



Revista  
**Educar Mais**

## Carga puntiforme, ecuaciones de Maxwell y el significado de la corriente de desplazamiento

*Punctiform charge, Maxwell's equations and the meaning of the displacement current*

*Carga puntiforme, equações de Maxwell e o significado da corrente de deslocamento*

Paulo Cesar Facin<sup>1</sup>

### RESUMEN

Consideramos el caso de una carga puntiforme que se mueve en relación al referencial del laboratorio con velocidad constante, asumimos que los campos eléctrico y magnético dados por la transformación de Lorentz del quadri-potencial electromagnético. Tomando un límite tendiendo a cero para el volumen de la carga, mostramos que, como era esperado, esta elección para los campos cumple perfectamente las cuatro ecuaciones de Maxwell, además, para nuestra sorpresa, el término de la corriente de desplazamiento generaliza el término de densidad de corriente y resulta la ley de Ampere-Maxwell más simétrica en relación a ley de Faraday. De esta forma, pudimos percibir que la naturaleza discreta de este problema, nos provee capturar la variación del campo eléctrico con el tiempo, que es fundamental para la comprensión de la corriente de desplazamiento y la ley de Ampère-Maxwell.

**Palabras clave:** Carga puntiforme; Corriente de desplazamiento; Ecuaciones de Maxwell.

### ABSTRACT

*This paper considers the case of a punctiform charge displacement in relation to the laboratory reference in constant speed, the electric and magnetic fields given by the electromagnetic four-potential Lorentz transformation. By assuming a limit tending to zero for the charge volume, we demonstrated that, as expected, this choice for the fields respects perfectly the four Maxwell's equations. In addition, to our surprise, the displacement current term generalizes the current density term and makes the Ampere-Maxwell's law more symmetric when compared to the Faraday's law. Therefore, we could notice that the discrete nature of this problem allowed us to capture the electric field variation with time, which is fundamental for the understanding of the displacement current and the Ampere-Maxwell's law.*

**Keywords:** Punctiform charge; Displacement current; Maxwell's equations.

### RESUMO

Consideramos o caso de uma carga puntiforme se deslocando em relação ao referencial do laboratório com velocidade constante, assumimos os campos elétrico e magnético dados pela transformação de Lorentz do quadri-potencial eletromagnético. Assumindo um limite que tende a zero para o volume da carga mostramos que, como era esperado, essa escolha para os campos respeita perfeitamente as quatro equações de Maxwell, além disso, para nossa surpresa, o termo da corrente de deslocamento generaliza o termo de densidade de corrente e torna a lei de Ampere-Maxwell mais simétrica em relação a lei de Faraday. Percebemos então que a natureza discreta desse problema possibilitou capturar a variação do campo elétrico com o tempo que é fundamental para o entendimento da corrente de deslocamento e a lei de Ampère-Maxwell.

**Palavras-chave:** Carga puntiforme; Corrente de deslocamento; Equações de Maxwell.

<sup>1</sup> Licenciada en Física, Maestría en Física y Doctora en Ingeniería Mecánica. Profesor de la Universidad Estatal de Ponta Grossa (UEPG), Ponta Grossa/PR - Brasil. Correo electrónico: pcfacin@uepg.br

## 1. INTRODUÇÃO

La asignatura de “corriente de desplazamiento” es una de esas asignaturas de la disciplina de la física que estamos acostumbrados a aceptar. Los argumentos dados por J. C. Maxwell para la existencia de tal término en la ecuación de Ampère no son tan difíciles de entender y aceptar. Además, a favor de esta aceptación, la corriente de desplazamiento completa la interpretación de la luz como onda electromagnética. En muchos textos son notables las explicaciones que nos dan la condición de aceptación de los argumentos de la existencia de la corriente de desplazamiento, pero estamos un poco lejos del sentido más intuitivo de este término.

Normalmente la corriente de desplazamiento es relacionada con el caso del proceso de carga de un capacitor de placas planas y paralelas. El término propuesto por Maxwell, la corriente de desplazamiento es introducido para sanar el problema de la ley de Ampère cuando la corriente no es estacionaria, o sea, cuando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \neq 0$ , esto porque el divergente de un rotacional (del campo magnético) debe ser nulo. Así, Maxwell sugiere un nuevo término  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , o sea un término que no necesita de la presencia de corrientes en el punto en que se calcula el rotacional del campo magnético, además el nuevo termino ayuda en la conservación de la carga. Aunque los libros textos y artículos a respecto del asunto traer esta estrategia para introducción del término de corriente de desplazamiento en la ley de Ampère, es poco intuitivo a los estudiantes y de dificultad razonable, quedando como una “una piedra en el zapato” en el enseño del electromagnetismo de Maxwell. El trabajo de John Roche<sup>2</sup> es una intento de aclarar el término de la contribución de Maxwell en la ley de Ampère y trae alguna luz respecto al asunto, mostrando la dificultad histórica que muchos científicos enfrentaron en la interpretación y aceptación de este término. En el trabajo de John Roche, es más fuerte el énfasis en obtener el campo magnético entre las placas de un capacitor, es que el campo magnético sea debido a tres fuentes, el hilo que conduce la corriente que alimenta de carga las placas, las corrientes en las placas y el término de Maxwell debido la variación en el tiempo del campo eléctrico entre las placas. El autor cita el paradojo de Cullwick<sup>3</sup> que calculó el campo magnético creado por una carga puntiforme en movimiento uniforme por la ley de Biot-savart y también por el término de la corriente de desplazamiento, según John Roche el paradojo aparece cuando Cullwick suma dos valores y obtiene el doble del valor establecido para el campo magnético local, entonces Cullwick sugiere, en la tentativa de resolver el paradojo, que los dos términos no pueden ser usados juntos. Más recientemente este asunto fue tratado en el trabajo de John W. Arthur<sup>4</sup>, donde presentó y respondió a nueve cuestiones de orden más elemental sobre la corriente de desplazamiento. El autor utiliza una forma integral de la ley de Àmpere-Maxwell y demuestra que la elección de los campos coulombianos y Biot-Savart, para una carga puntiforme con velocidad uniforme, acuerdan con la ley de Ampère-Maxwell. Es demostrado en este trabajo que la ley de Biot-Savart produce un campo magnético que no satisface la ley de Ampère, resultando en que la integral de las contribuciones del campo magnético en una circunferencia dependa de la distancia de la circunferencia hasta la carga y no solamente de la corriente que la atraviesa. En este trabajo de J. W. Arthur, para que los campos elegidos respeten la ley de Ampère, se sugiere que debemos considerar que no solo la carga atraviesa el área delimitada por la circunferencia, sino también la corriente de desplazamiento la atraviesa. Sin embargo, la carga está limitada a un área de radio  $\alpha$ , y la corriente de desplazamiento está limitada al área que excluye la carga. La integral de las corrientes

---

<sup>2</sup> [ROC98]

<sup>3</sup> [CUL16]

<sup>4</sup> [ART09]

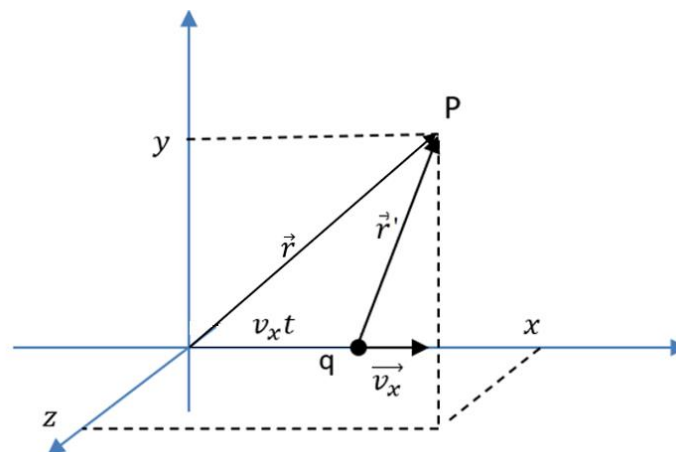
es realizada entonces en dos partes, una en los límites desde cero hasta el valor del radio de la carga “ $\alpha$ ” representando la contribución de la corriente “verdadera” y la otra  $\alpha$  a  $r$ , representando la contribución de la corriente de desplazamiento y la suma de estas dos corrientes es la que está conforme la ley de Ampere.

En nuestro trabajo utilizamos la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell y tratamos del movimiento uniforme de una carga puntiforme con velocidad relativista. Obtuvimos para el caso de velocidad no relativista, que las leyes de Coulomb y de Biot-Savart satisfacen la ley de Ampere-Maxwell, pero no satisfacen la ley de Faraday, entretanto, cuando usamos las transformaciones relativistas para los campos, también la ley de Faraday es satisfecha. Además, para nuestra sorpresa encontramos que el termino de corriente del desplazamiento generaliza el termino de densidad de corriente, o corriente de cargas!

Los campos atribuidos a una carga puntiforme son importantes debido al Principio de la Superposición, que permite el cálculo de campos más complejos, como una suma de los campos de distribuciones continuas y/o discretas de cargas puntuales.

## 2. CAMPOS DE LA CARGA PUNTIFORME

Vamos ahora analizar los campos eléctrico y magnético, en el vacío, en un punto fijo P en relación al referencial del laboratorio (sin línea) debido a presencia de una carga puntiforme q que se desplaza con velocidad  $v_x$  en relación a este punto. Alguien en el origen del referencial del laboratorio, percibe la carga distanciando en la dirección x con velocidad  $v_x$  y los campos en P localizado por el vector  $\vec{r}$ , como en la Figura 1.



**Figura 1** - Carga puntiforme q en movimiento uniforme con velocidad  $v_x$ , en relación al sistema de referencia del laboratorio. En el punto P, analizaremos las ecuaciones de Maxwell.

Un observador en el referencial de la carga observa un campo eléctrico  $\vec{E}'$  colombiano en su entorno, incluso en el punto P.

$$\vec{E}'(\vec{r}') = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \frac{q}{r'^2} \hat{r}' \quad \text{e} \quad \vec{B}'(\vec{r}') = 0 \quad , \quad (1)$$

donde la constante  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío y está relacionada a permitividad eléctrica del vacío por la velocidad de la luz en el vacío  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ .

Pero en el referencial del laboratorio este campo debe ser alternado de acuerdo con las transformaciones de Lorentz del cuadri-potencial, donde el potencial escalar es  $A^0 = \phi$ , y el vector potencial tiene las componentes  $cA^1, cA^2, cA^3$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Por esa elección del cuadri-potencial, las ecuaciones de Maxwell mantienen la misma forma en los dos referenciales, o sea, estamos imponiendo que estas ecuaciones son leyes físicas, satisfaciendo al primero postulado de Einstein de la teoría de la relatividad restringida. Así los campos en el referencial del laboratorio son obtenidos en función de los potenciales.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{c\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3)$$

Las transformaciones de Lorentz para el cuadri-potencial y los campos, pueden ser encontradas en detalle en Landau y Lifschitz<sup>5</sup>,  $\phi = \gamma\phi'$  y  $\vec{A} = \phi' \frac{\vec{v}_x}{c^2}$ . Siendo que el factor de Lorentz es  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}$  y que la carga es un invariante, tenemos:

$$\phi' = \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi r'} \quad (4)$$

$$\phi = \gamma\phi' = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \gamma \frac{q}{r'} \quad (5)$$

El observador en el referencial de carga (con línea) percibe el punto P con velocidad  $-v_x$ , y asumiendo que en el instante de tiempo  $t = 0$  la origen de los referenciales coinciden, para el punto P a la derecha de la carga ( $x - v_x t > 0$ ), tenemos:

$$x' = \gamma(x - v_x t), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (6)$$

$$r'^2 = \gamma^2(x - v_x t)^2 + (y^2 + z^2) \quad (7)$$

$$\phi = \gamma \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \frac{q}{\sqrt{\gamma^2(x - v_x t)^2 + (y^2 + z^2)}} \quad (8)$$

$$\vec{A} = \gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}_x}{\sqrt{\gamma^2(x - v_x t)^2 + (y^2 + z^2)}} \quad (9)$$

Las expresiones para el campo eléctrico y magnético en el punto P son dadas por las ecuaciones (2) y (3), o sea:

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi \gamma^2 \left[ (x - v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2 + z^2) \right]^{3/2}} \left[ (x - v_x t) \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \right], \quad (10)$$

$$\vec{B}(x, y, z; t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\vec{v}_x \times \vec{E}(x, y, z; t)}{c^2}, \quad (11)$$

$$\vec{B}(x, y, z; t) = \frac{v_x \mu_0 q}{4\pi \gamma^2 \left[ (x - v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2 + z^2) \right]^{3/2}} \left[ -z \hat{j} + y \hat{k} \right]. \quad (12)$$

<sup>5</sup> [LAN47]

## 2.1 LEY DE GAUSS

Analicemos ahora con los campos dados por las ecuaciones (10) y (12) los divergentes de estos campos en el punto P.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{3}{4} \frac{\mu_0 c^2 q (x-v_x t)^2}{\pi \gamma^2 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 c^2 q}{\pi \gamma^2 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{3/2}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{3}{4} \frac{\mu_0 c^2 q y^2}{\pi \gamma^4 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 c^2 q}{\pi \gamma^2 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{3/2}} \quad (14)$$

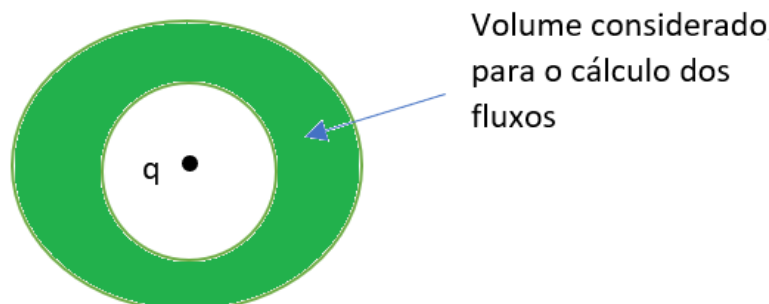
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{3}{4} \frac{\mu_0 c^2 q z^2}{\pi \gamma^4 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 c^2 q}{\pi \gamma^2 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{3/2}} \quad (15)$$

Para  $x \neq v_x t$ , el centro del campo eléctrico (carga) está fuera del volumen infinitesimal que involucra el punto P, resultando en un flujo nulo sobre la superficie que involucra este volumen, y con esto la suma de los términos dados por las ecuaciones (13), (14) y (15) resultan:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad x \neq v_x t \quad (16)$$

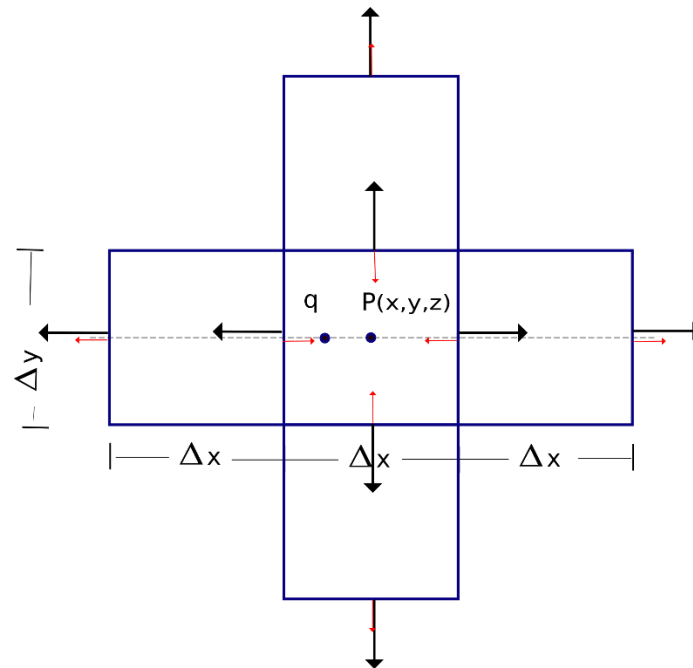
Ahora, para el límite  $x \rightarrow v_x t$  e  $y = z = 0$ , tenemos un problema de indeterminación en el campo eléctrico y consecuentemente no podremos realizar las derivadas sobre las componentes del campo de forma simple.

Para el cálculo del divergente en el punto  $x,y,z$  que incluye la carga, generalmente se calcula el flujo sobre un volumen que involucra la carga, pero que no a incluye dentro del volumen. Como una cascara esférica en caso tridimensional, o un formato de anillo para el caso bidimensional, Figura 2.



**Figura 2** -Volumen del "anillo" que es considerado para el cálculo del flujo de campo eléctrico en una descripción de la ley de Gauss de forma integral. Cuando este volumen tender a cero, obtenemos el divergente del campo.

Vamos utilizar la misma idea del "anillo", pero considerando elementos de volúmenes diferenciales. En dos dimensiones, tenemos los volúmenes de interés (que cercan el volumen que contiene el punto P) representados en la figura 3.



**Figura 3** - Elemento de volumen en dos dimensiones: esquema para el cálculo del divergente del campo eléctrico de la carga puntiforme  $q$  aproximando de la posición  $P$ . Las setas negras representan los vectores campo eléctrico y las setas rojas, los vectores normales a la superficie considerada.

La posición de la carga  $q$  es interna al elemento de volumen centrado en el punto  $P$ , pero esta afuera del volumen considerado, el flujo sobre este volumen debe ser nulo. Recordando que el flujo es positivo cuando el campo es paralelo al vector normal a la superficie y negativo cuando es antiparalelo, simplificando la notación con  $E\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = E\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ , tendremos:

$$\begin{aligned} & \left\{ E\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) + E\left(x - \frac{3\Delta x}{2}\right) + \left[-E\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - E\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \right\} \Delta y \Delta z + \\ & \left\{ E\left(y + \frac{3\Delta y}{2}\right) + E\left(y - \frac{3\Delta y}{2}\right) + \left[-E\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) - E\left(y - \frac{\Delta y}{2}\right)\right] \right\} \Delta x \Delta z + \\ & \left\{ E\left(z + \frac{3\Delta z}{2}\right) + E\left(z - \frac{3\Delta z}{2}\right) + \left[-E\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right) - E\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right)\right] \right\} \Delta y \Delta x = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

o, reescribiendo,

$$\begin{aligned} & \left[ E\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) + E\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \Delta y \Delta z + \left[ E\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) + E\left(y - \frac{\Delta y}{2}\right) \right] \Delta x \Delta z + \left[ E\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right) + E\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right) \right] \Delta y \Delta x = \\ & \left[ E\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) + E\left(x - \frac{3\Delta x}{2}\right) \right] \Delta y \Delta z + \left[ E\left(y + \frac{3\Delta y}{2}\right) + E\left(y - \frac{3\Delta y}{2}\right) \right] \Delta x \Delta z + \left[ E\left(z + \frac{3\Delta z}{2}\right) + \right. \\ & \left. E\left(z - \frac{3\Delta z}{2}\right) \right] \Delta y \Delta x. \end{aligned}$$

El término del lado izquierdo de la igualdad es el flujo sobre la superficie interna del volumen de interés:

$$\left[ E \left( x + \frac{\Delta_x}{2} \right) + E \left( x - \frac{\Delta_x}{2} \right) \right] \Delta_y \Delta_z + \left[ E \left( y + \frac{\Delta_y}{2} \right) + E \left( y - \frac{\Delta_y}{2} \right) \right] \Delta_x \Delta_z + \left[ E \left( z + \frac{\Delta_z}{2} \right) + E \left( z - \frac{\Delta_z}{2} \right) \right] \Delta_x \Delta_y \quad . \quad (18)$$

Observamos, para que la carga alcance el punto P, es necesario que el punto tenga coordenadas  $y = z = 0$  en el límite, donde  $\Delta_y \rightarrow 0$  e  $\Delta_z \rightarrow 0$  tenemos  $E \left( 0 \pm \frac{\Delta_y}{2} \right) = E \left( 0 \pm \frac{\Delta_z}{2} \right) = 0$ .

Así, solamente la componente x sobrevive cuando tomamos en cuenta la ecuación (18):

$$\frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi\gamma^2} \left\{ \frac{x-v_x t}{\left[ (x-v_x t)^2 + \Delta_x(x-v_x t) + \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\Delta_x}{2}}{\left[ (x-v_x t)^2 + \Delta_x(x-v_x t) + \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{x-v_x t}{\left[ (x-v_x t)^2 - \Delta_x(x-v_x t) + \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{\Delta_x}{2}}{\left[ (x-v_x t)^2 - \Delta_x(x-v_x t) + \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \Delta_y \Delta_z \quad . \quad (19)$$

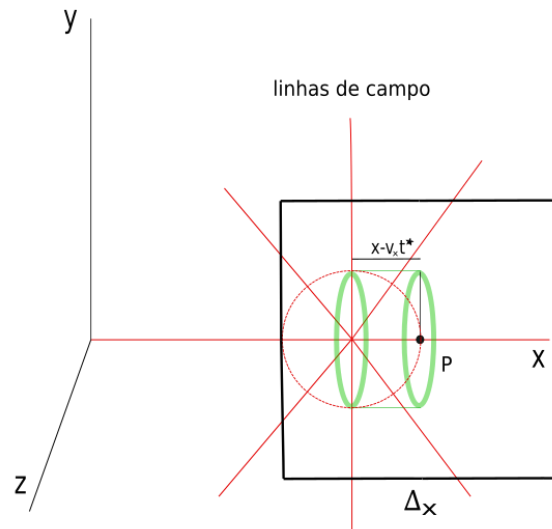
Tenemos dos términos que si suman y dos que se restan. En el que resta, es trivial y la ecuación (19) resulta:

$$\frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi\gamma^2} \left\{ \frac{2(x-v_x t)}{\left[ (x-v_x t)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \Delta_y \Delta_z \quad . \quad (20)$$

Así, el divergente del campo eléctrico es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \frac{2\mu_0 c^2 q \Delta_y \Delta_z}{4\pi\gamma^2 (x-v_x t)^2} = \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi\gamma^2 (x-v_x t)^2 \frac{\Delta_x}{2}} \quad . \quad (21)$$

Para la carga estar siempre dentro del volumen  $dv = \Delta_x \Delta_y \Delta_z$ , es preciso que la distancia entre la carga y el punto sea infinitesimal, o sea  $(x - v_x t) \propto \Delta_x$ . Considerando la superficie que limita la carga siempre en la frontera de esta distancia, entonces el centro del campo eléctrico, que es la localización de la carga, debe estar en la mitad de esta distancia que es  $\frac{\Delta_x}{4}$ , representado en la figura 4, así,  $(x - v_x t) = \frac{\Delta_x}{4}$ .



**Figura 4** - Interpretación de la carga en la ecuación (22), la distancia desde el punto P hasta al centro de la carga es  $x - v_x t^*$ . La circunferencia roja es la imagen mental que estamos acostumbrados a asumir como la región que limita la carga, podemos notar que solamente la mitad de esta circunferencia esta dentro del cilindro con altura y radio  $x - v_x t^*$ .

Con esta condición la ecuación (21) recupera la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi\gamma^2 \left(\frac{\Delta x}{4}\right)^2 \frac{\Delta x}{2}} = \frac{\mu_0 c^2 q}{\pi\gamma^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\Delta x}{2}} = \frac{\rho'}{\gamma\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad . \quad (22)$$

Donde  $\pi \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\Delta x}{2}$  es el volumen de un cilindro con base de área  $\pi \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2$  y longitud  $\frac{\Delta x}{2}$ , o sea, el volumen en el cual la carga está distribuida tiene la forma de un cilindro.

El divergente del campo magnético de la ecuación (12) es nulo para cualquier valor de  $(x, y, z)$ .

## 2.2 LEY DE AMPÈRE-MAXWELL

También con los campos dados por las ecuaciones (10) y (12) obtenemos que la ley de Ampère-Maxwell es de hecho satisfecha:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(x, y, z; t)}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \vec{B}(x, y, z; t) = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{(v_x^2 - c^2) \mu_0 q v_x c (2c^2 (v_x t - x)^2 + (y^2 + z^2)(v_x^2 - c^2))}{\pi (c^2 (v_x t - x)^2 - (y^2 + z^2)(v_x^2 - c^2))^{\frac{5}{2}}} \hat{i} \\ &+ \frac{3}{4} \frac{(v_x^2 - c^2) \mu_0 q v_x (v_x t - x) c^2}{\pi (c^2 (v_x t - x)^2 - (y^2 + z^2)(v_x^2 - c^2))^{\frac{5}{2}}} (y\hat{j} + z\hat{k}) \quad . \end{aligned} \quad (23)$$



Es importante observar que la ecuación (23) vale para cualquier valor de  $(x,y,z)$ , o sea, para cualquier punto del espacio!

## 2.3 LEY DE FARADAY

La ley de Faraday también es satisfecha por los campos elegidos, o sea, el rotacional del campo eléctrico en el punto P es igual al negativo de la variación del campo magnético en el tiempo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(x, y, z; t) = -\frac{\partial \vec{B}(x,y,z;t)}{\partial t} = \frac{3v_x^2 c^3}{4\pi} \frac{[\mu_0 q (v_x^2 - c^2)](z\hat{j} - y\hat{k})}{[c^2(v_x t - x)^2 - (y^2 + z^2)(v_x^2 - c^2)]^{\frac{5}{2}}} . \quad (24)$$

## 2.4 CASO DE LA CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO Y CORRIENTE DE CARGAS

Como la ecuación (23) es válida para cualquier punto del espacio, podemos ahora examinar lo que ocurre si el punto P este colocado sobre la trayectoria de la carga. Para  $y=z=0$  la ecuación (20) resulta:

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{q v_x}{\gamma^2 (x - v_x t)^3} \hat{i} . \quad (25)$$

Podemos ver en la ecuación (25) que el término  $\pi(x - v_x t)^3$  puede ser interpretado con el volumen de un cilindro de radio de la base igual a altura  $(x - v_x t)$ , como representado en la figura 4. Y ya que la mitad de las líneas de campo atraviesan (mitad del flujo) el cilindro de volumen  $V = \gamma^2 \pi (x - v_x t)^2 (x - v_x t) = \frac{V'}{\gamma}$ , el término  $\frac{q/2}{\gamma^2 \pi (x - v_x t)^2 (x - v_x t)}$  es, en el limite  $(x - v_x t) \rightarrow 0$ , entonces la densidad de carga  $\rho = \gamma \rho' = \frac{q/2}{\gamma^2 \pi (x - v_x t)^2 (x - v_x t)}$  en el referencial sin línea. O sea,

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \rho v_x \hat{i} = \mu_0 \vec{j} . \quad (26)$$

Entonces, cuando la carga "toca" el punto P vale la ecuación (26) y tenemos el sorprendente resultado que es: El término de corriente de desplazamiento recupera la densidad de corriente de cargas! De esta forma, el término de corriente de desplazamiento generaliza el término de corriente de cargas y la ley de Ampère-Maxwell puede ser escrita para todas las regiones del espacio como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(x, y, z; t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(x,y,z;t)}{\partial t} , \quad (29)$$

anotemos aquí la semejanza con la ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(x, y, z; t) = -\frac{\partial \vec{B}(x,y,z;t)}{\partial t} . \quad (30)$$

### 3. ANÁLISE DOS LOS RESULTADOS

Presentamos el problema de la carga puntiforme de desplazamiento con velocidad uniforme en relación a un referencial en reposo. Con las transformaciones de Lorentz del cuadri-potencial electromagnético que satisface las ecuaciones de Maxwell, obtuvimos los campos eléctrico y magnético en una posición fija en relación al referencial en reposo. Consideramos en esta tarea que las ecuaciones de Maxwell son las leyes físicas y que no cambian de forma de un referencial inercial a otro, de acuerdo al primero postulado de Einstein de la relatividad restringida. Después súbetenos estos campos las reacciones que las ecuaciones de Maxwell imponen, y encontramos como primero resultado que estos campos obedecen las ecuaciones de Maxwell, e en este camino surgirán otros resultados interesantes:

El segundo resultado a ser destacado en este trabajo es que el término de corriente de desplazamiento de la ley de Ampère-Maxwell generaliza el término de corriente de "cargas", y adjunto a esto la ley de Ampère-Maxwell guarda una simetría más cercana con la ley de Faraday

El tercero resultado dice respecto a cómo interpretar la carga eléctrica que aparece en la ley de Coulomb, o sea, el valor de la carga es un escalar asociado a intensidad del vector campo eléctrico y la localización de la carga es la localización del centro de campo eléctrico. Dar un límite para el volumen de la carga significa crear el concepto de carga, o sea, alguna cosa, además de los campos existentes dentro de una región y no existe fuera de esta región. Este concepto, o esta información, no está presente en los campos dados por las ecuaciones (10) y (12), sin embargo tuvimos que atribuir en volúmenes infinitesimal para la carga, que tiende a cero. Así siendo, en este trabajo no necesitamos pensar en la carga como una partícula que posee un volumen finito, podríamos hablar solamente en intensidad de campo eléctrico y localización del centro de campo eléctrico.

Estos resultados muestran que el término de corriente de desplazamiento, que era "raro" en la ecuación de Ampère-Maxwell, se vuelve comprensible, o sea, es un término que traduce el movimiento relativo de algún centro de campo eléctrico, entre este centro y el punto que es observado el término. Mientras que el término de densidad de corriente que era normal, o bien comprendido, fue incorporado a corriente de desplazamiento.

### 4. CONCLUSION

Sabemos que las velocidades de los portadores de carga en un hilo metálico son muy bajas ( $\sim$  cm/h), también sabemos que la ley de Ampère fue obtenida a partir de observaciones experimentales para el caso de corriente en hilos, o sea, el caso no relativístico. De hecho, no es necesario un tratamiento relativístico para recuperar la ley de Ampère-Maxwell, es suficiente asumir los campos eléctrico coulombiano y el campo magnético de Biot-Savart. Sin embargo, en este caso la ley de Faraday solo es satisfecha para la carga en reposo. Este "problema" queda resuelto se consideramos el caso relativístico aun para bajas velocidades. El movimiento de una "carga" puntiforme genera los rotacionales de campo eléctrico y magnético y también las variaciones temporales de estos campos, y estas cantidades se relaciona respectando las ecuaciones de Maxwell.

Un punto que merece comentarios es el tratamiento usual para una corriente en un hilo. En este caso consideramos una distribución continua de cargas que si mueven en la dirección del hilo, el cálculo del término de la corriente de desplazamiento, en un punto en interior de este hilo, no captura la

variación del campo eléctrico en el tiempo, ya que fue asumido no existir ninguno espacio entre una carga y otra. Así, la parcela del campo que disminuye debido las cargas que se aproximan del punto, es exactamente la misma que se repone por las cargas que se acercan al punto. En exterior del hilo el campo eléctrico colombiano, por el mismo motivo, también no varía en el tiempo. Por lo tanto, los resultados presentados en este trabajo no podrían ser alcanzados con la hipótesis de la distribución continua de cargas. Además, es asumido normalmente que el campo eléctrico es nulo en exterior del hilo, esto debido a la presencia de la misma cantidad de cargas negativas y positivas dentro del conductor, sin embargo, el campo debido a cargas positivas en una posición fija en relación al alambre, no varía con el tiempo y posee rotacional nulo, o sea, la contribución para variación temporal y también la existencia de un rotacional si debe al movimiento de las cargas negativas.

## AGRADECIMENTOS

Agradezco a los colegas que contribuyeron a este trabajo, Nagib Miguel Hazbun, Paulo Ricardo Garcia Fernandes, Gilberto Orengo de Oliveira, Sérgio Leonardo Gomez.

## 5. REFERÊNCIAS

- [ROC98] ROCHE, John. **The present status of Maxwell's displacement current.** Eur. J. Phys. 19 (1998) 155–166. Printed in the UK.
- [CUL16] CULLWICK, E. G. **The Fundamentals of Electromagnetism for Engineering Students.** Cambridge University Press, Cambridge, 1916.
- [ART09] ARTHUR, J. W. **An Elementary View of Maxwell's Displacement Current.** IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 51, No. 6, p. 58 – 68, 2009.
- [LAN47] LANDAU, L. D., LIFSCHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields,** Moscou, vol. 2, 1947, 99 p.

**Submissão: 06/06/2021**

**Aceito: 14/06/2021**