



Revista
Educar Mais

Uma ótica possivelmente mecânica

A possibly mechanical optics

Un enfoque posiblemente mecánico

Paulo Cesar Facin¹

RESUMO

Nesse trabalho investigamos as leis da refração/reflexão e o padrão de interferência em fenda dupla para partículas. Usamos condições de contorno que consideram a estrutura discreta e vibrante da matéria com a qual as partículas interagem, resultando num espalhamento destas que possibilita o uso dos princípios de Huygens e de Huygens-Fresnel para as partículas. Conseguimos obter resultados que generalizam a lei de Snell, lei da reflexão e o padrão de Young da fenda dupla, para regiões muito próximas da interface refratora/refletora e das fendas. A escolha feita para o potencial de espalhamento utilizado, parece servir de chave para uma explicação mecânica da luz e o padrão de Young da fenda dupla, inclusive no caso da passagem de uma partícula de cada vez pelas fendas, por isso coloca em xeque a validade do princípio da complementariedade de Niels Bohr e pode ser o elo perdido que reconecta sem hierarquias a Mecânica Clássica e a Mecânica Quântica.

Palavras-chave: Princípio de Huygens-Fresnel; refração; padrão de Young da fenda dupla; lei de Snell; princípio da complementariedade.

ABSTRACT

This paper investigates the refraction/reflection laws and the double slit interference pattern for particles. We used boundary conditions that consider the discrete and vibrant structure of the matter with which the particles interact, resulting in their scattering, enabling the use of the Huygens and Huygens-Fresnel principles for particles. We managed to obtain results that generalize Snell's law, the reflection law and Young's double slit pattern, for regions very close to the refraction/reflection interface and the slits. The choice made of the scattering used, seems to be the key for a mechanical explanation of light and Young's double slit pattern, including the case of the particles passing through the slit one at a time, therefore, it challenges the validity of the Niels Bohr's complementarity principle and might be the missing link that reconnects without hierarchies both Classical Mechanics and Quantum Mechanics.

Keywords: Huygens-Fresnel Principle; Refraction; Young's double slit pattern; Snell's law; Complementarity Principle.

¹ UEPG - Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Física, Ponta Grossa/PR - Brasil.

RESUMEN

En este trabajo investigamos las leyes de refracción / reflexión y el patrón de interferencia de doble rendija para partículas. Utilizamos condiciones de contorno que consideran la estructura discreta y vibrante de la materia con la que interactúan las partículas, lo que resulta en una dispersión de estas que permite el uso de los principios de Huygens y Huygens-Fresnel para las partículas. Pudimos obtener resultados que generalizan la ley de Snell, la ley de reflexión y el patrón de Young de la doble rendija, para regiones muy cercanas a la interfaz refractora/reflectora y las rendijas. La elección realizada por el potencial de dispersión utilizado parece servir como clave para una explicación mecánica de la luz y el patrón de Young de la doble rendija, incluso en el caso de pasar una partícula a cada vez por las rendijas, por lo que pone en jaque la validez del principio de complementariedad de Niels Bohr y puede ser el eslabón perdido que reconecta la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica sin jerarquías.

Palabras clave: Principio de Huygens-Fresnel; Refracción; Modelo joven de la doble rendija; La ley de Snell; Principio de complementariedad.

1. INTRODUÇÃO

Os fenômenos da Ótica têm sido estudados pelos físicos há vários séculos tendo como base diferentes concepções acerca da natureza da luz. O físico britânico Isaac Newton (Newton, 1643) (1643-1727), em seu *annus mirabilis* propôs que a luz seria composta por partículas. O físico e matemático holandês Christian Huygens (1629-1695), por um outro lado, imaginava a luz como sendo composta de ondas, e que colisões entre os corpúsculos do éter, semelhante as moléculas de ar, transmitiriam à sua vizinhança mudanças no meio propagando a luz. Baseando-se nestas ideias, Huygens formulou um princípio para a propagação dessas ondas conhecido atualmente como Princípio de Huygens. Por meio deste princípio, Huygens foi capaz de explicar os fenômenos de propagação da luz em linha reta, a sua reflexão e a sua refração. O físico francês Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) apresentou uma expressão matemática para o Princípio de Huygens para ondas monocromáticas usando superposição de ondas esféricas. O trabalho de Fresnel fez surgir um novo princípio chamado de Huygens-Fresnel, a partir do qual os fenômenos de interferência também foram explicados. O médico e também físico inglês Thomas Young (1773-1829), considerado por muitos como o primeiro cientista a realizar o experimento da fenda dupla, trouxe uma demanda para o entendimento da luz como onda que está até hoje enraizado na física. O padrão de interferência de fenda dupla de Thomas Young até agora só foi explicado admitindo-se a luz como uma onda. O físico britânico James Clerk Maxwell (1831-1879), ao manipular as leis do eletromagnetismo para os campos elétricos e magnéticos, percebeu que estes respeitavam uma equação de onda cuja a velocidade de propagação seria igual a velocidade da luz. Os resultados do trabalho de Maxwell possibilitaram reconhecer a luz como uma onda transversal, composta por campos elétricos e magnéticos, ou seja, uma onda eletromagnética. A partir do trabalho de Maxwell, as áreas da ótica e do eletromagnetismo passaram a estar unidas, o que possibilitou então explorar teoricamente outros fenômenos, como a polarização e a emissão da luz por cargas elétricas aceleradas. O físico alemão Max Planck (1858-1947), considerado o pai da Física Quântica, para conseguir explicar o espectro de emissão de radiação de corpo negro, sugeriu que as ondas eletromagnéticas deveriam ser quantizadas. Um conterrâneo de Planck, o físico Albert Einstein (1879-1955), baseando-se na teoria de Planck, retoma o entendimento de que a luz seria composta por partículas e propõe a existência de fótons para explicar o efeito

fotoelétrico. O fóton seria uma partícula especial cuja a energia estaria vinculada a uma característica exclusiva das ondas que seria a sua frequência. O físico dinamarquês Niels Bohr (1855-1962), ao propor o seu modelo de átomo, apresenta uma maneira de produzir os fótons, por meio de transições eletrônicas, ou seja, um elétron ao “saltar” de um orbital para outro estaria sujeito a emissão ou absorção de um fóton que teria como energia exatamente a diferença de energia entre os orbitais. Posterior aos trabalhos de Planck e Einstein, o físico francês Louis De Broglie (1892-1987) associa um comprimento de onda a quantidade de movimento de uma partícula e o fóton passa a ser uma partícula caracterizada pelos mesmos parâmetros de uma onda. Com um trabalho experimental que concordava com a teoria de De Broglie, Davison e Germer com o artigo de 1927 sobre a difração de elétrons em cristal de níquel contribuíram para o nascimento da dualidade onda-partícula e a nova conceituação da Mecânica Quântica, envolvendo físicos como Werner Heisenberg (1901-1976), Ervin Schrödinger (1887 -1961), Paul Dirac (1902-1984) entre outros. Depois de um período turbulento quanto a interpretação dos resultados experimentais, a escola de Copenhagen como é conhecida, se firmou como hegemônica e tem hoje como importante referência a visão do professor Richard Feynman (1918-1988) sobre o padrão de interferência de Thomas Young para a fenda dupla, publicados na coleção “Lectures Feynman”. Nesse texto o professor Feynman sugere um experimento mental em que uma metralhadora dispararia projéteis indestrutíveis e em direções aleatórias, sobre uma placa de metal com dois orifícios grandes o suficiente para os projéteis passarem. Então os projéteis colidem, ou não, com as paredes dos orifícios e viajam até um anteparo onde são contabilizados mostrando uma maior quantidade de projéteis concentradas em duas posições em frente aos dois orifícios. Como esse padrão não é o padrão de interferência de T. Young Feynman coloca então que:

“... é impossível, absolutamente impossível, de ser explicado por qualquer modo clássico, e que vai direto ao cerne da mecânica quântica. Na verdade, ele contém o único mistério.”

Desde então alguns trabalhos experimentais usam a afirmativa como critério para decidir se algo está se comportando como onda ou como partícula, se o padrão de interferência ocorre o comportamento é de onda, se não é de partícula. Anterior ao professor Feynman o professor Niels Bohr adicionou na dualidade onda-partícula o princípio da complementariedade, no qual os dois comportamentos não podem ser exibidos ao mesmo tempo, não sendo contraditórios, mas complementares.

Nesse trabalho investigamos os fenômenos de refração/reflexão e interferência em fenda dupla, os quais estão na base conceitual da Ótica. O fenômeno de interferência é analisado no problema da fenda dupla, no qual construímos uma alternativa à linha de raciocínio do professor Feynman, para isso usamos o princípio de Huygens e o Princípio de Huygens-Fresnel e mostramos que estes são fundamentais para a explicação dos fenômenos de reflexão/refração e interferência. Escolhemos uma linha de raciocínio nos colocando no lugar de um fóton ou elétron e então perguntamos: O que nesse caso, entenderíamos como uma fenda dupla? Diferentemente dos projéteis colidindo com paredes contínuas e lisas e ricocheteando caso as tocassem, percebemos que um fóton ou elétron perceberia a complexidade da rede de átomos que constituem o material das paredes da fenda. Muitos átomos em movimento térmico, com elétrons em movimento, resultando em campos eletromagnéticos mudando com o tempo, tudo isso nas duas paredes de uma fenda, que estão muito próximas para que a interação com as partículas incidentes, que por elas passem, seja suficientemente intensa. Além de levarmos em conta os detalhes nessa interação com as paredes da fenda, compostas por centros de espalhamentos em posições discretas, observamos a exigência também dos detalhes da organização do feixe incidente, do qual tradicionalmente é exigido pelo menos a coerência espacial,

ou seja, que as partículas incidentes estejam dispostas em planos paralelos ao plano da parede que contém as fendas, separados do outro por um mesmo comprimento, semelhante ao comprimento de onda de uma onda monocromática.

Essa linha de raciocínio nos permitiu acessar mais intuitivamente os problemas analisados, encontramos soluções matemáticas em dimensões menores do que estamos acostumados, exemplo disso é o caso da fenda dupla em que obtemos o comportamento dos feixes de partículas muito próximos das fendas, tão próximo que não vale a aproximação tradicional de dois ângulos retos num triângulo retângulo. Tudo isto valerá, para as ondas também, até onde valerem os princípios e hipóteses que seguimos. Em outro exemplo, obtivemos que o fenômeno de refração/reflexão também é descrito pelo mesmo fenômeno de interferência, gerados pela superposição das ondas esféricas criadas no espalhamento das partículas em interfaces refratoras/refletoras.

2. ASPECTOS MATEMÁTICOS - APLICAÇÕES

Nossa primeira hipótese considera que: Na imensa quantidade de átomos do material de que é feita uma interface macroscópica, mesmo milimétrica, temos uma quantidade imensa de elétrons em constante movimento. O campo eletromagnético em uma dada posição é gerado por um grande número de cargas da interface, essas cargas estão sob a influencia da natureza aleatória dos efeitos térmicos e um fóton ou elétron nessa posição deve ser espalhado em direções aleatórias, no sentido que não conhecemos o potencial espalhador que age sobre a partícula num instante de tempo.

Em seu livro intitulado "Optics" Eugene Hecht² coloca que:

"Geralmente, podemos imaginar que em um meio iluminado por um feixe comum de luz, cada átomo se comporta como se fosse uma "fonte" de um tremendo número de fótons (espalhados elasticamente ou ressonantemente) que voam em todas as direções. Um fluxo de energia como este se assemelha a uma onda esférica clássica. Assim, imaginamos um átomo (embora seja simplista fazer isso) como uma fonte pontual de ondas eletromagnéticas esféricas, desde que tenhamos em mente a advertência de Einstein de que "radiação de saída na forma de ondas esféricas não existir. Quando um material sem ressonâncias no visível é banhado em luz, ocorre dispersão não-ressonante e dá a cada átomo participante a aparência de ser uma minúscula fonte de ondas esféricas". (tradução nossa).

Apesar da advertência de Einstein para os aspectos elétricos e magnéticos da luz, podemos pensar em ondas esféricas para a localização dos fótons como sendo uma região como uma casca esférica (superfície esférica) onde a probabilidade de encontrar esses fótons é diferente de zero, ela se desloca com o tempo e com a velocidade da partícula.

A segunda hipótese, que é a invariância da energia cinética das partículas espalhadas, que já estava presente no trabalho de Davison e Germer em 1927³, mais especificamente no resumo do trabalho sobre o experimento de difração de elétrons.

"A distribuição em latitude e azimute foi determinada para esses elétrons dispersos, que perderam pouca ou nenhuma energia incidente".

² [HEC02, pág. 67]

³ [DAV27]

3. ANÁLISE DE CASOS PARTICULARES

3.1 REFRAÇÃO/REFLEXÃO

Observamos inicialmente que, como estamos usando o Princípio de Huygens-Fresnel⁴, os resultados obtidos devem recuperar aqueles conhecidos para as ondas planas, obviamente, no limite onde as ondas esféricas têm raio grande o suficiente. Entretanto enfatizamos que, devido ao caráter aleatório da localização de uma partícula, como mostrado na Figura 1, e em razão da energia cinética dessa partícula ser constante depois de ser espalhada, a nossa linha de raciocínio atribui um significado à frente de onda esférica, que é “a região de probabilidade não nula de encontrar a partícula”, uma superfície esférica se deslocando e que aumenta de raio com a mesma velocidade da partícula. No caso de muitas partículas sendo espalhadas ao mesmo tempo pelo mesmo centro, essa frente de “onda” estaria cheia de partículas e seria uma frente de onda secundária de Huygens⁵.

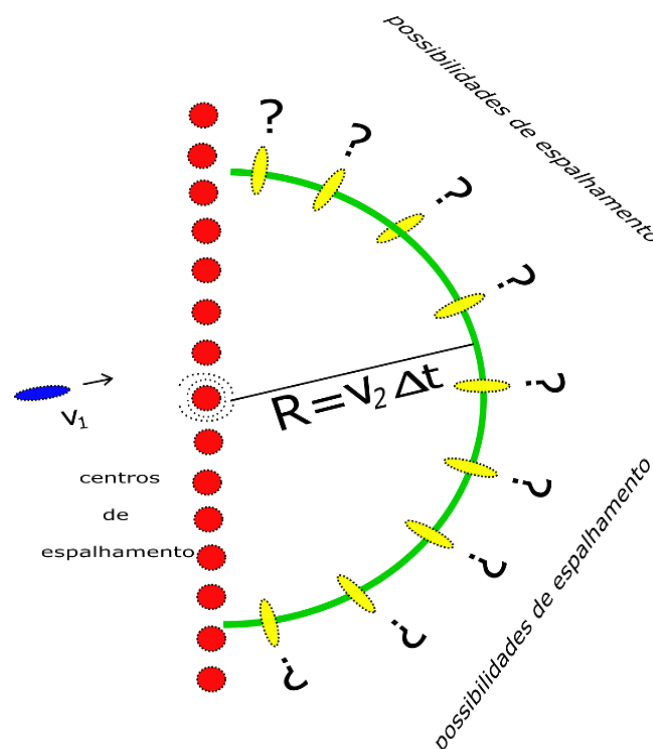


Figura 1 – Esquema para o espalhamento de uma partícula, as elipses amarelas representam algumas das possíveis localizações da partícula incidente representada pela elipse azul. Os círculos vermelhos representam os centros de espalhamento da interface, depois do intervalo de tempo Δt , a região de probabilidade diferente de zero, de encontrar a partícula é representada pela circunferência verde.

Para examinar o fenômeno de refração/reflexão vamos considerar uma frente constituída de muitas partículas dispostas num plano, essa frente se desloca na direção normal ao plano de partículas e irá incidir sobre uma interface de separação entre dois meios dielétricos, localizada sobre o eixo vertical. Cada centro de espalhamento dessa interface será responsável pelo espalhamento de um número grande de partículas ao mesmo tempo. Na Figura 2 apresentamos alguns instantes da evolução de uma única frente de partículas, ela incide sobre a interface de separação entre dois meios (1 e 2), a frente incidente é representada pela linha pontilhada vermelha que incide em ângulo de incidência com a interface. Consideramos esta frente espalhada por três centros de espalhamento distintos,

⁴ [HEC02, pág. 444]

⁵ [HUY90, pág. 22]

representados pelos círculos de cor laranja no eixo vertical. Este é um problema que pode ser resolvido em duas dimensões e as frentes “esféricas”, são circunferências no plano da página, evoluem e acabam se cruzando. Veremos que este é um dos fatos mais importantes nesse trabalho, a superposição!

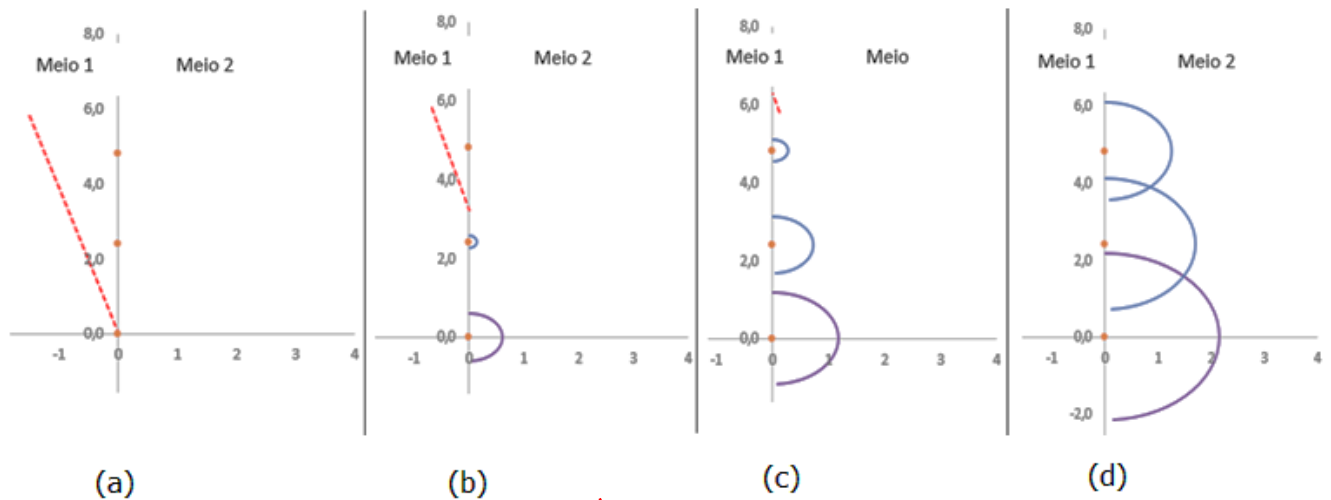


Figura 2 – Em (a) a linha vermelha pontilhada (---) se desloca para a direita, num dado ângulo com o eixo horizontal e representa uma frente de partículas. Em (b) a frente de partículas já tocou a interface, na posição do primeiro centro de espalhamento (●) na origem e um pouco depois, tocou também, o segundo centro de espalhamento no eixo vertical, também temos as duas frentes de ondas secundárias circulares correspondentes. Em (c) e (d) essas frentes de onda secundárias evoluem e em (d) elas aparecem já se cruzando.

Pelo Princípio de Huygens a frente de onda principal, resultante do espalhamento dos três centros mostrada na Figura 2-d, seria a reta tangente às três circunferências. Pelo Princípio de Huygens-Fresnel temos que, em cada ponto do espaço, contabilizar a interferência dessas três ondas e para isso, nesse trabalho, faz sentido nos preocuparmos somente com os pontos de cruzamento, já que neles temos, num único instante de tempo, o dobro da probabilidade de encontrar uma partícula e, portanto, temos nele um máximo de interferência. Nesses máximos a intensidade da probabilidade, ou seja, a probabilidade por unidade de área e por unidade de tempo, acaba sendo a probabilidade por unidade de volume, ou densidade de probabilidade.

Convém dizer que no espalhamento de uma frente com muitas partículas, por um único centro espalhador, as partículas se distribuem pelo espaço de forma radial. Mas, quando mais centros de espalhamento estão presentes, ocorrem os cruzamentos e os máximos de interferência são os agrupamentos de partículas, estes cruzamentos são a parte mais intensa do campo de partículas espalhadas, são estes máximos que observamos como feixe de partículas e são eles que definem então a direção de propagação do feixe.

Vamos agora analisar matematicamente a evolução desses máximos de interferência do lado direito da interface, para tanto necessitamos das informações da Figura 3, nela temos os três instantes de tempo que consideramos e que uma frente de partículas toca os centros de espalhamento:

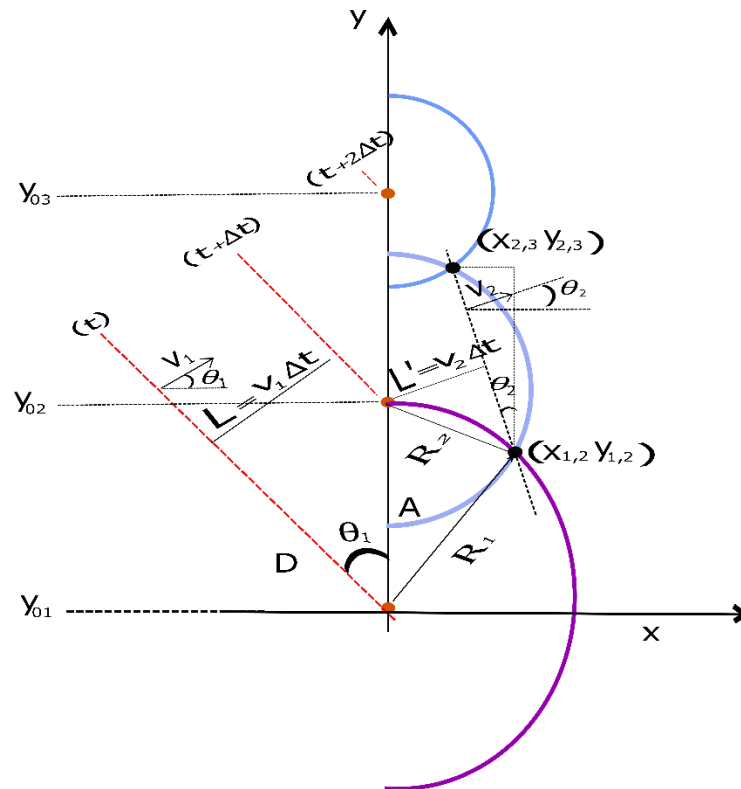


Figura 3 - Esquema que representa a formação de três regiões esféricas (em duas dimensões) e suas interseções ou máximos de interferência. O eixo y representa a interface de separação entre os dois meios (1 e 2), os círculos pretos (●) usados para o estudo dos máximos são indicados pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) .

Primeiramente vamos encontrar a posição dos máximos, temos o cruzamento de duas circunferências e estas posições são solução simultânea para duas equações das circunferências, o primeiro máximo ocorre entre a primeira circunferência de raio R_1 e a segunda de raio R_2 , o segundo máximo ocorre entre a circunferência de raio R_2 e a de raio R_3 . Para obtermos a relação entre esses raios, dados na equação (1) temos que observar que:

No lado esquerdo do eixo y (meio 1) a velocidade de propagação é indicada como v_1 e no lado direito (meio 2) como v_2 . Desta forma, num intervalo de tempo Δt a frente de onda plana, no lado esquerdo, irá se deslocar de L e a frente de onda secundária, no lado direito, irá se deslocar de L' . As circunferências coloridas representam as ondas secundárias geradas pelo contato da onda incidente com a superfície de separação dos meios. Na posição y_{01} ocorreu o primeiro contato, em y_{02} o segundo, após Δt , e em y_{03} o terceiro, após $2\Delta t$.

No intervalo Δt , a primeira onda secundária viaja uma distância R_1 , no meio 2, com velocidade de módulo v_2 . Já a segunda frente de onda plana, que dará origem a segunda onda secundária, viaja no meio 1 com velocidade de módulo v_1 , no intervalo $\Delta t_1 = \frac{L}{v_1}$, e depois no meio 2 com velocidade de módulo v_2 , no intervalo Δt_2 , impondo que $\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t$. Analisando o esquema apresentado na Figura 1 temos que todos os outros raios R_n são escritos em função de R_1 que se altera com o tempo, ou seja:

$$R_n = R_1 - \frac{(n-1)v_2L}{v_1} \quad , \quad (1)$$

onde $R_1 = v_2\Delta t$ e $n = 1, 2, \dots$ designa a onda secundária; observe que $\frac{v_2L}{v_1} = L'$.

Podemos verificar que as coordenadas (x, y) de um máximo, entre duas circunferências vizinhas n e $n + 1$, satisfazem simultaneamente a duas equações de circunferência, uma com raio R_n e outra com raio R_{n+1} .

Para o primeiro máximo as equações das circunferências que esses raios devem satisfazer ao mesmo tempo são, da primeira (de baixo),

$$x^2 + y^2 = R_1^2 \quad , \quad (2)$$

e da segunda (de cima),

$$x^2 + (y - y_{02})^2 = R_2^2 \quad . \quad (3)$$

Igualando a coordenada x , que é a mesma para ambas circunferências, obtemos a coordenada y do primeiro máximo, $y_{1,2}$:

$$y_{1,2} = \frac{R_1^2 - R_2^2 - y_{01}^2 + y_{02}^2}{2(y_{02} - y_{01})} = \frac{R_1^2 - R_2^2 + A^2}{2A} \quad , \quad (4)$$

onde, $y_{02} - y_{01} = \sqrt{L^2 + D^2} = A$.

Com isso, a equação (2) nos dá a coordenada $x_{1,2}$:

$$x_{1,2} = \sqrt{R_1^2 - (y_{1,2} - y_{01})^2} \quad (5)$$

Da mesma forma, para o segundo máximo da Figura 3, temos:

$$y_{2,3} = \frac{R_2^2 - R_3^2 - y_{02}^2 + y_{03}^2}{2A} = \frac{R_2^2 - R_3^2 + 4A^2}{2A} \quad , \quad (6)$$

$$x_{2,3} = \sqrt{R_2^2 - (y_{2,3} - y_{02})^2} \quad . \quad (7)$$

Raciocínio semelhante nos leva ao segundo par $(x_{2,3}, y_{2,3})$ e podemos generalizar esses resultados para o caso geral:

$$y_{n,n+1} = \frac{R_n^2 - R_{(n+1)}^2 - y_{0n}^2 + y_{0(n+1)}^2}{2(y_{0(n+1)} - y_{0n})} \quad , \quad (8)$$

$$x_{n,n+1} = \sqrt{R_n^2 - (y_{n,n+1} - y_{0n})^2} \quad . \quad (9)$$

Na Figura 4 é mostrado o resultado de uma simulação da evolução dos máximos de interferência em função do tempo, um par de coordenadas (x, y) para cada valor de tempo, os valores das variáveis

envolvidas foram: $v_1 = 0,4$, $v_2 = 0,3$, $\theta_1 = 12,4^\circ$, $y_{01} = 0$, $y_{02} = 2,79$, $y_{03} = 5,59$, $L = 0,6$, $A = 1,97$, $\Delta t = 0,1$.

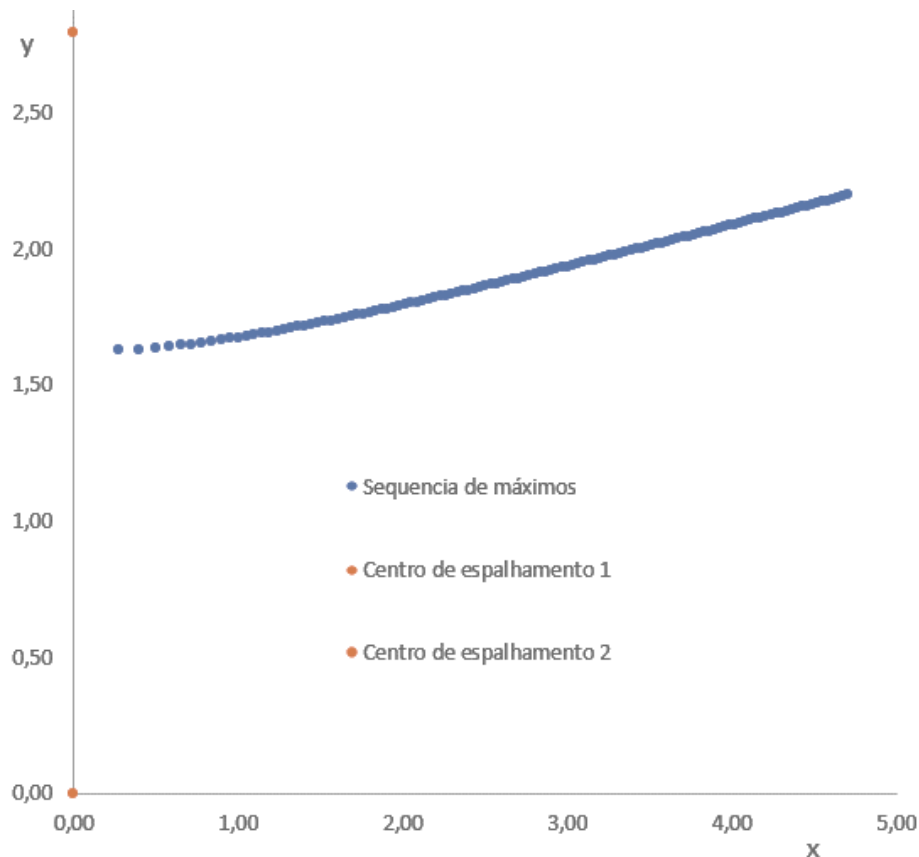


Figura 4 – Sequência de máximos formados pelo espalhamento de partículas nos dois centros de espalhamento representados pelos círculos laranja no eixo vertical.

Percebemos na Figura 4, que existe um intervalo de tempo entre a chegada da frente de partículas incidentes e o aparecimento do primeiro máximo, ou seja, o feixe de máximos começa a existir a partir de uma distância mínima da interface. Nesse caso, as frentes de ondas secundárias ainda não se cruzaram. Interessante também é que essa situação ocorrerá quando tivermos $v_1 < v_2$ e um ângulo de incidência maior que o ângulo crítico, no qual o feixe difratado deixa de existir, torna-se geometricamente impossível as frentes de ondas secundárias se cruzarem, os fótons existem no lado direito da interface, mas não se agrupam.

Aproveitamos o contexto para examinar a curvatura do feixe de máximos próximo da interface, pois estaríamos vendo uma trajetória curva para um feixe de luz? Conforme nosso modelo o feixe de luz se curva sim, mas não quer dizer que os fótons seguem essa trajetória curva! Afinal, um máximo é construído pela coincidência geométrica de fótons que vieram em linha reta a partir de cada centro de espalhamento, eles se encontram na posição de um máximo e depois se afastam da trajetória dos máximos.

Agora então podemos investigar o fenômeno de refração, o desvio sofrido por um feixe incidente, ao atravessar uma interface que separa dois meios, com índices de refração diferentes. obtemos a direção de propagação das partículas do feixe, pela direção de "propagação dos máximos de interferência e lembrando que a lei da refração é a lei de Snell:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{v_2} , \quad (10)$$

Vemos que na Figura 3, v_1 é a velocidade da frente de partículas no meio 1, v_2 é a velocidade da frente de onda "esférica" no meio 2, θ_1 é o ângulo de incidência e θ_2 é o ângulo de refração. Ainda com a ajuda da Figura 3 encontramos os dois lados da equação (8), o lado esquerdo é obtido diretamente,

$$v_1 \text{sen}\theta_1 = v_1 \frac{L}{A} \quad , \quad (11)$$

e o lado direito obtém-se da inclinação do segmento de reta que uni os dois máximos:

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{(x_{1,2} - x_{2,3})}{\sqrt{(y_{1,2} - y_{2,3})^2 + (x_{1,2} - x_{2,3})^2}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2}} \quad (12)$$

O cálculo de Δy é mais simples e dá:

$$\Delta y = y_{2,3} - y_{1,2} = \frac{\left(\frac{v_2 L}{v_1}\right)^2 - A^2}{A} \quad (13)$$

O cálculo de Δx , realizado no Apêndice, envolve uma subtração de raízes quadradas e é mais complicado. Pela forma da sequência de máximos na Figura 4 vemos que o ângulo de refração muda próximo da interface entre os meios, ou seja, o valor do $\text{sen}\theta_2$ dado pela equação (12) não satisfará a lei de Snell, que admite um único ângulo de refração θ_2 . Entretanto, a equação (12) recupera a lei de Snell no limite em que podemos considerar $R_1 = v_2 \Delta t$ grande o suficiente, nesse caso temos para Δx :

$$\Delta x = |x_{1,2} - x_{2,3}| = \frac{v_2}{v_1} L \frac{\sqrt{A^2 - \left(\frac{v_2 L}{v_1}\right)^2}}{A} \quad . \quad (14)$$

Longe da interface temos então que:

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{\frac{v_2 L \sqrt{A^2 - \left(\frac{v_2 L}{v_1}\right)^2}}{v_1 A}}{\sqrt{\left[\frac{\left(\frac{v_2 L}{v_1}\right)^2 - A^2}{A}\right]^2 + \left[\frac{v_2 L \sqrt{A^2 - \left(\frac{v_2 L}{v_1}\right)^2}}{v_1 A}\right]^2}} \quad , \quad (15)$$

que, com um pouco de manipulação, encontramos a expressão assintótica da equação (12) como:

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{v_2}{v_1} \frac{L}{A} = \frac{v_2 \text{sen}\theta_1}{v_1} \quad , \quad (16)$$

que é a lei de Snell dada pela equação (10).

Para a reflexão temos que considerar que a coordenada x dos pontos $(x_{1,2}, y_{1,2})$ e $(x_{2,3}, y_{2,3})$ na Figura 3 deve ser transformada em $-x$ e também que $v_1 = v_2$, com isso a equação (14) exige que $\theta_2 = \theta_1$ já que esses ângulos são restritos ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3.2 INTERFERÊNCIA – APLICAÇÃO AO PROBLEMA DA FENDA DUPLA

Analisaremos o dispositivo de fenda dupla, assumindo condições de contorno de frentes de partículas incidentes como planas e monocromáticas e possuindo comprimento entre as frentes de partículas λ . Quando a primeira frente de partícula, representada por F_1 (Figura 5), incide simultaneamente sobre as fendas (incidência normal), emergem duas ondas secundárias f_1^1 e f_1^2 , que são arcos de circunferência com um ponto de cruzamento único (máximo central). No entanto, quando consideramos a segunda frente de partícula F_2 , a qual produz outras duas frentes de ondas secundárias f_2^1 e f_2^2 , existirão pontos de cruzamentos com as primeiras ondas secundárias também, esses pontos são os máximos de interferência secundários.

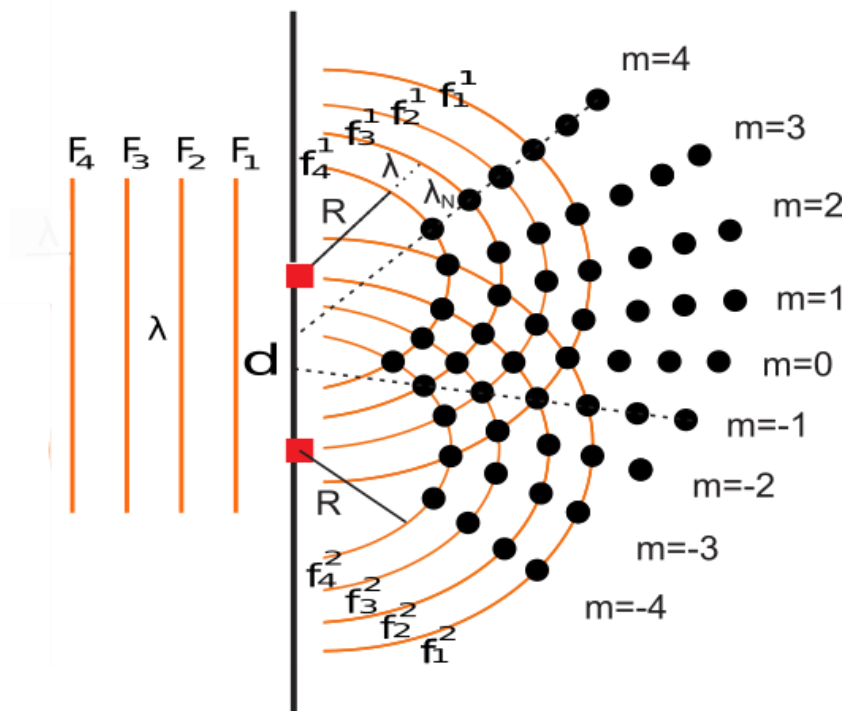


Figura 5 – Frentes de partículas incidentes F_1, F_2, F_3, F_4 e quatro ondas secundárias $f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1$ geradas pela fenda superior (■) e $f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2$ pela fenda inferior (■), são mostrados também os máximos (●).

Matematicamente podemos pensar em duas frentes de partículas planas incidentes, separadas por λ , produzindo frentes de ondas secundárias separadas por λ , já que temos a mesma velocidade de propagação antes e depois das fendas. Assim, uma frente de partículas secundária possuindo raio R pode ser usada como referência para o raio da n -ésima frente de partículas secundária de raio $R_n = R + n\lambda$, com $n = 0, 1, 2, \dots$

Supondo que as fendas estejam localizadas sobre o eixo y , nas posições $y_{01} = 0$ e $y_{02} \neq 0$, as equações das circunferências, que representam as ondas secundárias da fenda 2 e da fenda 1 (Figura 5), serão:

$$x_2^2 + (y_2 - y_{02})^2 = (R + n_2\lambda)^2 \quad , \quad (17)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = (R + n_1\lambda)^2 \quad , \quad (18)$$

onde $n_{1,2} = 0,1,2,3 \dots$ representam os índices das ondas secundárias geradas pela fenda 1 localizada em y_{01} , e pela fenda 2, localizada em y_{02} .

No cruzamento dessas duas circunferências temos $x_1 = x_2 = x$ e $y_1 = y_2 = y$, de modo que resolvendo o sistema de equações (17) e (18) obtemos as coordenadas dos máximos:

$$y = \frac{y_{02}^2 + (R + n_1\lambda)^2 - (R + n_2\lambda)^2}{2y_{02}}, \quad (19)$$

e,

$$x = \sqrt{(R + n_1\lambda)^2 - y^2}. \quad (20)$$

As coordenadas dos máximos são encontradas em função dos números inteiros n_1 e n_2 . Por exemplo, os máximos centrais aparecem em $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$, ou seja, em $x = \sqrt{R^2 - \frac{y_{02}^2}{4}}$ e $y = \frac{y_{02}}{2}$, e, para cada valor de R temos um cruzamento central.

Observamos nesse ponto que, considerando somente dois centros de espalhamento, as equações (8) e (9) com $v_1 = v_2$ e $\theta_1 = 0$ nos dariam as coordenadas do máximo central, ou seja, o fenômeno que ocorre na fenda dupla é o mesmo que ocorre na refração, interferência!

Para observar o comportamento das ondas secundárias e dos máximos, fizemos uma simulação na qual foram geradas quatro ondas secundárias para cada fenda, de raios $R_i = R + i\lambda$ ($i = 0,1,2,3$), em que podemos variar R , como ilustrado na Figuras 5. Também foram calculadas as coordenadas dos pontos de cruzamentos, dadas pelas equações (19) e (20), para vários valores de n_1 e n_2 . Quando R é variado temos o comportamento dos máximos em qualquer posição desejada, ou seja, próximo as fendas ou mais distante.

A Figura 5 traz a existência de pontos $x(n_1, n_2)$ e $y(n_1, n_2)$ que fazem parte de uma mesma reta ou seqüência de máximos. Dois exemplos de feixes de máximos são mostrados pelas linhas pontilhadas. Os valores usados para a distância entre as fendas y_{02} e para λ foram $y_{02} = 5,7$ e $\lambda = 1,1$.

Podemos usar as equações (19) e (20), com $n_2 = n_1 + m$, e obter os pontos que compõem a mesma seqüência de máximos, ou seja:

$$y_{n_1, m}(R) = \frac{y_{02}}{2} - \frac{m\lambda[m\lambda + 2(R + n_1\lambda)]}{2y_{02}} \quad (21)$$

$$x_{n_1, m}(R) = \sqrt{(R + n_1\lambda)^2 - (y_{n_1, m})^2} \quad (22)$$

Os valores de n_1 e n_2 caracterizam um máximo e estão separados por m , ou seja, para um dado máximo, as duas frentes de ondas secundárias que o constituem tem índices separados por m , e, então todas os máximos posteriores, devido as ondas secundárias separadas pelo mesmo m , estarão sobre uma mesma seqüência. Podemos concluir que para $m = -1$ temos os máximos $(n_1, n_1 - 1)$ e que podem assumir os valores $(1,0), (2,1), (3,2) \dots$

O $\text{sen}\theta$ para cada seqüência (Figura 5) pode ser calculado por:

$$\text{sen}\theta = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad (23)$$

Longe das fendas, para as frentes de ondas secundárias vizinhas, ou seja, mais próximas possíveis, $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lambda_N \approx \lambda$. Desta forma, temos que:

$$\text{sen}\theta = \frac{y_{n_1,m} - y_{(n_1+1),m}}{\lambda} \quad (24)$$

Usando $y_{02} = d$ na equação (21) obtemos $\Delta y = y_{n_1,m} - y_{(n_1+1),m} = \frac{m\lambda^2}{d}$ e, finalmente, obtemos a famosa equação que representa o padrão de interferência de Thomas Young para a fenda dupla:

$$d \text{sen}\theta = m\lambda \quad (25)$$

Como no caso do ângulo crítico na refração, na fenda dupla existe um limite a ser respeitado para que existam os máximos secundários, que é $\lambda < d$. Na figura 6 é mostrado o caso em que $\lambda = d$ e só existe o máximo central.

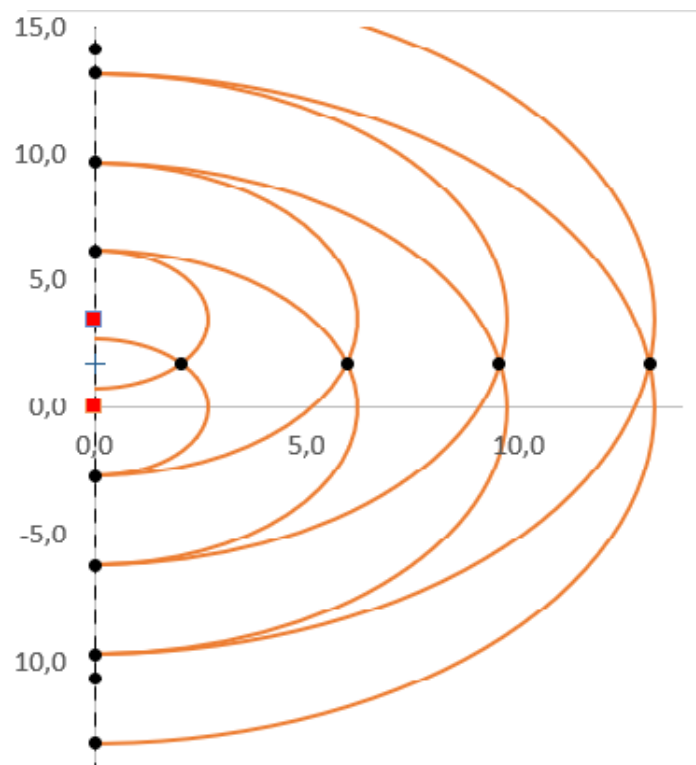


Figura 6 – Caso semelhante ao da Figura 5 em que $\lambda = d = \lambda_c$, só é possível existir o máximo central.

4. ANÁLISE DA SUPERPOSIÇÃO DE FRENTES DE ONDAS SECUNDÁRIAS

Agora estamos em condições de analisar com mais detalhes as superposições das frentes de onda secundárias, vamos usar o exemplo da superposição de duas ondas secundárias, Figura 7, e observar a intensidade da densidade de probabilidade, ou de partículas, que chegam a um determinado ponto.

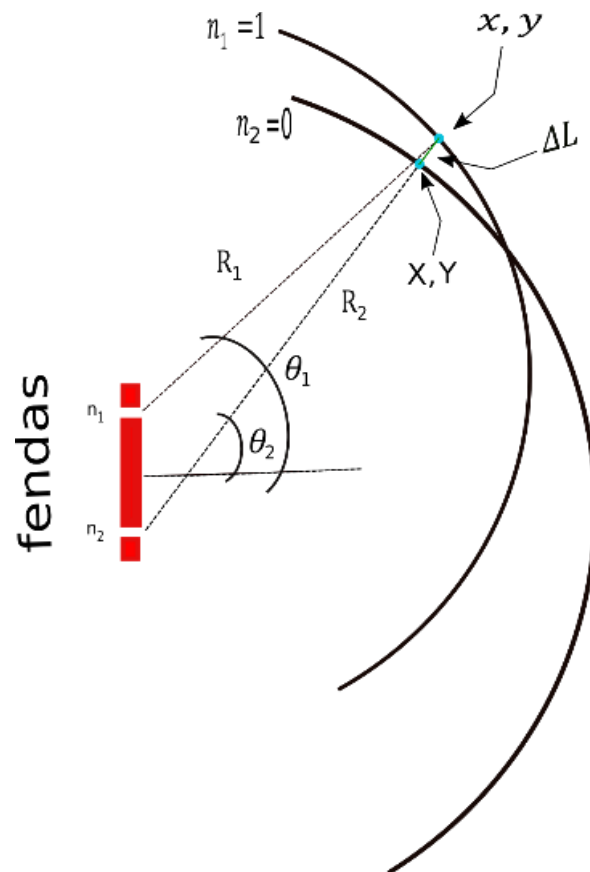


Figura 7 – Esquema da fenda dupla para a análise da intensidade dos máximos de interferência, são representadas duas frentes de ondas “esféricas”, o máximo valor da intensidade se encontra exatamente onde elas se cruzam e se estende para ambos os lados, diminuindo ΔL e a intensidade.

Digamos que chegam em uma fenda um número N_0 de partículas, então a densidade de partículas sobre a metade da circunferência de raio $R + n_i\lambda$, emitida por essa fenda é dada por:

$$\rho_i(x, y) = \frac{N_0}{\pi(R+n_i\lambda)} \quad , \quad (26)$$

lembrando que $n_i = 0,1,2 \dots$ designa a frente de onda secundária “gerada” por uma das fendas.

Assim, o número de partículas compreendidas em um intervalo de ângulo $\Delta\theta$ observado da distância média entre as fendas é dado por:

$$N_{i,j} = \rho_i(x, y)(R + n_i\lambda)\Delta\theta \quad (27)$$

onde $j = 1,2$ designa a fenda sendo 1 a de cima e 2 a de baixo, $i = 1,2 \dots$ designa a frente de onda emitida pela fenda j .

$$N_{i,1} + N_{i,2} = [\rho_1(x, y)(R + n_1\lambda)\Delta\theta + \rho_2(x, y)(R + n_2\lambda)\Delta\theta] \quad (28)$$

Agora podemos analisar a intensidade de partículas que chegam a $\Delta\theta$ num intervalo de tempo Δt , ou seja:

$$I = \frac{N}{(R+n_i\lambda)\Delta\theta\Delta t} \quad , \quad (29)$$

Onde $(R + n_i\lambda)\Delta\theta$ corresponde ao elemento de "área" compreendido em $\Delta\theta$. Observando que a velocidade das partículas é v e que $\Delta t = \frac{\Delta L}{v}$ substituímos (28) em (29) e obtemos,

$$I = \frac{v}{\Delta L} \left[\frac{N_0(R+n_1\lambda)}{\pi(R+n_1\lambda)^2} + \frac{N_0(R+n_2\lambda)}{\pi(R+n_2\lambda)^2} \right] . \quad (30)$$

E agora temos que encontrar ΔL para obter I , pela Figura 7 notamos que:

$$\Delta L = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2} . \quad (31)$$

No entanto, essa quantidade na exata posição do máximo de intensidade se anula fazendo com que a intensidade vá a infinito, isso porque até agora não atribuímos as nossas partículas nenhum tamanho, assim, para sermos mais realísticos em nossa análise, vamos atribuir um mesmo diâmetro δ as nossas partículas e com isso a equação (31) torna-se:

$$\Delta L = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2} + \delta , \quad (32)$$

Ou seja, exatamente na posição que localiza um máximo de intensidade $\Delta L = \delta$.

Para calcular ΔL temos que lembrar que as equações das circunferências são:

$$x^2 + (y - y_{02})^2 = (R + n_1\lambda)^2 , \quad (33)$$

$$X^2 + Y^2 = (R + n_2\lambda)^2 . \quad (34)$$

Escolhendo um valor y como na Figura 7, o valor de x correspondente é dado por,

$$x = \sqrt{(R + n_1\lambda)^2 - (y - y_{02})^2} , \quad (35)$$

o valor de Y pode ser encontrado para a relação linear entre os pontos (x, y) e (X, Y) , ou seja:

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x} , \quad (36)$$

então com (34) e (36) obtemos,

$$Y = \frac{(R+n_2\lambda)(y/x)}{\sqrt{1+(y/x)^2}} , \quad (37)$$

que substituída em (34) nos dá a expressão para X :

$$X = \frac{(R+n_2\lambda)}{\sqrt{1+(y/x)^2}} \quad (38)$$

Finalmente obtemos $\Delta L(y)$,

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{R+n_2\lambda}{\sqrt{1+(y/x)^2}} - \sqrt{(R+n_1\lambda)^2 - (y-y_{02})^2}\right)^2 + \left(\frac{(R+n_2\lambda)y/x}{\sqrt{1+(y/x)^2}} - y\right)^2} + \delta. \quad (39)$$

E também a intensidade I :

$$I(y) = \frac{v\left[\frac{N_0}{\pi(R+n_1\lambda)} + \frac{N_0}{\pi(R+n_2\lambda)}\right]}{\Delta L} \quad (40)$$

A função $I(y)$ para os cinco máximos $m = 0, \pm 1, \pm 2$, é mostrada na Figura 8 para os valores $R = 115,50$, $\lambda = 0,5$, $d = y_{02} = 1$, $N_0 = 2$, $v = 0,3$. Os pontos coloridos representando a exata posição dos máximos foram necessários colocar para localizar o limite que as curvas coloridas deveriam atingir, pois nem sempre o incremento de y , neste caso igual a 0,5, próximo a um máximo captura esse limite.

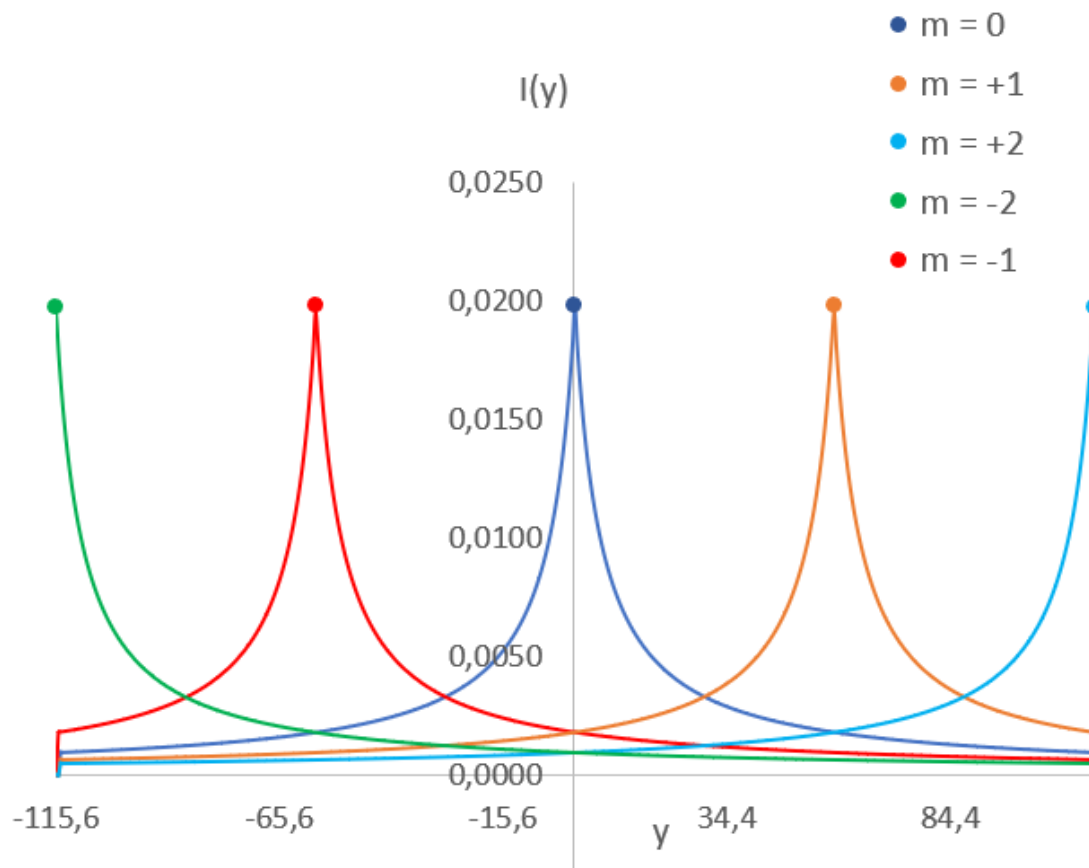


Figura 8 – São mostrados as cinco curvas $I(y)$ coloridas para os cinco máximos dados pelos pares $(n_1, n_2) = (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (0,2)$, os máximos ocorrem nesse caso exatamente nas posições tradicionais.

Percebemos ainda que há uma superposição de máximos, quando analisamos a Figura 9 vemos que uma frente de onda secundária poderá pertencer a mais de um máximo, por exemplo, os fótons de um máximo que chegam por último numa posição serão os primeiros fótons de outro máximo. Na Figura 9 seriam os fótons na linha azul entre as regiões vermelha e verde.

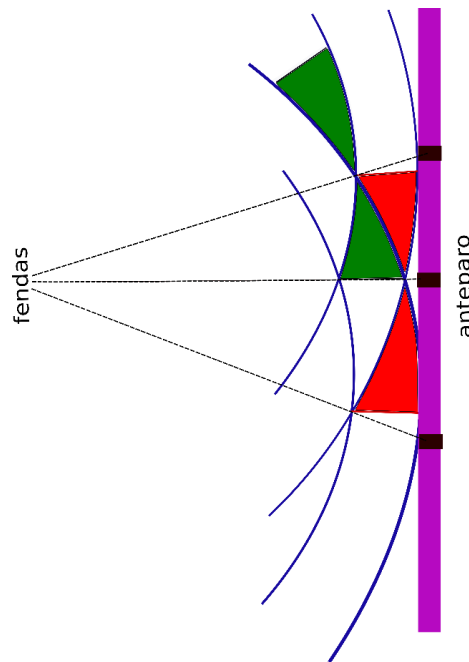


Figura 9 – Região comum aos dois máximos representados pelas cores vermelha e verde.

A soma das intensidades da Figura 8 é mostrada na Figura 10.

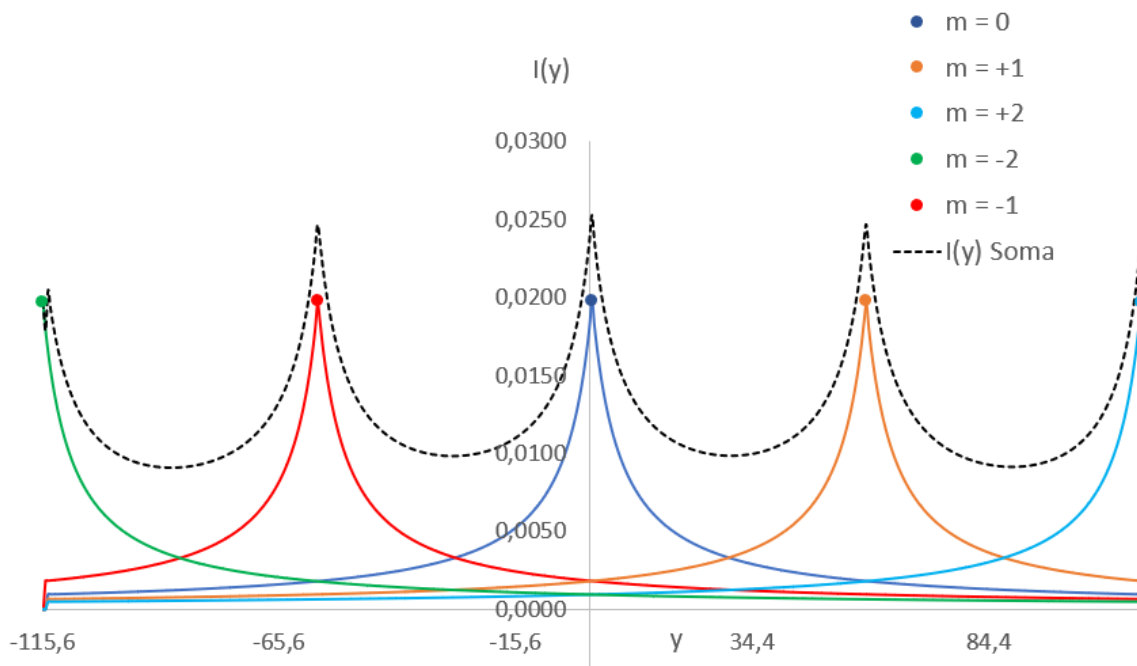


Figura 10 – A linha tracejada representa a soma das intensidades das duas fendas.

5. DISCUSSÃO DO CASO: PARTÍCULAS UMA A UMA

Como já comentamos, as partículas chegam nas fendas em linha reta, são desviadas pelas fendas e depois disso viajam em linha reta novamente como partículas livres. Na Figura 11 representamos três situações em que chegam nas fendas apenas duas partículas, um feixe pouco intenso, que podem representar a ocorrência de um máximo central com $m = 0$, e dois secundários com $m = -1$ e $m = 1$. Na primeira situação as duas partículas atingem ao mesmo tempo as duas fendas, uma em cada fenda, depois vão se encontrar no único lugar possível disso acontecer no anteparo, no único lugar que os dois caminhos têm igual comprimento que é no máximo central. Logo abaixo na Figura 11

são representados as outras duas possibilidades para o primeiro máximo secundário, as duas partículas não chegam juntas nas fendas, mas separadas por uma distância λ , nesse caso um possível encontro no anteparo só pode ocorrer nos máximos secundários $m=-1$ e $m=+1$.

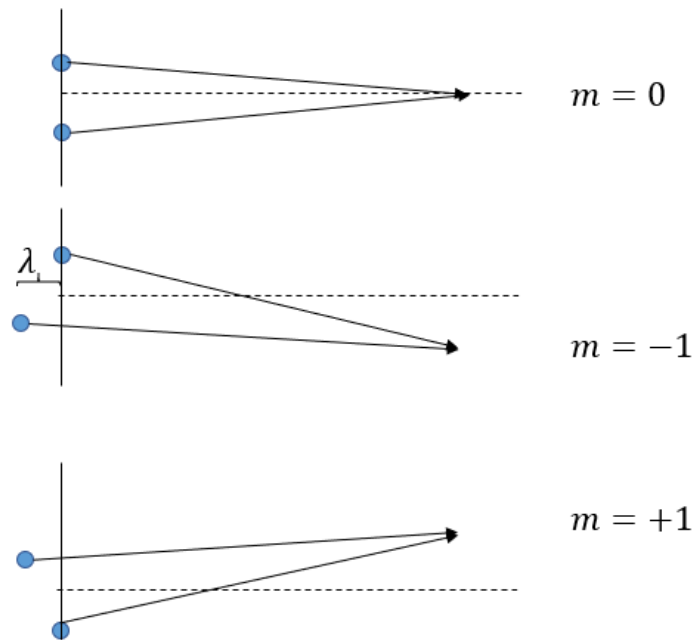


Figura 11 – Pulso constituídos de 2 partículas representadas por círculos azuis e as três possibilidades delas constituírem um máximo.

No caso de uma única partícula passar pelas fendas de cada vez, o máximo central não é possível ocorrer, este seria então o critério para se dizer que estamos passando pelas fendas uma partícula por vez.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Conseguimos uma forma de aplicar os princípios de Huygens e de Huygens-Fresnel ao espalhamento de partículas, por sugerir respectivamente o espalhamento "aleatório" das partículas e um máximo de interferência onde essas partículas se agrupam. Sob essas hipóteses examinamos os casos de partículas organizadas num feixe incidente sobre uma interface refratora/refletora, constituída de centros de espalhamento discretamente dispostos no espaço, como resultado recuperamos a Lei de Snell e mostramos que ela não é obedecida muito próximo da interface, os máximos seguem as direções dadas pelas equações (8) e (9). Examinamos também a incidência de feixes organizados de partículas sobre uma fenda dupla, como resultado recuperamos o padrão de Young e mostramos que ele não é obedecido muito próximo das fendas, os máximos seguem as direções dadas pelas equações (21) e (22). Nesses casos existe um fato curioso, os feixes que emergem da interface ou das fendas, parecem brotar de um ponto que está a uma certa distância destas, a explicação é que as ondas secundárias, que partem de centros de espalhamentos distantes uns dos outros, só se cruzam depois de viajarem uma certa distância. Longe dos centros de espalhamento também pode ocorrer a ausência de máximos, observamos que, se por algum motivo as ondas secundárias não conseguem se cruzar, então não existem máximos, e o fenômeno que dependia da existência desses máximos deixa de ser percebido. Esse comportamento ocorreu para a refração, na qual acima do ângulo crítico não há máximos, e também para a fenda dupla onde o comprimento de onda deve ser menor que a distância entre as fendas, para que existam máximos diferentes do máximo central.

Na fenda dupla é interessante observar que, exceto para o máximo central, na posição de um máximo no anteparo, chegam nessa posição, no mesmo instante de tempo, as frentes de onda secundárias oriundas das duas fendas, mas que foram originadas de frentes de ondas planas incidentes distintas, ou seja, as ondas secundárias saem das fendas em instantes de tempo diferentes, mas podem chegar juntas em pontos especiais no anteparo. Isto é o que explica a intensidade dos máximos da Figura 10, mesmo no caso de passar pelas fendas uma partícula de cada vez.

Apresentamos um modelo para fenômenos básicos da Ótica, que é baseado numa interpretação um pouco diferente para dois casos, o Princípio de Huygens e o Princípio de Huygens-Fresnel. No primeiro caso usamos a estratégia "mais realista" de Albert Einstein, tentando ser mais realistas no que um fóton ou outra partícula perceberia quando atravessasse uma interface entre dois meios, ou fenda, notamos então que para um espalhamento randômico obteríamos perfeitamente a produção de uma "onda secundária de Huygens, que traria o significado desejado pela mecânica quântica, de uma onda de densidade de probabilidade. No segundo caso, a localização de um máximo de interferência exatamente na posição de cruzamento entre duas destas novas ondas secundárias, o que permitiu tratar matematicamente os máximos de forma razoavelmente mais simples. Com isso, pudemos explicar como mesmo fenômeno a refração/reflexão e a interferência em fenda dupla, explicar de uma maneira mais ampliada. Ampliada a ponto de generalizar a Lei de Snell e o padrão de Young da fenda dupla, além de servir de questionamento quanto a validade do princípio da complementariedade de Niels Bohr, quando recuperamos o padrão de Young no caso de passar pelas fendas uma partícula de cada vez, pois estamos podendo explicar o padrão de Young com as duas descrições, onda e agora com partículas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho preenchemos um vazio deixado pelos físicos entre as condições de contorno tradicionalmente usadas nos problemas de ótica tratados aqui. Mostramos que esse vazio parece conter a região onde a "mágica" acontece, onde se esclarece o que pode estar acontecendo na fenda dupla que há muito tempo é considerado um importante "mistério" da Física. Basicamente se nossa hipótese de espalhamento "aleatório" estiver correta, os princípios de Huygens e Huygens-Fresnel se ocupem de esclarecer o "mistério". Afinal, esse potencial aleatório faz muito sentido quando pensamos que o experimento de fenda dupla foi realizado para fótons, elétrons, nêutrons e até átomos, e obtido sempre o mesmo padrão, ou seja, que potencial seria comum a estas partículas, que potencial particular é esse, é o caso particular do potencial "aleatório"!

Além disso, dada a relevância dos resultados, temos que considerar que a realidade percebida via luz pode ser uma realidade resultante do agrupamento de fótons, não somente dos fótons individuais, a realidade como fruto da interferência de um coletivo.

As condições de contorno utilizadas acabam nos sugerindo então uma Ótica explicada pelas leis da Mecânica.

Há que se comentar que, alguns trabalhos experimentais tratam do caso da fenda dupla quando passam pelas fendas uma partícula por vez e mesmo assim o máximo central está presente no padrão de interferência. Nos vemos na encruzilhada em que teríamos duas opções: 1) aceitar os resultados experimentais e os critérios usados para se afirmar que uma partícula é emitida de cada vez, e que uma partícula é detectada de cada vez, com a extrema precisão necessária, já que, pelo apresentado

nesse trabalho, se duas partículas passarem ao mesmo tempo pelas fendas o máximo central torna-se possível. O que confirmaria a atual interpretação da dualidade onda-partícula, ou, 2) revisar esses critérios para melhorá-los e refazer os experimentos com a segurança necessária ao se afirmar que as partículas são emitidas uma a uma e passam uma a uma pelas fendas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço as pessoas que de alguma forma contribuíram com discussões relevantes ao longo de anos, Pedro Christiano, Ruben Alcaise Estrada, Mário Augusto Camargo, Luis Orlando Emerich dos Santos, Paulo Cesar Philippi, Luiz Fernando Pires, Vitor Tramontim e postumamente a Samir Rodrigo Picin.

8. REFERÊNCIAS

[HEC02] HECHT, EUGENE. **Optics**: São Francisco: Pearson Education, 2002.

[DAV27] DAVISSON, C., GERMER, L. H. Diffraction of electrons by a crystal of nickel. **Physical Review**, vol 30 n. 06, 705 – 741 p, December 1927.

[HUY90] HUYGENS, CHRISTIAAN. **Treatise on Light**: N. York (Leyden): Dover, 1690.

Submetido: 18/08/2020

Aceito: 03/09/2020

APÊNDICE

Nosso objetivo nesse apêndice é obter o termo dado na equação (12) do texto principal, ou seja,

$$|\Delta x| = |x_{1,2} - x_{2,3}| \quad . \quad (A1)$$

Agora usamos as equações (4) e (6) nas equações (5) e (7) e obtemos,

$$x_{1,2} = \sqrt{R_1^2 - [y_{1,2}]^2} \quad , \quad (A2)$$

$$x_{2,3} = \sqrt{(R_1 - L')^2 - \left(y_{1,2} + \frac{A^2 - L'^2}{A} - A\right)^2} \quad . \quad (A3)$$

Trabalhamos um pouco a expressão para $x_{2,3}$, na qual identificamos o primeiro termo como,

$$(R_1 - L')^2 = R_1^2 - 2L'R_1 + L'^2 \quad , \quad (A4)$$

e o segundo termo como,

$$\left(y_{1,2} + \frac{L'^2 - 3A^2}{A}\right)^2 = [y_{1,2}]^2 + 2\left(\frac{-L'^2}{A}\right)y_{1,2} + \left(\frac{-L'^2}{A}\right)^2 \quad . \quad (A5)$$

Então evidenciamos o termo $x_{1,2}$ em (A3):

$$x_{2,3} = x_{1,2} \sqrt{1 + \frac{L'^2 - 2L'R_1 - 2\left(\frac{-L'^2}{A}\right)y_{1,2} - \left(\frac{-L'^2}{A}\right)^2}{R_1^2 - [y_{1,2}]^2}}. \quad (A6)$$

Agora podemos explicitar $y_{1,2}$ e usar a expansão binomial encontrando:

$$x_{2,3} = x_{1,2} + \frac{L'^2 - 2L'(R_1) - 2\left(\frac{-L'^2}{A}\right)\left[\frac{2L'R_1 - L'^2 + A^2}{2A}\right] - \left(\frac{-L'^2}{A}\right)^2}{\frac{1}{A}\sqrt{4R_1^2 A^2 - [2R_1(L') - L'^2 + A^2]^2}}. \quad (A7)$$

Longe da interface os termos dominantes são de ordem $O(R_1^2)$ e podemos abandonar termos de ordem inferiores, com isso obtemos:

$$\Delta x = \frac{-L'A + \frac{1}{A}(L'^2)(L')}{\sqrt{A^2 - (L')^2}}, \quad (A8)$$

ou ainda,

$$\Delta x = -L' \frac{\sqrt{A^2 - L'^2}}{A}. \quad (A9)$$

O índice de refração n será encontrado relacionando o seno do ângulo de incidência θ_1 com o seno do ângulo de refração θ_2 , lembrando a equação (10):

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{v_2}. \quad (A10)$$

Temos então que identificar na equação (12), reescrita como (A11), o termo $\text{sen}\theta_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + D^2}}$:

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \quad (A11)$$

e para isso devemos lembrar que $A = \sqrt{L^2 + D^2}$ e que $L' = \frac{v_2 L}{v_1}$, assim, com as equações (A9) e (13) encontramos:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = -L'^2 + A^2 + 2L'\lambda'. \quad (A14)$$

A equação (A11) torna-se:

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{v_2 L}{v_1 \sqrt{L^2 + D^2}}. \quad (A15)$$

Ou seja, obtemos a equação (A10).