



Revista  
**Educar Mais**

## Carga puntiforme, equações de Maxwell e o significado da corrente de deslocamento

*Punctiform charge, Maxwell's equations and the meaning of the displacement current*

*Carga puntiforme, ecuaciones de Maxwell y el significado de la corriente de desplazamiento*

Paulo Cesar Facin<sup>1</sup>

### RESUMO

Consideramos o caso de uma carga puntiforme se deslocando em relação ao referencial do laboratório com velocidade constante, assumimos os campos elétrico e magnético dados pela transformação de Lorentz do quadri-potencial eletromagnético. Assumindo um limite que tende a zero para o volume da carga mostramos que, como era esperado, essa escolha para os campos respeita perfeitamente as quatro equações de Maxwell, além disso, para nossa surpresa, o termo da corrente de deslocamento generaliza o termo de densidade de corrente e torna a lei de Ampere-Maxwell mais simétrica em relação a lei de Faraday. Percebemos então que a natureza discreta desse problema possibilitou capturar a variação do campo elétrico com o tempo que é fundamental para o entendimento da corrente de deslocamento e a lei de Ampère-Maxwell.

**Palavras-chave:** Carga puntiforme; Corrente de deslocamento; Equações de Maxwell.

### ABSTRACT

*This paper considers the case of a punctiform charge displacement in relation to the laboratory reference in constant speed, the electric and magnetic fields given by the electromagnetic four-potential Lorentz transformation. By assuming a limit tending to zero for the charge volume, we demonstrated that, as expected, this choice for the fields respects perfectly the four Maxwell's equations. In addition, to our surprise, the displacement current term generalizes the current density term and makes the Ampere-Maxwell's law more symmetric when compared to the Faraday's law. Therefore, we could notice that the discrete nature of this problem allowed us to capture the electric field variation with time, which is fundamental for the understanding of the displacement current and the Ampere-Maxwell's law.*

**Keywords:** Punctiform charge; Displacement current; Maxwell's equations.

### RESUMEN

*Consideramos el caso de una carga puntiforme que se mueve en relación al referencial del laboratorio con velocidad constante, asumimos que los campos eléctrico y magnético dados por la transformación de Lorentz del quadri-potencial electromagnético. Tomando un límite tendiendo a cero para el volumen de la carga, mostramos que, como era esperado, esta elección para los campos cumple perfectamente las cuatro ecuaciones de Maxwell, además, para nuestra sorpresa, el término de la corriente de desplazamiento generaliza el término de densidad de corriente y resulta la ley de Ampere-Maxwell más simétrica en relación a ley de Faraday. De esta forma, pudimos percibir que la naturaleza discreta de este problema, nos provee capturar la variación del campo eléctrico con el tiempo, que es fundamental para la comprensión de la corriente de desplazamiento y la ley de Ampère-Maxwell.*

**Palabras clave:** Carga puntiforme; Corriente de desplazamiento; Ecuaciones de Maxwell.

<sup>1</sup> Graduado em Física, Mestre em Física e Doutor em Engenharia Mecânica. Professor da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), Ponta Grossa/PR - Brasil. E-mail: pcfacin@uepg.br.

## 1. INTRODUÇÃO

O assunto “corrente de deslocamento” é um daqueles assuntos da disciplina de física que nos acostumamos a aceitar. Os argumentos dados por J. C. Maxwell para a existência de tal termo na equação de Ampère não são tão difíceis de se entender e aceitar. Além disso, em favor dessa aceitação a corrente de deslocamento completa a interpretação da luz como onda eletromagnética. Em muitos textos é notável as explicações que nos dão a condição de aceitação dos argumentos para a existência da corrente de deslocamento, mas, estamos um pouco distantes do significado mais intuitivo desse termo. Costumeiramente a corrente de deslocamento é abordada com o caso do processo de carga de um capacitor de placas planas e paralelas. O termo proposto por Maxwell, a corrente de deslocamento, é introduzido para sanar o problema da lei de Ampère quando a corrente não é estacionária, ou seja, quando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$ , isso porque o divergente de um rotacional (do campo magnético) deve se anular. Maxwell sugere um novo termo  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , ou seja, um termo que não necessita da presença de correntes no ponto em que se calcula o rotacional do campo magnético, além disso o novo termo ajuda na conservação da carga. Apesar dos livros textos e artigos sobre o assunto trazerem essa estratégia para a introdução do termo de corrente de deslocamento na lei de Ampère, é pouco intuitivo aos estudantes e de razoável dificuldade, ficando como uma “pedra no sapato” na formação em eletromagnetismo de Maxwell. O trabalho de John Roche<sup>2</sup> é uma tentativa de esclarecer o termo da contribuição de Maxwell a lei de Ampère e traz alguma luz sobre o assunto, mostrando a dificuldade histórica que muitos cientistas enfrentaram na interpretação e aceitação desse termo. No trabalho de John Roche a ênfase é um pouco mais forte na obtenção do campo magnético entre as placas de um capacitor, é sugerido que este campo magnético seja devido a três fontes, o fio que conduz a corrente que alimenta de carga as placas, as correntes nas placas e o termo de Maxwell devido a variação no tempo do campo elétrico entre as placas. O autor cita o paradoxo de Cullwick<sup>3</sup> que calculou o campo magnético criado por uma carga puntiforme em movimento uniforme pela lei de Biot-Savart e também pelo termo da corrente de deslocamento, segundo John Roche o paradoxo aparece quando Cullwick soma os dois valores e obtém o dobro do valor estabelecido para o campo magnético local, então Cullwick sugere, na tentativa de resolver o paradoxo, que os dois termos não podem ser usados juntos. Mais recentemente esse assunto foi tratado no trabalho de John W. Arthur<sup>4</sup>, apresentando e respondendo a nove questões de ordem mais elementar sobre a corrente de deslocamento. O autor usa a forma integral da lei de Ampere-Maxwell e mostra que a escolha para os campos coulombiano e Biot-Savart, para uma carga puntiforme com velocidade uniforme, respeitam a lei de Ampere-Maxwell. É mostrado nesse trabalho que a lei de Biot-Savart produz um campo magnético que não satisfaz a lei de Ampere, fazendo com que a integral das contribuições do campo magnético sobre uma circunferência dependa da distância da circunferência até a carga e não somente da corrente que a atravessa essa circunferência. Nesse trabalho de J. W. Arthur, para os campos escolhidos respeitarem a lei de Ampere, é sugerido que temos que considerar que não só a carga atravessa a área limitada pela circunferência, mas também a corrente de deslocamento a atravessa. No entanto a carga está limitada a uma área de raio  $\alpha$ , e a corrente de deslocamento limitada a área que exclui a carga. A integral das correntes é realizada então em duas partes, uma nos limites de zero até o valor do raio da carga “ $\alpha$ ” representando a

---

<sup>2</sup> [ROC98]

<sup>3</sup> [CUL16]

<sup>4</sup> [ART09]

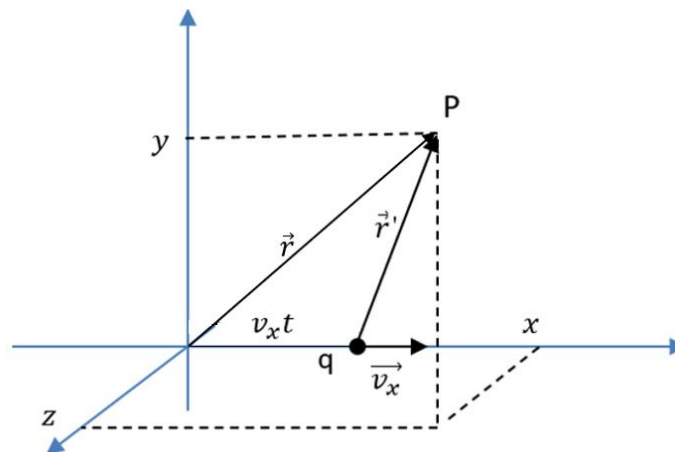
contribuição da corrente “verdadeira” e a outra de  $\alpha$  a  $r$ , representando a contribuição da corrente de deslocamento e a soma dessas duas correntes é que respeita a lei de Ampere.

Em nosso trabalho usamos a forma diferencial das equações de Maxwell e tratamos do movimento uniforme de uma carga puntiforme com velocidade relativística. Obtemos para o caso não relativístico, que as leis de Coulomb e de Biot-Savart satisfazem a lei de Ampere-Maxwell, mas não satisfazem a lei de Faraday. Entretanto, quando usamos as transformações relativísticas para os campos, também a lei de Faraday é satisfeita. Mais que isso, encontramos surpreendentemente que o termo de corrente de deslocamento generaliza o termo da densidade de corrente, ou corrente de cargas!

Os campos atribuídos a uma carga puntiforme são importantes devido ao Princípio da Superposição que permite o cálculo de campos mais complexos como uma soma dos campos de distribuições contínuas e/ou discretas de cargas puntiformes.

## 2. CAMPOS DA CARGA PUNTIFORME

Vamos agora analisar os campos elétrico e magnético, no vácuo, num ponto fixo P em relação ao referencial do laboratório (sem linha) devidos a presença de uma carga puntiforme  $q$  se deslocando com velocidade  $v_x$  em relação a esse ponto. Alguém na origem do referencial no laboratório, percebe a carga se afastando na direção  $x$  com velocidade  $v_x$ , e os campos em P localizado pelo vetor  $\vec{r}$ , como na Figura 1:



**Figura 1** - Carga puntiforme  $q$  em movimento uniforme com velocidade  $v_x$  em relação ao sistema de referência do laboratório. No ponto P analisaremos as equações de Maxwell.

Um observador no referencial da carga observa um campo elétrico  $\vec{E}'$  coulombiano ao seu redor, inclusive no ponto P:

$$\vec{E}'(\vec{r}') = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \frac{q}{r'^2} \hat{r}' \quad \text{e} \quad \vec{B}'(\vec{r}') = 0 \quad , \quad (1)$$

onde a constante  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo e está relacionada a permissividade elétrica do vácuo pela velocidade da luz no vácuo  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ .

Mas no referencial do laboratório este campo deve ser alterado de acordo com as transformações de Lorentz do quadri-potencial onde o potencial escalar é  $A^0 = \phi$ , e o potencial vetor tem as componentes  $cA^1, cA^2, cA^3$ , em que  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Para essa escolha do quadri-

potencial as equações de Maxwell mantém a mesma forma nos dois referenciais, ou seja, estamos impondo que estas equações são leis físicas, satisfazendo ao primeiro postulando de Einstein da teoria da relatividade restrita. Assim, os campos no referencial do laboratório são obtidos em função dos potenciais:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{c\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3)$$

As transformações de Lorentz para o quadri-potencial e os campos podem ser encontradas em detalhes em Landau e Lifischitz<sup>5</sup>,  $\phi = \gamma\phi'$  e  $\vec{A} = \phi' \frac{\vec{v}_x}{c^2}$ . Lembrando que o fator de Lorentz é  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}$

e que a carga é um invariante temos:

$$\phi' = \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi r'} \quad (4)$$

$$\phi = \gamma\phi' = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \gamma \frac{q}{r'} \quad (5)$$

O observador no referencial da carga (com linha) percebe o ponto P com velocidade  $-v_x$  e assumindo que no instante de tempo  $t = 0$  a origem dos referenciais coincidem, para o ponto P à direita da carga ( $x - v_x t > 0$ ) temos:

$$x' = \gamma(x - v_x t), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (6)$$

$$r'^2 = \gamma^2(x - v_x t)^2 + (y^2 + z^2) \quad (7)$$

$$\phi = \gamma \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \frac{q}{\sqrt{\gamma^2(x - v_x t)^2 + (y^2 + z^2)}} \quad (8)$$

$$\vec{A} = \gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}_x}{\sqrt{\gamma^2(x - v_x t)^2 + (y^2 + z^2)}} \quad (9)$$

As expressões para os campos elétrico e magnético no ponto P são dadas pelas equações (2) e (3), ou seja:

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi \gamma^2 \left[ (x - v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2 + z^2) \right]^{3/2}} \left[ (x - v_x t)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \right], \quad (10)$$

$$\vec{B}(x, y, z; t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\vec{v}_x \times \vec{E}(x, y, z; t)}{c^2}, \quad (11)$$

$$\vec{B}(x, y, z; t) = \frac{v_x \mu_0 q}{4\pi \gamma^2 \left[ (x - v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2 + z^2) \right]^{3/2}} \left[ -z\hat{j} + y\hat{k} \right]. \quad (12)$$

<sup>5</sup> [LAN47]

## 2.1 LEI DE GAUSS

Analisemos agora com os campos dados pelas equações (10) e (12) os divergentes destes campos no ponto P.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{3}{4} \frac{\mu_0 c^2 q (x-v_x t)^2}{\pi \gamma^2 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 c^2 q}{\pi \gamma^2 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{3/2}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{3}{4} \frac{\mu_0 c^2 q y^2}{\pi \gamma^4 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 c^2 q}{\pi \gamma^2 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{3/2}} \quad (14)$$

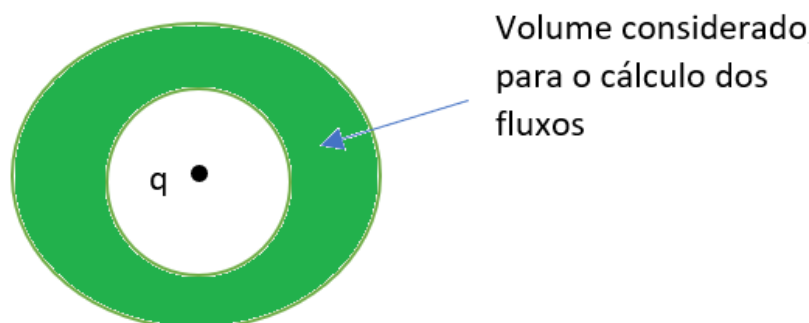
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{3}{4} \frac{\mu_0 c^2 q z^2}{\pi \gamma^4 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{5/2}} + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 c^2 q}{\pi \gamma^2 \left[ (x-v_x t)^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2+z^2) \right]^{3/2}} \quad (15)$$

Para  $x \neq v_x t$ , o centro do campo elétrico (carga) está fora do volume infinitesimal que envolve o ponto P, resultando em um fluxo nulo sobre a superfície que envolve este volume, e com isso a soma dos termos dados pelas equações (13), (14) e (15) resultam:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad x \neq v_x t \quad (16)$$

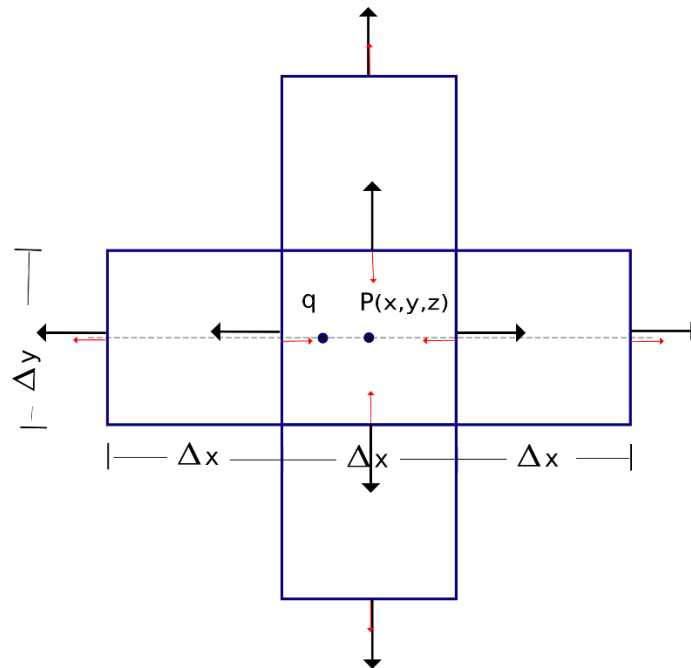
Agora, para o limite  $x \rightarrow v_x t$  e  $y = z = 0$ , temos um problema de indeterminação no campo elétrico e conseqüentemente não podemos realizar as derivadas sobre as componentes do campo de maneira simples.

Para o cálculo do divergente no ponto  $x, y, z$  que inclui a carga, geralmente calcula-se o fluxo sobre um volume que envolve a carga, mas que não inclui ela dentro do volume, como uma casca esférica no caso tridimensional, ou um biscoito em forma de anel para o bidimensional, Figura 2.



**Figura 2** - Volume do "biscoito" que é considerado para o cálculo do fluxo de campo elétrico numa descrição da lei de Gauss na forma integral. Quando esse volume tende a zero obtemos o divergente do campo.

Vamos usar a mesma ideia do “biscoito”, mas considerando elementos de volumes diferenciais. Em duas dimensões, temos os volumes de interesse (que cercam o volume que contém o ponto P) representados na figura 3.



**Figura 3** - Elemento de volume em duas dimensões: esquema para o cálculo do divergente de campo elétrico da carga pontiforme  $q$  se aproximando da posição  $P$ . As setas pretas representam os vetores campo elétrico e as setas vermelhas os vetores normais a superfície considerada.

A posição da carga  $q$  é interna ao elemento de volume central que é centrado no ponto  $P$ , mas está fora do volume considerado, e, portanto, o fluxo sobre esse volume deve ser nulo. Lembrando que o fluxo é positivo quando o campo é paralelo ao vetor normal a superfície e negativo quando é antiparalelo, simplificando a notação com  $E\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = E\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ , temos:

$$\begin{aligned} & \left\{ E\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) + E\left(x - \frac{3\Delta x}{2}\right) + \left[-E\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - E\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \right\} \Delta y \Delta z + \\ & \left\{ E\left(y + \frac{3\Delta y}{2}\right) + E\left(y - \frac{3\Delta y}{2}\right) + \left[-E\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) - E\left(y - \frac{\Delta y}{2}\right)\right] \right\} \Delta x \Delta z + \\ & \left\{ E\left(z + \frac{3\Delta z}{2}\right) + E\left(z - \frac{3\Delta z}{2}\right) + \left[-E\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right) - E\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right)\right] \right\} \Delta y \Delta x = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

ou, reescrevendo,

$$\begin{aligned} & \left[ E\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) + E\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \Delta y \Delta z + \left[ E\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) + E\left(y - \frac{\Delta y}{2}\right) \right] \Delta x \Delta z + \left[ E\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right) + E\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right) \right] \Delta y \Delta x = \\ & \left[ E\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) + E\left(x - \frac{3\Delta x}{2}\right) \right] \Delta y \Delta z + \left[ E\left(y + \frac{3\Delta y}{2}\right) + E\left(y - \frac{3\Delta y}{2}\right) \right] \Delta x \Delta z + \left[ E\left(z + \frac{3\Delta z}{2}\right) + \right. \\ & \left. E\left(z - \frac{3\Delta z}{2}\right) \right] \Delta y \Delta x . \end{aligned}$$

O termo do lado esquerdo da igualdade é o fluxo sobre a superfície interna do volume de interesse:

$$\left[ E \left( x + \frac{\Delta_x}{2} \right) + E \left( x - \frac{\Delta_x}{2} \right) \right] \Delta_y \Delta_z + \left[ E \left( y + \frac{\Delta_y}{2} \right) + E \left( y - \frac{\Delta_y}{2} \right) \right] \Delta_x \Delta_z + \left[ E \left( z + \frac{\Delta_z}{2} \right) + E \left( z - \frac{\Delta_z}{2} \right) \right] \Delta_x \Delta_y \quad (18)$$

Observamos que para a carga atingir o ponto P é necessário que o ponto tenha coordenadas  $y = z = 0$  e no limite em que  $\Delta_y \rightarrow 0$  e  $\Delta_z \rightarrow 0$  temos  $E \left( 0 \pm \frac{\Delta_y}{2} \right) = E \left( 0 \pm \frac{\Delta_z}{2} \right) = 0$ .

Então somente a componente x sobrevive na contabilização da equação (18):

$$\frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi\gamma^2} \left\{ \frac{x-v_x t}{\left[ (x-v_x t)^2 + \Delta_x(x-v_x t) + \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\Delta_x}{2}}{\left[ (x-v_x t)^2 + \Delta_x(x-v_x t) + \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{x-v_x t}{\left[ (x-v_x t)^2 - \Delta_x(x-v_x t) + \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{\Delta_x}{2}}{\left[ (x-v_x t)^2 - \Delta_x(x-v_x t) + \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \Delta_y \Delta_z \quad (19)$$

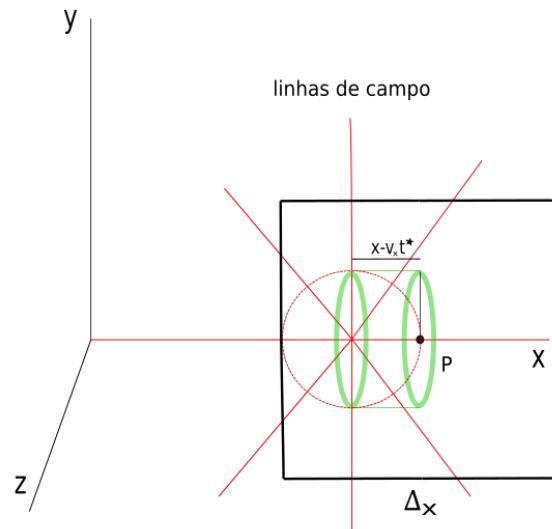
Temos dois termos que se somam e dois que se subtraem. Na subtração o limite é trivial e a equação (19) torna-se:

$$\frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi\gamma^2} \left\{ \frac{2(x-v_x t)}{\left[ (x-v_x t)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} \Delta_y \Delta_z \quad (20)$$

Então o divergente do campo elétrico fica como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\Delta_x \Delta_y \Delta_z} \frac{2\mu_0 c^2 q \Delta_y \Delta_z}{4\pi\gamma^2 (x-v_x t)^2} = \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi\gamma^2 (x-v_x t)^2 \frac{\Delta_x}{2}} \quad (21)$$

Para a carga estar sempre dentro do volume  $dv = \Delta_x \Delta_y \Delta_z$  é preciso que a distância entre a carga e o ponto seja infinitesimal, ou seja,  $(x-v_x t) \propto \Delta_x$ . Considerando a superfície que limita a carga sempre na fronteira dessa distância, então o centro do campo elétrico, que é a localização da carga, deve estar na metade dessa distância que é  $\frac{\Delta_x}{4}$ , como representado na Figura 4, assim,  $(x-v_x t) = \frac{\Delta_x}{4}$ .



**Figura 4** - Interpretação da carga na equação (22), a distância do ponto P até a o centro da carga é  $x - v_x t^*$ . A circunferência vermelha é a imagem mental que estamos acostumados a assumir como a região que limita a carga, podemos perceber que somente a metade dessa circunferência está dentro do cilindro com altura e raio  $x - v_x t^*$ .

Com essa condição a equação (21) recupera a lei de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\mu_0 c^2 q}{4\pi\gamma^2 \left(\frac{\Delta_x}{4}\right)^2 \frac{\Delta_x}{2}} = \frac{\mu_0 c^2 q}{\pi\gamma^2 \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \frac{\Delta_x}{2}} = \frac{\rho'}{\gamma \epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad . \quad (22)$$

Onde  $\pi \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2 \frac{\Delta_x}{2}$  é o volume de um cilindro de área da base  $\pi \left(\frac{\Delta_x}{2}\right)^2$  e comprimento  $\frac{\Delta_x}{2}$ , ou seja, o volume no qual a carga está distribuída tem o formato de um cilindro.

O divergente do campo magnético da equação (12) é nulo para qualquer valor de  $(x, y, z)$ .

## 2.2 LEI DE AMPÈRE-MAXWELL

Também com os campos dados pelas equações (10) e (12) obtemos que a lei de Ampère-Maxwell é de fato satisfeita:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(x, y, z; t)}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \vec{B}(x, y, z; t) = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{(v_x^2 - c^2) \mu_0 q v_x c (2c^2 (v_x t - x)^2 + (y^2 + z^2)(v_x^2 - c^2))}{\pi (c^2 (v_x t - x)^2 - (y^2 + z^2)(v_x^2 - c^2))^{\frac{5}{2}}} \hat{i} \\ &+ \frac{3}{4} \frac{(v_x^2 - c^2) \mu_0 q v_x (v_x t - x) c^2}{\pi (c^2 (v_x t - x)^2 - (y^2 + z^2)(v_x^2 - c^2))^{\frac{5}{2}}} (y \hat{j} + z \hat{k}) \quad . \end{aligned} \quad (23)$$



É importante observar que a equação (23) vale para qualquer valor de  $(x, y, z)$ , ou seja, em qualquer ponto no espaço!

## 2.2 LEI DE FARADAY

A lei de Faraday também é satisfeita pelos campos escolhidos, ou seja, o rotacional do campo elétrico no ponto P é igual ao negativo da variação do campo magnético no tempo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(x, y, z; t) = -\frac{\partial \vec{B}(x, y, z; t)}{\partial t} = \frac{3v_x^2 c^3}{4\pi} \frac{[\mu_0 q (v_x^2 - c^2)](v_x t - x)(z\hat{j} - y\hat{k})}{[c^2(v_x t - x)^2 - (y^2 + z^2)(v_x^2 - c^2)]^{5/2}} \quad (24)$$

## 2.3 CASO DA CORRENTE DE DESLOCAMENTO E CORRENTE DE CARGAS

Como a equação (23) vale para qualquer ponto no espaço, podemos agora examinar o que acontece se o ponto P for colocado sobre a trajetória da carga. Para  $y = z = 0$  a equação (20) torna-se:

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{qv_x}{\gamma^2 (x - v_x t)^3} \hat{i} \quad (25)$$

Podemos ver na equação (25) que o termo  $\pi(x - v_x t)^3$  pode ser interpretado como o volume de um cilindro de raio da base igual a altura  $(x - v_x t)$ , como representado na Figura 4. E já que a metade das linhas de campo atravessam (metade do fluxo) o cilindro de volume  $V = \gamma^2 \pi (x - v_x t)^2 (x - v_x t) = \frac{V'}{\gamma}$ , o termo  $\frac{q/2}{\gamma^2 \pi (x - v_x t)^2 (x - v_x t)}$  é, no limite  $(x - v_x t) \rightarrow 0$ , então a densidade de carga  $\rho = \gamma \rho' = \frac{q/2}{\gamma^2 \pi (x - v_x t)^2 (x - v_x t)}$  no referencial sem linha. Ou seja,

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \rho v_x \hat{i} = \mu_0 \vec{J} \quad (26)$$

Então, quando a carga "toca" o ponto P vale a equação (26) e temos o surpreendente resultado que é: O termo de corrente de deslocamento recupera a densidade de corrente de cargas! Com isso, o termo de corrente de deslocamento generaliza o termo de corrente de cargas e a lei de Ampere-Maxwell pode ser escrita para todas as regiões do espaço como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(x, y, z; t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(x, y, z; t)}{\partial t} \quad (29)$$

anotemos aqui a semelhança com a lei de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(x, y, z; t) = -\frac{\partial \vec{B}(x, y, z; t)}{\partial t} \quad (30)$$

### 3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Apresentamos o problema da carga puntiforme se deslocando com velocidade uniforme em relação a um referencial em repouso. Com as transformações de Lorentz do quadri-potencial eletromagnético que obedece às equações de Maxwell, obtivemos os campos elétrico e magnético numa posição fixa em relação ao referencial em repouso, os quais seriam medidos por um observador na origem do referencial em repouso. Consideramos nessa tarefa que as equações de Maxwell são leis físicas e que não mudam de forma de um referencial inercial para outro, como exige o primeiro postulado de Einstein da relatividade restrita. Então submetemos esses campos as relações que as equações de Maxwell impõem, e encontramos como primeiro resultado que estes campos obedecem às equações de Maxwell e nesse caminho surgiram outros resultados interessantes:

O segundo resultado a ser destacado nesse trabalho é que o termo de corrente de deslocamento da lei de Ampère-Maxwell generaliza o termo de corrente de "cargas", e atrelado a isso a lei de Ampère-Maxwell guarda uma simetria mais próxima com a lei de Faraday.

O terceiro resultado diz respeito a como interpretar a carga elétrica que aparece na lei de Coulomb, ou seja, o valor da carga é um escalar associado a intensidade do vetor campo elétrico e a localização da carga é a localização do centro do campo elétrico. Dar um limite para o volume da carga significa criar o conceito de carga, ou seja, alguma coisa além dos campos existe dentro de uma região e não existe fora dessa região. Esse conceito, ou essa informação, não está presente nos campos dados pelas equações (10) e (12), entretanto tivemos que atribuir um volume infinitesimal para a carga, que tende a zero. Sendo assim, nesse trabalho não necessitamos pensar na carga como uma partícula que possui um volume finito, poderíamos falar somente em intensidade de campo elétrico e localização do centro do campo elétrico.

Estes resultados mostram que o termo da corrente de deslocamento, que era "estranho" na equação de Ampère-Maxwell, torna-se compreensível, ou seja, é um termo que traduz o movimento relativo de algum centro de campo elétrico, entre este centro e o ponto que é observado o termo. Enquanto que o termo de densidade de corrente que era normal, ou bem compreendido, foi incorporado a corrente de deslocamento.

### 4. CONCLUSÃO

Sabemos que as velocidades dos portadores de carga num fio metálico são muito pequenas ( $\sim cm/h$ ), também sabemos que a lei de Ampère foi obtida a partir de observações experimentais para o caso de corrente em fios, ou seja, o caso não relativístico. De fato, não é necessário um tratamento relativístico para recuperar a lei de Ampere-Maxwell, basta assumirmos o campo elétrico coulombiano e o campo magnético de Biot-Savart. No entanto, nesse caso, a lei de Faraday só é satisfeita para a carga em repouso. Esse "problema" fica resolvido se admitirmos o caso relativístico mesmo para baixas velocidades. O movimento de uma "carga" puntiforme gera os rotacionais de campo elétrico e magnético e também as variações temporais desses campos, e essas quantidades se relacionam respeitando as equações de Maxwell.

Um ponto que merece comentários é o tratamento usual para uma corrente num fio. Nesse caso consideramos uma distribuição contínua de cargas que se movem na direção do fio, o cálculo do termo da corrente de deslocamento, em um ponto no interior desse fio, não captura a variação do

campo elétrico no tempo, já que foi assumido não existir nenhum espaço entre uma carga e outra. Assim, a parcela do campo que diminui devido as cargas se afastarem de um ponto P é exatamente a mesma que é repostada pelas cargas que se aproximam do ponto. Fora desse fio o campo elétrico coulombiano, pelo mesmo motivo, também não varia no tempo. Portanto, os resultados apresentados nesse trabalho não poderiam ser alcançados com a hipótese da distribuição contínua de cargas. Além disso, é assumido normalmente que o campo elétrico é nulo fora do fio, isso devido a presença do mesmo número de cargas negativas e positivas no interior do condutor, entretanto, o campo devido as cargas positivas numa posição fixa em relação ao fio, não varia com o tempo e possui rotacional nulo, ou seja, a contribuição para uma variação temporal e também a existência de um rotacional se deve ao movimento das cargas negativas.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos colegas que contribuíram com essa obra, Nagib Miguel Hazbun, Paulo Ricardo Fernandes Garcia, Gilberto Orengo de Oliveira, Sérgio Leonardo Gomez.

## 5. REFERÊNCIAS

- [ROC98] ROCHE, John. **The present status of Maxwell's displacement current**. Eur. J. Phys. 19 (1998) 155–166. Printed in the UK.
- [CUL16] CULLWICK, E. G. **The Fundamentals of Electromagnetism for Engineering Students**. Cambridge University Press, Cambridge, 1916.
- [ART09] ARTHUR, J. W. **An Elementary View of Maxwell's Displacement Current**. IEEE Antennas and Propagation Magazine, vol. 51, No. 6, p. 58 – 68, 2009.
- [LAN47] LANDAU, L. D., LIFSCHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**, Moscou, vol. 2, 1947, 99 p.

**Submissão: 06/06/2021**

**Aceito: 10/06/2021**