 \leq M_s \leq 5{,}9$
Grande	$6{,}0 \leq M_s \leq 9{,}9$
Extremo	$M_s \geq 10{,}0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3{,}30 + \log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para log 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

- **A** Pequeno.
- **B** Ligeiro.
- **C** Moderado.
- **D** Grande.
- **E** Extremo.

Fonte: ENEM (INEP, 2019)

A questão 162 consistia em escala e conversão de unidades, era contextualizada, interdisciplinar com Artes (escala de maquetes) e do tipo 4. O aluno podia resolver por partes, efetuando as operações e conversões, sem modelar algebricamente. Caso o aluno fosse elaborar o modelo matemático do volume do reservatório, seria bem simples, como este que apresentamos a seguir, lembrando que o volume deve ser convertido em litros:

Figura 5 - Modelo Matemático – Questão 162

Questão 162

Comum em lançamentos de empreendimentos imobiliários, as maquetes de condomínios funcionam como uma ótima ferramenta de marketing para as construtoras, pois, além de encantar clientes, auxiliam de maneira significativa os corretores na negociação e venda de imóveis.

Um condomínio está sendo lançado em um novo bairro de uma cidade. Na maquete projetada pela construtora, em escala de 1 : 200, existe um reservatório de água com capacidade de 45 cm^3.

Quando todas as famílias estiverem residindo no condomínio, a estimativa é que, por dia, sejam consumidos 30 000 litros de água.

Em uma eventual falta de água, o reservatório cheio será suficiente para abastecer o condomínio por quantos dias?

- **A** 30
- **B** 15
- **C** 12
- **D** 6
- **E** 3

Modelo Matemático do Volume do Reservatório

$$\frac{45}{V} = \left(\frac{1}{200}\right)^3$$

Para calcular a quantidade de dias, basta acrescentar no modelo matemático, a divisão por 30 000 litros, obtendo 12 dias:

$$\boxed{\frac{\frac{45}{V} = \left(\frac{1}{200}\right)^3}{30000}}$$

Fonte: Elaborado pelas autoras

A questão 163, além de ser contextualizada, era do tipo 4, ou seja, o aluno poderia resolver aritmeticamente ou elaborar um modelo matemático e no caso desta questão, a resolução e interpretação do resultado teriam que vir associadas aos gráficos presentes nas alternativas das respostas, ou seja, exigia também o conhecimento de função, considerando as informações dadas pelas faixas no enunciado que correspondiam aos trechos do gráfico. Vejamos a resolução por meio da modelagem matemática. Para a faixa 1 o valor é fixo e igual a 12, o que nos fará desenvolver modelos para as faixas 2 e 3. Para a faixa 2, o modelo matemático correspondente é dado por $P = 12 + 3\ (V-6)$ observando o intervalo de $6 \leq V \leq 10$. Para a faixa 3, o modelo matemático é dado por $P = 24 + 6\ (V - 10)$ com $V \geq 10$. Analisando os dados correspondentes às faixas, chega-se ao gráfico da alternativa A. Não é uma questão de nível difícil, pois os conteúdos são de Ensino Fundamental e Médio, mas exigem que habilidades de leitura e interpretação tenham sido desenvolvidas adequadamente, podendo então, ser considerada de nível fácil ou mediano.

Na questão 165, a interdisciplinaridade estava com Educação Física, e enquadrava-se na tipologia 4. Caso, optasse por elaborar um modelo matemático, o aluno deveria observar que o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior. Desse modo, considerando-se a soma das alturas dos 20 jogadores, teremos o seguinte modelo matemático correspondente à média de altura:

Figura 6 - Modelo Matemático – Questão 165

Questão 165

O preparador físico de um time de basquete dispõe de um plantel de 20 jogadores, com média de altura igual a 1,80 m. No último treino antes da estreia em um campeonato, um dos jogadores desfalcou o time em razão de uma séria contusão, forçando o técnico a contratar outro jogador para recompor o grupo.

Se o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior, qual é a média de altura, em metro, do novo grupo?

A) 1,60
B) 1,78
C) 1,79
D) 1,81
E) 1,82

Modelo Matemático

$$MA = \frac{36 - h + (h - 0{,}2)}{20}$$

Fonte: Elaborado pelas autoras

A questão 168, era contextualizada e se enquadrava no tipo 1, pois trazia os modelos do IDH de 5 países, sendo interdisciplinar com Geografia. Aqui o aluno poderia por tentativa substituir valores nos modelos e comparar, portanto, era uma questão de nível fácil e com os modelos matemáticos presentes no enunciado. A questão mostrava como os modelos matemáticos representam as diferentes realidades, por isso, a modelagem matemática é uma atividade dinâmica, que mostra esse movimento dos elementos matemáticos no cotidiano e suas significações e esta questão é um bom exemplo disso.

Na questão 170, a interdisciplinaridade era com Biologia, era do tipo 1, pois continha a representação do modelo nas alternativas. Era uma questão de nível fácil, pois o enunciado apresentava os dados e o aluno deveria estabelecer as relações para se chegar na resposta relativa à concentração alcoólica

e-ISSN 2237-9185

prejudicial à saúde, dada por q/(0,08 m³)>0,4. Este é um modelo com parâmetro como medidas, ou seja, há um patamar definido pelo enunciado que é o valor sendo maior que 0,4.

Na questão 172, a interdisciplinaridade era com Educação Física, conhecimentos estatísticos como moda, média e mediana estavam explicitados no enunciado e a questão era do tipo 4. Caso o aluno desejasse modelar matematicamente a resolução, deveria considerar as modalidades esportivas e as informações relativas a elas presentes no enunciado, representando a quantidade de alunos que jogam futebol por x, a quantidade de alunos que jogarão basquete por x + 1, sendo o total de alunos da turma representado pelo modelo x + x + 1 = 2x + 1, que é um número ímpar.

A mediana que é 1,67 corresponde à altura do aluno F, assim, todos os alunos com altura inferior a essa, jogarão futebol e os demais, jogarão basquete, portanto, analisa-se com base na mediana para se chegar a resposta C, que apresentava a sequência: futebol, futebol, basquete, basquete. É uma questão de nível fácil, que poderia ser resolvida aritmeticamente/intuitivamente, considerando-se os conceitos estatísticos presentes.

Na questão 173, o modelo matemático aparecia nas alternativas da questão, portanto, aqui é um caso bastante particular, porque o aluno deveria ler atentamente o enunciado, extrair os dados e elaborar o modelo matemático, ou seja, de tipo 1, de modo que neste caso especificamente, o aluno deveria elaborar obrigatoriamente o modelo porque ele é resposta figurando nas alternativas. É uma questão que trabalha com o modelo matemático que representa uma função com variável dependente e independente. Nomeando x como a quantidade total de funcionários, temos que x -1 é a quantidade de diaristas. Cada diarista trabalha 2 dias por semana, portanto, recebe R$ 160,00 por semana trabalhada. Dessa forma, o gasto semanal da empresa será dado pelo seguinte modelo matemático:

Figura 7 - Modelo Matemático – Questão 173

Questão 173

Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

A) Y = 80X + 920.
B) Y = 80X + 1 000.
C) Y = 80X + 1 080.
D) Y = 160X + 840.
E) Y = 160X + 1 000.

Modelo Matemático

Total = (quantidade de diaristas) . (salário por diarista) + salário semanal do gerente

y = (x -1).160 + 1000 => y = 160x – 160 + 1000 =>

y = 160x + 840

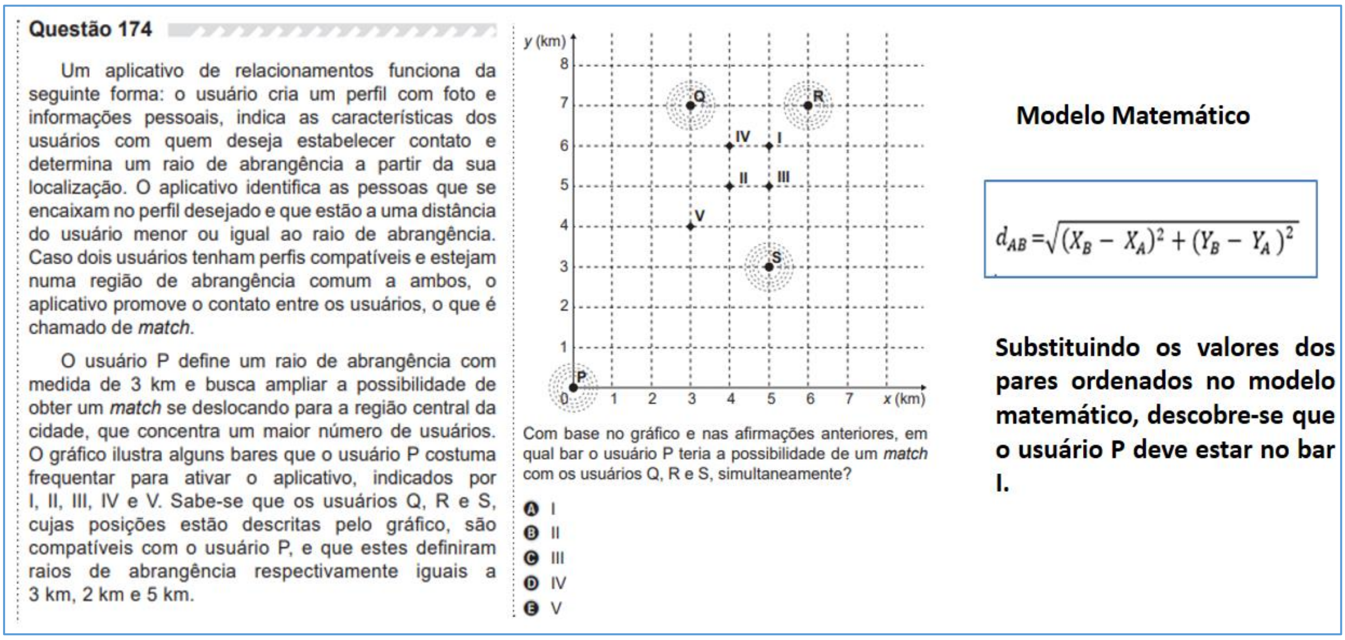
Fonte: ENEM (INEP, 2019)

A questão 173 era uma questão típica que aparece em situações-problema em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental no conteúdo de funções, então, infere-se que é um tipo de modelo com o qual o aluno já teve contato, portanto, podendo ser classificada como fácil.

  e-ISSN 2237-9185

A questão 174 dizia respeito à conteúdo de Geometria Analítica, portanto, infere-se que o aluno conheça o modelo matemático utilizado nesse tipo de situação-problema que é a distância entre dois pontos:

Figura 8 - Modelo Matemático – Questão 174



Questão 174

Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km.

Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente?

Ⓐ I
Ⓑ II
Ⓒ III
Ⓓ IV
Ⓔ V

Modelo Matemático

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Substituindo os valores dos pares ordenados no modelo matemático, descobre-se que o usuário P deve estar no bar I.

Fonte: Elaborado pelas autoras

O aluno deveria calcular as distâncias entre os usuários Q, R e S comparando com os respectivos raios, chegando-se à resposta A, excluindo-se os bares II, III, IV e V que não estão no raio de abrangência. Desse modo, se o aluno compreendeu o conteúdo de distância entre dois pontos, mesmo não tendo memorizado o seu modelo matemático, ele poderia elaborá-lo observando as informações do enunciado e o gráfico presente na questão. É uma questão do tipo 2, pois o aluno pode utilizar um modelo previamente conhecido, que é o modelo matemático da distância entre dois pontos. A questão é não interdisciplinar, mas contextualizada trazendo como cenário o uso de um aplicativo, sendo de nível fácil.

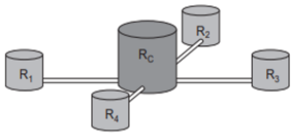
Já a questão 178, trazia conteúdo de Geometria, sendo do tipo 4, podendo o aluno resolver intuitivamente ou utilizar modelos matemáticos correspondentes ao volume dos sólidos geométricos apresentados por figuras na questão. Optando pelos modelos matemáticos conhecidos, teremos 4 modelos em separado relativos ao volume inicial, ao reservatório central, reservatórios auxiliares e canos, como vemos a seguir, lembrando que esses dados da questão 178 podem ser trabalhados em um único modelo com substituições sucessivas de dados, considerando as junções dos volumes. Por possuir muitas relações e etapas de resolução, com passos extensos e informações explícitas e implícitas, a questão 178 pode ser considerada difícil, uma vez que além do conhecimento de conteúdos de Geometria exigia conhecimentos de Grandezas e Medidas também. Vejamos os modelos matemáticos relativos à questão:

e-ISSN 2237-9185

Figura 9 - Modelo Matemático – Questão 178

Questão 178

Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_c) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1, R_2, R_3 e R_4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.



As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água.

No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.

A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

- A 1,44.
- B 1,16.
- C 1,10.
- D 1,00.
- E 0,95.

Modelos Matemáticos

Volume inicial: Vinicial = $\pi \cdot 2^2 \cdot 3{,}3 = 13{,}2\,\pi\ m^3$

Volume nos 4 canos: Vcanos = $4 \cdot \pi \cdot 0{,}05^2 \cdot 20 = 0{,}2\,\pi\ m^3$

Volume dos reservatórios auxiliares: Vauxiliares = $4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot h = 9\,h\,\pi\ m^3$

Volume do reservatório central: Vcentral= $\pi \cdot 2^2 \cdot h = = 4 \cdot \pi \cdot h\ \ m^3$

Vcentral + Vcanos + Vauxiliares = $13{,}\ 2\,\pi$

Volume dos reservatórios após os registros abertos:

$0{,}2\,\pi + 9h\,\pi + 4h\,\pi = 13{,}\ 2\,\pi$

Vres = $13{,}2\,\pi - 0{,}2\,\pi = 13\,\pi\ m^3$

$13\,h\,\pi = 13\,\pi \Rightarrow h = 1m$ ou

Considerando h a altura da água nos reservatórios após as colunas de água se igualarem, temos: $4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot h + \pi \cdot 2^2 \cdot h = 13\pi \Rightarrow 9h\pi + 4h\pi = 13h\,\pi \Rightarrow 13\,h\,\pi = 13\,\pi$, logo, h = 1,00 m.

Fonte: Elaborado pelas autoras

A penúltima questão que enseja modelagem matemática, a questão 179, envolvia noções básicas de Matemática Financeira e é do tipo 4, não apresentando interdisciplinaridade, mas sendo contextualizada. Os cálculos poderiam ser feitos separados (muitos inclusive utilizando regra de 3 simples) com o encadeamento do raciocínio ou o aluno poderia elaborar um modelo matemático como este para calcular o percentual de desconto:

Figura 10 - Modelo Matemático – Questão 179

Questão 179

Para construir uma piscina, cuja área total da superfície interna é igual a 40 m^2, uma construtora apresentou o seguinte orçamento:

- R$ 10 000,00 pela elaboração do projeto;
- R$ 40 000,00 pelos custos fixos;
- R$ 2 500,00 por metro quadrado para construção da área interna da piscina.

Após a apresentação do orçamento, essa empresa decidiu reduzir o valor de elaboração do projeto em 50%, mas recalculou o valor do metro quadrado para a construção da área interna da piscina, concluindo haver a necessidade de aumentá-lo em 25%. Além disso, a construtora pretende dar um desconto nos custos fixos, de maneira que o novo valor do orçamento seja reduzido em 10% em relação ao total inicial.

O percentual de desconto que a construtora deverá conceder nos custos fixos é de

- A 23,3%
- B 25,0%
- C 50,0%
- D 87,5%
- E 100,0%

Modelo Matemático

$$10000.(1-50\%)+40000(1-p\%)+2500.40(1+25\%)=135000$$

Fonte: Elaborado pelas autoras

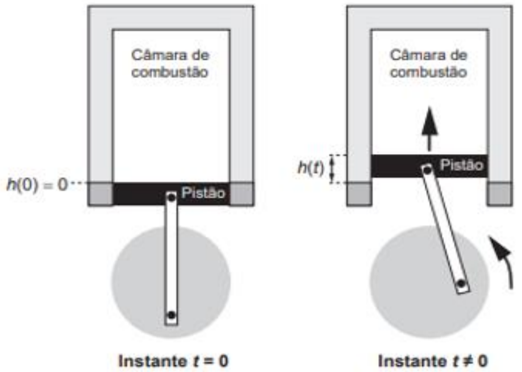
  e-ISSN 2237-9185

A última questão (questão 180) do bloco do quantitativo que enseja modelagem era uma questão interdisciplinar simultaneamente com Física (potência de um motor) e Química (combustão) e é do tipo 1, pois apresentava o modelo matemático no enunciado:

Figura 11 - Modelo Matemático – Questão 180

Questão 180

Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

A 1.
B 2.
C 4.
D 5.
E 8.

Modelo Matemático

$$h(t) = 4 + 4sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Fonte: Elaborado pelas autoras

A questão 180 envolvia uma função periódica e o aluno deveria aplicar os valores fornecidos no modelo matemático observando as restrições impostas pelo enunciado, que para que o motor tenha uma boa potência, é necessário que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante t = 0), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Não é de nível difícil, mas exigia a articulação adequada com as informações do enunciado.

Após a análise das questões, sistematizamos em um quadro as principais características identificadas como se vê a seguir, sendo NI a abreviatura de não interdisciplinar:

Quadro 1 – Características das questões que ensejam a modelagem matemática

Questão	Tipo	Interdisciplinaridade	Nível
145	3	NI	Mediano/ Difícil
146	2	NI	Fácil
149	4	NI	Fácil
151	2	NI	Fácil/Mediano
152	4	NI	Fácil/Mediano
154	4	NI	Fácil/Mediano
156	4	NI	Fácil
158	1	Geografia e Física	Fácil

e-ISSN 2237-9185

162	4	Artes	Fácil/Mediano
163	4	NI	Fácil/Mediano
165	4	Educação Física	Mediano
168	1	Geografia	Fácil
170	1	Biologia	Fácil
172	4	Educação Física	Fácil
173	1	NI	Fácil
174	2	NI	Fácil
178	4	NI	Difícil
179	4	NI	Fácil
180	1	Física e Química	Fácil
Total: 19 questões	Preponderância: do tipo 4	Interdisciplinaridade: 7 questões	Preponderância: do nível fácil

Fonte: Elaborado pelas autoras

Constatamos que o tipo preponderante de questão é o tipo 4 com 10 ocorrências, o que demonstra que dentre as questões analisadas que ensejavam a modelagem matemática, a maioria podia ser resolvida de modo intuitivo utilizando conhecimentos aritméticos e/ou elaborando um modelo matemático para se chegar à solução. Isto indica que a prova abre possibilidades para o aluno mobilizar conhecimentos aritméticos e algébricos, podendo escolher a forma de resolução em algumas questões, denotando maior flexibilidade cognitiva.

O tipo de menor ocorrência foi o 3, aquele que implica exclusivamente na elaboração de um modelo matemático para se chegar à solução, como foi no caso da questão 145 que pode ser classificada como de nível mediano ou difícil, pois o aluno precisa estabelecer corretamente as relações entre as variáveis e a proporcionalidade para elaborar os modelos matemáticos.

Em relação ao nível das questões, houve preponderância do nível fácil, em que o aluno pode elaborar o modelo matemático com articulações algébricas/aritméticas diretas ou extraídas por meio da leitura e interpretação da questão ou substituindo os dados em modelos matemáticos presentes no enunciado/alternativas. No entanto, é fundamental mencionar um outro aspecto importante acerca do nível da questão sob o ponto de vista de quem a resolve, além daqueles aspectos que já citamos anteriormente: há alunos que não possuem contato e/ou o contato com resolução de questões que implicam em problematização é menos frequente, portanto, é um fator que pode influenciar na visão que esse aluno terá da questão, vendo-a com um maior ou menor grau de dificuldade.

Em relação à interdisciplinaridade, Geografia, Física e Educação Física, foram preponderantes nos quantitativos analisados das questões que ensejavam a modelagem matemática, sinalizando a relevância de se trazer questões que conectem os diversos componentes curriculares mostrando as relações entre os conteúdos para que não apenas tragam as aplicações dos conceitos, mas também ampliem os seus significados.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na análise da prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM 2019, constatamos que as questões nas quais os alunos podem elaborar os modelos matemáticos consistem em uma modelagem de estrutura simples, com um encadeamento das variáveis propostas pelo enunciado, portanto, requerem a articulação algébrica aplicada aos conhecimentos matemáticos envolvidos na questão. É uma modelagem que deriva de situação-problema considerada pontual (que não requer um ciclo extenso, mas o tempo necessário para que a resolução da questão esteja inserida no tempo total de resolução da prova do ENEM) na qual o aluno mobiliza conhecimentos já assimilados durante o seu período escolar, sem ter um viés investigativo.

Concluímos que esse tipo de modelagem com situações-problema sem caráter investigativo e sem ciclo é uma sub-espécie da modelagem matemática genuína. Então, temos modalidades de modelagem matemática, e no caso desta relatada neste artigo que se origina de questões do ENEM, há possibilidade de explorá-la em sala de aula em tempo menor, porque consiste em situações-problema não investigativas ou o professor pode ampliar seu âmbito de problematização e inseri-las num caráter investigativo, com adaptações na dinâmica de sua aplicação e em sua abrangência:

> Assim, na aula de matemática, uma atividade de investigação poderá assumir essencialmente duas vertentes. Uma atividade investigativa de caráter aberto e fácil, em que o professor formula o problema, tendo o seu objetivo em mente e guia o aluno para a solução. Ou uma atividade investigativa de caráter aberto e difícil, em que o professor ou o aluno sugere uma situação problemática de partida e este tenta resolvê-la pelos seus próprios meios, onde os resultados poderão ser diferentes de aluno para aluno. (CORTE, 2012, p. 28-29).

É importante ressaltar que a proposição da modelagem matemática de situações-problema não se resume apenas à elaboração de um modelo matemático e à busca de resultado numérico. Mesmo não atribuindo um caráter investigativo em sua aplicação, é necessário que o professor problematize o processo e faça questionamentos acerca dos modelos matemáticos e o papel de suas variáveis, questione a validação desses modelos, interrogue os alunos acerca das implicações do uso desse modelo e sua relação com a indagação proposta no enunciado, estabeleça conexões interdisciplinares e outras que julgar relevantes para promover um debate sobre a situação-problema e seus impactos se ocorressem na realidade.

Por sua vez, em algumas questões interdisciplinares, a articulação entre o discurso pedagógico da Matemática e o discurso pedagógico da outra área do conhecimento exige a imbricação dos conceitos dessas áreas e as variáveis que são importantes para a elaboração do modelo para desencadear a solução. Neste caso, não há sobreposição de conhecimentos, mas associação conceitual e procedimental, porque os conhecimentos possuem co-dependência horizontal (o núcleo de resolução é restrito) e precisam de articulação para resultar na solução da questão. Um exemplo disso são as questões cujas alternativas já apresentam o modelo matemático, portanto, o aluno deve necessariamente elaborar um modelo matemático como resolução para identificá-lo entre as alternativas (e aqui o objeto do conhecimento preponderante é o algébrico), e aquelas questões que apresentam o modelo matemático no enunciado (sendo o objeto preponderante algébrico/numérico, ou seja, implicam em substituição numérica adequada nas variáveis do modelo algébrico). Essas questões se referem ao tipo 1.

Incluem-se também neste caso de associação conceitual e procedimental com co-dependência horizontal, as questões que exigem necessariamente a elaboração de um modelo matemático (tipo 3), cuja ênfase é no objeto matemático algébrico. Esse tipo de questão é praticamente de resolução fechada, e no quantitativo analisado foi constatada apenas uma vez, o que indica que a prova do

ENEM 2019, possui um perfil de oportunizar vários tipos de resolução, como verificado pelo maior número de questões do tipo 4.

Mas, há questões interdisciplinares que possuem essa associação, no entanto, com co-dependência conceitual e procedimental verticalizada, pois dão margem para que a resolução seja intuitiva/aritmética e não necessariamente algébrica. Esse tipo de questão disponibiliza duas opções de resolução contemplando o objeto de conhecimento algébrico e/ou numérico, e a prova do ENEM 2019 apresentou um número maior dessas questões, que classificamos de tipo 4, que possibilitam a flexibilidade cognitiva, pois os alunos podem transitar entre diferentes zonas de perfil conceitual e procedimental de resolução (LOZADA; RIBEIRO; D´AMBROSIO, 2015).

Em relação aos casos de sobreposição, estão as questões que exigem a utilização de modelos matemáticos previamente conhecidos (tipo 2), portanto, uma associação intraconceitual e procedimental, na qual os conhecimentos são articulados dentro de um repertório matemático familiar, de modo que o objeto de conhecimento preponderante no mecanismo de resolução é o algébrico. A sobreposição ocorre porque esses modelos matemáticos conhecidos previamente se destacam na resolução, pois os alunos, os mobilizam preliminarmente em relação aos demais conhecimentos que poderiam mobilizar.

Sobre as competências e habilidades previstas na Matriz de Referência do ENEM e as competências e habilidades previstas na BNCC, o que se notou nas questões analisadas é que elas se referem diretamente àquelas da matriz de referência do ENEM, que são a competência da área 5 e a habilidade H21 e globalmente relacionadas com aquelas listadas na BNCC, daí as confluências existentes.

Deste modo, percebemos que o conhecimento dos tipos de questões do ENEM e suas operacionalidades de resolução no que diz respeito à modelagem matemática, propiciam ao professor trabalhar uma gama múltipla de competências e habilidades matemáticas que extrapolam aquelas presentes nos "problemas-tipo" (que são na verdade situações-problema-tipo que geralmente constam nos conteúdos dos livros didáticos como exemplos e como são reproduzidas em listas de exercício acabam se transformando em meio de mecanização de procedimento de resolução de situações-problema, o que limita a flexibilidade cognitiva e o desenvolvimento de outras habilidades e competências).

Assim, recomenda-se que o professor apresente diferentes tipos de questões que ensejam a modelagem de situações-problema nas aulas de Matemática para que se viabilize a manifestação de diferentes zonas de perfil conceitual e procedimental por parte dos alunos, sendo também um caminho preparatório para o trabalho com a modelagem matemática genuína.

Ademais, como a prática da modelagem matemática genuína pode ser realizada por meio da proposição de um problema gerado em uma situação ou fato da realidade ou o levantamento de um problema da realidade pelos alunos, estas formas de abordagem podem trazer receio ao professor, uma vez que poderá alegar que não possui conhecimentos sólidos para gerenciar o processo de modelagem, porque os modelos matemáticos a serem elaborados pelos alunos podem se complexificar ao longo do processo, ao ponto de não conseguir verificar se estão construídos corretamente, e a esse respeito Serrazina (1999, p. 3) pontua:

> Quando os professores aprofundam o seu conhecimento e exploram novos materiais e novas tarefas de ensino, muitas vezes encontram surpresas que desafiam as suas

crenças sobre a forma como os alunos aprendem e adquirem conhecimento matemático.

Dessa forma, a propositura da modelagem matemática com situações-problema constitui um trabalho preliminar, uma atividade de pré-modelagem (LOZADA, 2021), que auxilia o professor a adquirir segurança para planejar e implantar a modelagem matemática genuína, pois esta envolve ciclo e a adoção de uma perspectiva, além de um acompanhamento longitudinal com uma avaliação formativa do processo de modelagem. Outrossim, como se constitui como pré-modelagem, o professor vai aprimorando as habilidades necessárias à aplicação do processo, como gerenciamento do ambiente de aprendizagem, mediação e do seu conhecimento matemático para o ensino, em especial o conhecimento pedagógico do conteúdo e do ensino, o conhecimento do conteúdo e dos alunos e o conhecimento especializado do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), bem como conduzindo-o à reflexão sobre as práticas docentes nas aulas de Matemática, que precisam ser dinamizadas e superar o paradigma do exercício, como coloca Skovsmose (2001).

Por fim, é importante dizer que a modelagem matemática com situações-problema não é uma novidade, pois a Matriz de Referência do ENEM já a citava na habilidade H21 (resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos), mas as pesquisas em modelagem matemática no Brasil não se concentram neste tipo de modelagem, sendo relevante que passem a figurar como objeto das pesquisas para que outras características desta modelagem sejam identificadas e de que forma podem ser exploradas para contribuir para a melhoria do processo ensino-aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

5. REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Consenso, 2012.

ARAÚJO, J. L. Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.55-68, 2009.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática:** concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos, SP. **Anais...**Santos, SP: SBEM, 2003, p. 1-13.

BARBOSA, J. C. Modelagem e modelos matemáticos na educação científica. **Alexandria**, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 4. ed. São Paulo: Contexto, 2005.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem matemática no ensino fundamental. Blumenau: Edifurb, 2014.

BURAK, D. **Modelagem matemática:** uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, Rio Claro, 1987.

BURAK, D. Modelagem Matemática: avanços, problemas e desafios. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2006, Apucarana. **Anais...** Unioeste: PR, 2006. p. 1-9.

CÂNDIDO, P. T. Comunicação em Matemática. In: DINIZ, M. I.; SMOLE, K. S. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 15-28.

CHAN, C. M. E. **Mathematical modelling in a problem-based learning setting.** Disponível em: https://singteach.nie.edu.sg/2010/07/01/issue25-mathed/. Acesso em: 29 abr. 2022.

CORTE, S. R. P. **Abordagem investigativa na aprendizagem da Matemática.** Disponível em: https://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/561/1/MestradoSaraCorte.pdf. Acesso em: 28 abr. 2022.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática.** São Paulo: Ática, 1998.

D´AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Editora da UNICAMP, 1986.

ENNIS, R. H. **Critical thinking**. USA: Prentice Hall Inc., 1996.

ERBAS, A. K. et al. Mathematical modeling in mathematics education: basic concepts and approaches. **Educational Sciences:** Theory & Practice, v.14, n. 4, p. 1621-1627, 2014.

GALVÃO, D. L. et al. **Tendências em educação matemática:** uma análise das concepções e experiências dos professores. Disponível em: http://www.sinect.com.br/2016/down.php?id=3516&q=1. Acesso em: 04 jan. 2022.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Prova de cor amarela:** ENEM 2019. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/caderno_de_questoes%20_2_dia_caderno_5_amarelo_aplicacao_regular.pdf. Acesso em: 20 nov. 2021.

KAISER, G., SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM** – The International Journal on Mathematics Education, v.38, n. 3, p. 302-310, 2006.

LESTER JR, F. K. Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. **The Mathematics Enthusiast,** v.10, n. 1, p. 245-278, 2013.

LOZADA, C. O. A importância dos projetos integradores como iniciação à modelagem matemática no ensino médio. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA MACKENZIE, 2., 2021, São Paulo, **Anais...** São Paulo: Mackenzie, 2021. p. 1- 4.

LOZADA, C.O. Alternativas de modelagem matemática aplicada ao contexto do ensino de física: a relevância do trabalho interdisciplinar entre matemática e física. In: ENCONTRO NACIONAL DE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte, **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1 – 15.

LOZADA, C. O.; E D´AMBRÓSIO, U. Considerações sobre o conceito de equação presente nos cadernos do professor e as zonas de perfil conceitual de equação. **RPEM,** Campo Mourão, PR, v.7, n.14, p. 07-38, 2018.

LOZADA, C. O. **Direito ambiental:** relações jurídicas modeladas pela matemática visando uma formação profissional crítica e cidadã dos bacharelandos em engenharia ambiental. 2013. 362 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

LOZADA, C. O.; RIBEIRO, A. J.; D´AMBROSIO, U. Mapeamento de questões de Matemática do Enem 2009 que envolvem modelagem matemática: uma análise com base em Perfis Conceituais e na Teoria da Flexibilidade Cognitiva. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2015, Ilhéus - BA. **Anais...**Ihéus: SBEM, 2015.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (MEC). **Matriz de referência do Enem.** Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 18 nov. 2021.

______. **Base nacional comum curricular.** Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 18 nov. 2021.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Guidelines for assessment and instruction in mathematical modeling education.** Reston: NCTM, 2019.

NUNES, C. B.; SANTANA, E. R. S. Resolução de problemas: um caminho para fazer e aprender matemática. **Acta Scientiae**. v.19, n.1, p. 2-19, 2017.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema, Rio Claro (SP), v.25, n.41, p.73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Espaço Pedagógico**. v.20, n.1, p. 88-104, 2013.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender.** Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf. Acesso em: 22 nov. 2021.

REDLING, J. P. **A metodologia de resolução de problemas:** concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental. 2011. 166 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, 2011.

SANTOS, C.; BATTISTI, I. K. **Caracterização do ensino de matemática na década de 60:** algumas reflexões. Disponível em: https://publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/salaoconhecimento/article/view/7695/6432. Acesso em: 10 nov. 2021.

SRIRAMAN, B. **Conceptualizing the model-eliciting perspective of mathematical problem solving.** In: BOSCH, M. (Ed.). Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4) (p. 1686-1695). Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull, 2006.

e-ISSN 2237-9185

STANIC, G. M. A; KILPATRICK, J. **Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum.** In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). The teaching and assessing of mathematical problem solving. Reston, VA: NCTM/Lawerance Erlbaum Associates, 1989. p. 1-22.

SCHOENFELD, A. H. **Learning to think mathematically:** problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. (Ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMilllan, 1992. p. 334-370.

SCHROEDER, T.L.; LESTER JR., F.K. **Developing understanding in mathematics via problem solving.** In: TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.). New directions for elementary school mathematics. p. 31-42. Reston, VA: NCTM/Lawerance Erlbaum Associates, 1989. p. 31-42.

SERRAZINA, L. Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1º ciclo. **Quadrante**, n. 9, p. 139-167, 1999.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

VIANA, S. L. S. **Metodologias ativas:** uma sequência didática sobre probabilidade com enfoque na aprendizagem baseada em problemas no ensino médio. 2020. 149 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso). Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

Submissão: 19/02/2022

Aceito: 02/05/2022