



CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

Software Modellus e Modelagem Matemática: um estudo sobre a aprendizagem de função quadrática*Software Modellus e Mathematical Modeling: a study on quadratic function learning*Silvana Costa Silva¹, Flaviana dos Santos Silva²,
Zulma Elizabete de Freitas Madruga³**RESUMO**

Neste artigo objetiva-se analisar as possibilidades existentes no software Modellus no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no tocante a aprendizagem da Função Quadrática. Os dados resultaram da prática da Modelagem Matemática, em consonância com o uso do computador, internet e software Modellus, desenvolvida com 30 alunos do 1º ano do Ensino Técnico integrado ao Médio, de uma escola da Rede Federal de ensino situada no interior da Bahia, e foram obtidos pelos materiais produzidos pelos alunos, audiografações e dois roteiros de atividades. No processo, os alunos formularam e analisaram seus próprios modelos matemáticos. A análise dos resultados evidenciou que a utilização do software Modellus permitiu aos alunos a visualização da simulação dos modelos, a interpretação e verificação dos resultados.

Palavras-chave: Software Modellus; tecnologias digitais; modelagem matemática; função quadrática.

ABSTRACT

This article aims to analyze the possibilities in Modellus software for the development of Mathematical Modeling activities in the learning of the Quadratic Function. The data resulted from the practice of Mathematical Modeling, in agreement with the use of the computer, internet and software Modellus, developed with 30 students of the 1st year of Technical Education integrated to the Middle, of a school of the Federal Network of education located in the interior of Bahia, and were obtained by the materials produced by the students, audio recordings and two scripts of activities. In the process, students formulated and analyzed their own mathematical models. The analysis of the results showed that the use of the Modellus software allowed the students to visualize the simulation of the models, the interpretation and verification of the results.

¹ Instituto Federal da Bahia – IFBA, Câmpus Vitória da Conquista/BA – Brasil. E-mail: silvanasilva@ifba.edu.br

² Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, Ilhéus/BA – Brasil. E-mail: flavianadss@gmail.com

³ Universidade Federal do Recôncavo da Bahia – UFRB, Cruz das Almas/BA. E-mail: betefreitas.m@gmail.com



Keywords: *Software Modellus; digital technologies; mathematical modeling; quadratic function.*

1. INTRODUÇÃO

Os resultados apresentados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb)⁴, no ano de 2015, revelam que o rendimento dos alunos baianos que concluem o Ensino Médio está aquém do esperado. Nesses resultados, evidencia-se considerável dificuldade na aprendizagem do conteúdo matemático Função Quadrática, com ênfase para os alunos oriundos de escolas da Rede Estadual de ensino. Esse fato ocorre devido a pontuação mínima requerida na escala de Proficiência⁵ em Matemática ter sido inferior ao previsto.

Isso significa, por exemplo, que no desempenho em Função Quadrática, somente os alunos da Rede Federal de ensino e da Rede Privada foram capazes de reconhecer os zeros de uma função, relativo ao nível 2 na escala de proficiência; bem como o valor máximo de uma função quadrática, relativo ao nível 3, ambos representados graficamente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000) destacam o uso de modelos que representam situações ou fenômenos da realidade no intuito de minimizar dificuldades em Matemática como as anteriormente descritas.

Assim, a noção de função pode possibilitar aos alunos modelarem fenômenos da realidade (ou aproximações dela) e interpretá-los matematicamente. Nessa direção, a Modelagem Matemática se constitui como um processo dinâmico voltado para a construção de modelos em diferentes áreas de ensino, como Matemática, Química, Física, Biologia, entre outras.

Nessa dinâmica, as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) podem ser aliadas importantes no contexto do ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, porque proporcionam um ambiente de investigação mais dinâmico e atrativo para alunos e professor.

Valente (1998) destaca que o recurso computacional facilita o processo de construção do conhecimento pelo aluno, uma vez que são elementos que motivam as aulas e causam entusiasmo.

Com este propósito, o presente artigo objetiva analisar as possibilidades existentes no software Modellus no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no tocante a aprendizagem da Função Quadrática. Para tal está organizado em quatro tópicos que tratarão da Modelagem Matemática, bem como das TDIC como suporte a tais atividades.

⁴ O Saeb é composto por três avaliações: Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb); Avaliação Nacional do Rendimento escolar (Anresc) e Avaliação Nacional de Alfabetização (ANA).

⁵ Aptidão em determinada área do conhecimento.

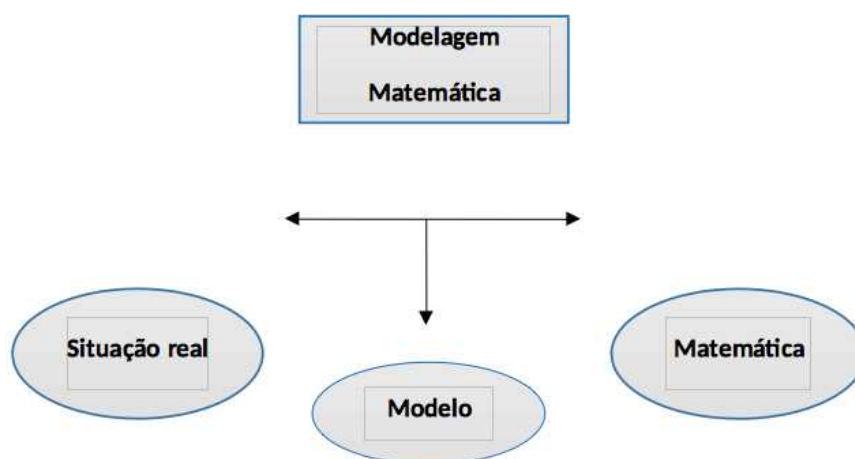


2. MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Nas Ciências, a Matemática é utilizada como linguagem imprescindível para comunicar suas ideias e seus conhecimentos. Assim, os modelos matemáticos são utilizados para explicar e compreender um dado fenômeno, com o objetivo de fazer previsões para a tomada de decisões futuras, com intuito de modificar uma situação. (BIEMBENGUT, 2016).

Conforme afirmam Biembengut e Hein (2013), o modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas para explicar uma situação real e obter resposta para um dado problema. O esquema da figura 1, a seguir, supõe a Modelagem Matemática como um processo interativo a fim de que o indivíduo perceba a Matemática presente nessa situação por meio da construção de modelos, procurando entender a realidade que o cerca.

Figura 1 - Esquema do processo de Modelagem Matemática.



Fonte: Silva (2018) adaptado de Biembengut e Hein (2013).

Para Bassanezi (2015, p.11), o objeto de estudo no ensino tradicional “se apresenta quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência predeterminada, com um objetivo final muito claro que, muitas vezes, nada mais é que ‘cumprir o programa da disciplina.’”

Nesse sentido, Biembengut (2016) corrobora afirmando que o aluno entende que o importante é memorizar conteúdos e procedimentos necessários para realizar uma avaliação, limitando sua visão da Matemática como uma disciplina meramente abstrata, sem sentido e importância

No entanto, o mundo contemporâneo exige pessoas cada vez mais preparadas para comunicar-se, tomar decisões, resolver problemas e saber enfrentar acontecimentos do seu dia a dia. E, nessa tendência, o ensino de Matemática desponta como meio “formativo” e “instrutivo” (BRASIL, 2000), fomentando no aluno o interesse em melhor compreender o contexto que o rodeia.



Para Godoy (2015), o ensino de Matemática passa a ser significativo para o aluno, quando esse se apoia em situações cotidianas da vida real, ou em situações relacionadas com outros campos das ciências.

Partindo do pressuposto de que a Modelagem Matemática estabelece uma relação com outras áreas do conhecimento, pode-se encontrar nela uma alternativa para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Isso por que oportuniza aos alunos a participação direta e ativa no processo educacional, por meio da pesquisa a partir de um tema.

Acredita-se que o desenvolvimento de atividades partindo de uma temática, tal como acontece na Modelagem Matemática, em integração com outras disciplinas, pode tornar a prática da pesquisa mais eficiente.

Para fazer Modelagem em aulas de Matemática, Biembengut (2016) orienta a seguir três fases:

1. Percepção e Apreensão: subdividida em outras duas subetapas: *reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado*, consiste na busca pelo referencial teórico; uma exploração do assunto/tema a ser investigado; a identificação/coleta dos dados pertinentes, realizando, dessa forma, um levantamento bibliográfico em livros, revistas, entre outras formas de busca, ou até mesmo diretamente com especialistas na área, com a finalidade de apreendê-los e organizá-los “familiarizando com particularidades” (BIEMBENGUT, 2016, p.106).

2. Compreensão e Explicitação: nessa etapa, subdividida em *formulação do problema → hipóteses e resolução do problema em termos do modelo*, obtém-se o modelo propriamente dito, ou seja, há a compreensão e o delineamento da situação-problema em termos de simbologia matemática. Nesse momento, organizam-se as informações e os dados obtidos, relacionando uns com os outros, levantando hipótese e/ou questões, de maneira a estabelecer essa relação sob a forma de um modelo (representação matemática).

3. Significação e Expressão: para a efetivação do modelo, é necessário verificar em que medida ele responde ao questionamento que o gerou, esse é um momento chamado de *interpretação da solução e validação do modelo → avaliação*. A partir de uma análise criteriosa da solução, o modelo será julgado válido se descrever a situação-problema satisfatoriamente, ou seja, se permite entender e agir sobre tal. Caso isso não ocorra, deve-se retornar à etapa anterior.

3. AS TDIC NA MODELAGEM MATEMÁTICA

As atividades de Modelagem Matemática em sala de aula podem estar integradas às TDIC no processo educacional, tais como *softwares*, com a finalidade de solucioná-la. Isso porque as TDIC possibilitam, para além da investigação, a visualização, interpretação e verificação de resultados. (MALHEIROS; FRANCHI, 2013).

Essas atividades são vistas sob o aspecto pedagógico da pesquisa e exploração sobre determinada situação-problema, acerca de um tema/assunto proveniente de outras áreas do conhecimento, que não a de Matemática,



Não obstante, o entrelaçamento das TDIC com atividades de Modelagem, podem dar condições para que os alunos descrevam alguns aspectos do fenômeno, oportunizando conjecturar hipóteses e testá-las, observando assim as implicações que as variáveis atuantes determinam em seu comportamento. (VALENTE, 1999).

Outra característica a ser ressaltada ao utilizar o computador com fins educativos é que os alunos têm oportunidade, de acordo com Valente (2005), de explorar características típicas dele que contribuem para externar seu pensamento de maneira mais “formal e precisa”.

Com isso, o acesso ao computador na Educação pode proporcionar mudanças não somente na forma de pensar do aluno, reorganizando seu raciocínio pela sua interação com a tecnologia, mas também na forma de agir dos professores, uma vez que pode provocar mudanças no processo cognitivo.

Com a finalidade de fomentar as discussões a respeito das contribuições das TDIC em situações de Modelagem para a construção e significação do conhecimento, utiliza-se o conceito *seres-humanos-com-mídias*⁶, proposto por Borba (2001). Nesse conceito, está presente a noção de coletivo pensante, que é formado por seres humanos e tecnologias, compondo uma unidade básica que constrói o conhecimento. (BORBA, 2001; SOUTO, 2012; SOUTO; ARAÚJO, 2013; VILLARREAL; BORBA, 2009).

Em relação a informática, Borba (2001) compara o seu papel com o da linguagem, porém, salienta que essa mídia é qualitativamente diferenciada das outras, porque reorganiza o pensamento de formas diferenciadas. Isso se dá pelo fato das maneiras de pensar passarem a estar alicerçadas nas possibilidades oferecidas pelo computador, como simulações, experimentações, imagens, sons, entre outros, e a romper com a linearidade das outras técnicas.

No caso da Modelagem, o professor é responsável por criar um ambiente propício para que o aluno se envolva com o fenômeno de tal forma que essa prática possa ser complementada com leituras, discussões, elaboração de hipóteses, com o intuito de ele formular o seu modelo. O computador desponta então como recurso importante, em busca de validar, ou não, suas conjecturas e compreensões acerca de determinado fenômeno.

Valente (1999, p.96) acrescenta que,

a modelagem exige um certo grau de envolvimento na definição e representação computacional do fenômeno e, portanto, cria uma situação bastante semelhante à atividade de programação e acontecem as mesmas fases do ciclo **descrição-execução-reflexão-depuração-descrição** (grifo nosso).

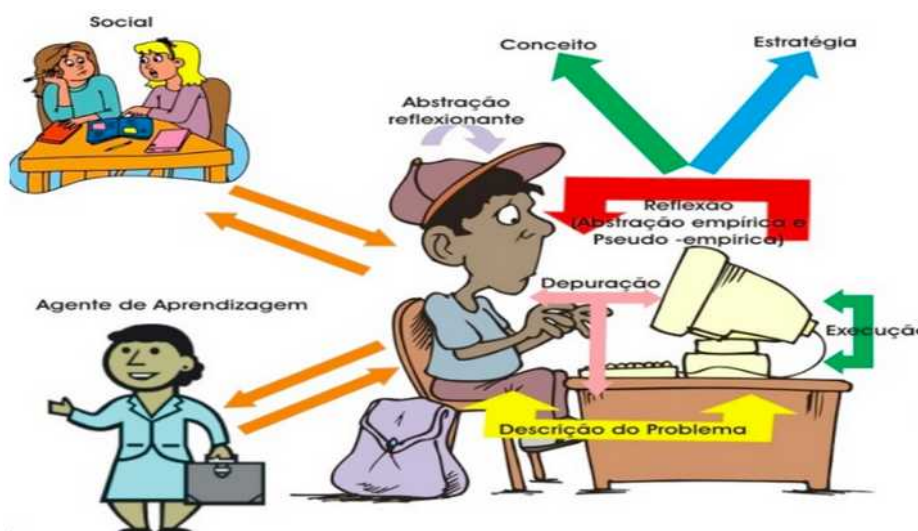
Conforme Valente (2005), a proposta do ciclo, ilustrado na Figura 2, é compreender os atributos oferecidos pelos *softwares* enquanto ferramenta no processo de construção do conhecimento na interação entre indivíduo e computador. Nesse sentido, ambos realizam ações que favorecem a aprendizagem de forma cíclica e contínua, ou seja, para além da estrutura cíclica, é preciso que a construção do conhecimento aconteça

⁶ Mídias são entendidas aqui na perspectiva apresentada por Villarreal e Borba (2009, p.49), “como qualquer tipo de ferramenta, dispositivo, equipamento, instrumento, artefato ou material como resultado de desenvolvimentos tecnológicos”.



de forma contínua, pois o processo não se estagna, ou seja, não para em determinado ponto e se repete partindo do mesmo ponto inicial. Pensando assim, esse processo não evoluiria.

Figura 2 - Ciclo de aprendizagem.



Fonte: Silva (2006), adaptado de Valente (2005).

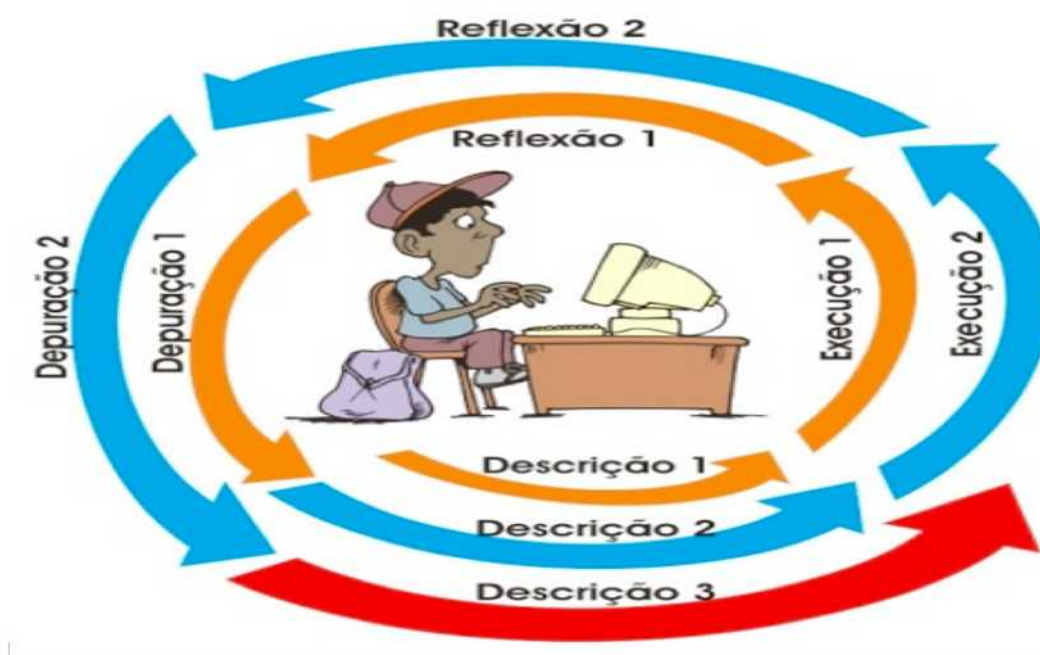
O ciclo de ações *descrição-execução-reflexão-depuração* começa na tentativa do aluno em resolver um problema partindo da ação de **descrever** a solução no *software*. Esse, por conseguinte, **executa** a tarefa, cujos resultados possibilitarão ao aluno **refletir** sobre as informações oferecidas na ação anterior.

Mediante reflexão, que pode provocar níveis diferentes de abstrações, o aluno pode **depurar** o que foi produzido, caso os resultados não estejam condizentes, ou seja, analisar o que foi feito, a fim de encontrar possíveis erros. Essa última etapa do ciclo pode ser comparada com a de significação e expressão na Modelação, visto que se procura interpretar e validar o modelo encontrado.

Valente (2005, p.66) complementa que,

A cada ciclo completado, as ideias do aprendiz deveriam estar em um patamar superior do ponto de vista conceitual. Mesmo errando e não atingindo um resultado de sucesso, o aprendiz deveria estar obtendo informações que são úteis na construção de conhecimento. Na verdade, terminado um ciclo, o pensamento não deveria ser exatamente igual ao que se encontrava no início da realização desse ciclo. Assim, a ideia mais adequada para explicar o processo mental dessa aprendizagem, era a de uma espiral.

Para o autor, a concepção é de um movimento ininterrupto no processo de aprendizagem, em que o erro não deveria ser visto como desprezível, mas fonte valiosa de questionamentos e estímulo provocador das ações de reflexão e depuração. A Figura 3 descreve como esse movimento acontece:

**Figura 3** - Espiral da aprendizagem.

Fonte: Silva (2006) adaptado de Valente (2005).

3.1. SOFTWARE MODELLUS EM ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Para o engajamento dos alunos com atividades de Modelagem em um ambiente computacional, foi escolhido o software Modellus, por estar voltado exclusivamente à modelagem e às simulações de fenômenos. A ferramenta permite descrever situações do mundo real quando inserido em sua plataforma um modelo algébrico.

Esse é um software interativo que possibilita não apenas criar e explorar um modelo que represente uma situação-problema, como também rever a simulação desse fenômeno quantas vezes for necessário e/ou quiser, possibilitando a participação ativa dos alunos em seu aprendizado e estabelecendo que o ciclo de ações se concretize na medida em que ampliam suas capacidades de reflexão e depuração.

Uma vez que o foco não está nas técnicas empregadas para a resolução, mas sim na interpretação dos fenômenos e significados que esses estabelecem, o uso de um software enquanto recurso tecnológico, desponta como aliado para as atividades de Modelagem, principalmente na fase de validação do modelo apreendido, porque possibilita um feedback instantâneo. A resposta para a situação-problema, propiciada pela simulação do modelo, ocorre de maneira imediata.

Como sua interface apresenta diversas representações para um mesmo objeto matemático (língua natural/materna, linguagem algébrica, gráfica, tabular e figural ou icônica), o Modellus torna-se um software com diferencial, pois, de acordo com Teodoro (2002), oportuniza certa intimidade entre aluno e representações do fenômeno investigado, que dificilmente seria possível observando aquelas explicitadas nas aulas do professor e nos livros didáticos.



Mais do que isso, o autor acrescenta que a característica principal de um programa como o Modellus é possibilitar ao usuário construir diferentes representações ao articulá-las. E essa construção é feita o mais próximo possível da situação real, sem o uso do computador (TEODORO, 2002), ou seja, no ambiente papel e lápis, porém de forma mais dinâmica, pois o retorno é imediato.

4. PROCEDIMENTOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

O presente estudo desenvolveu-se em uma perspectiva qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994) em busca de compreender os procedimentos adotados pelos sujeitos participantes e os significados atribuídos por eles aos dados gerados no ambiente natural da pesquisa, a sala de aula.

Caracteriza-se também como intervencionista uma vez que, como método de investigação, elaborou-se uma intervenção de ensino. Conforme Damiani *et al.* (2013, p.58), a palavra intervenção, na área de Educação, está relacionada a “investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências”.

Participaram desse estudo 30 alunos⁷ do 1º ano do Ensino Técnico integrado ao Médio, de uma escola da Rede Federal de ensino situada no interior da Bahia, no município de Vitória da Conquista, no turno vespertino. Esses com idades na faixa etária entre 14 e 19 anos de idade, sendo 20 meninas e 10 meninos. A intervenção aconteceu durante 11 encontros de 100 minutos cada, os quais foram áudio gravados e acompanhados de um diário de campo.

Esses encontros foram organizados em três fases, ancoradas nas fases propostas por Biembengut (2016) para desenvolver atividades de modelagem matemática⁸: percepção e apreensão; compreensão e explicitação; significação e expressão.

Na primeira fase - percepção e apreensão - foi proposto aos alunos que investigassem sobre o tema esportes olímpicos e, para isso, a turma foi dividida em seis grupos, cada qual com uma modalidade, identificados como G1, G2, ..., G6.

Na segunda fase - compreensão e explicitação - quatro grupos encontraram uma Função Quadrática que modelava a situação investigada.

Na terceira fase - significação e expressão - os grupos que encontraram um modelo algébrico, foram encaminhados para uma das salas de informática, munidos de um roteiro de atividade que pretendeu verificar se os modelos respondiam, ou não, aos questionamentos elaborados. Esse roteiro foi composto de seis questões com objetivos pré-estabelecidos.

⁷ Todos os estudantes assinaram Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE). De maneira que os pais ou responsáveis estivessem cientes e autorizassem a participação na pesquisa, esses assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

⁸ Método de pesquisa aplicado à educação que consiste na formulação de um modelo.



Para a efetivação desse encontro, os grupos utilizaram o software Modellus. Cabe ressaltar que apenas um grupo não conseguiu validar o seu modelo.

5. ANÁLISE DE DISCUSSÃO DOS DADOS

Nessa seção apresentam-se a análise por meio de três categorias elencadas a partir das três fases da Modelagem Matemática proposta por Biembengut (2016).

5.1. INTERAÇÃO HOMEM-MÁQUINA: PERCEPÇÃO E APREENSÃO

Na primeira fase da Modelagem Matemática, as discussões que aconteciam em grupo giravam em torno de como relacionar as informações obtidas, centradas no campo da Física, com a Matemática, haja vista que os seis grupos obtiveram informações explícitas que atrelaram a sua modalidade com elementos da Física.

Essas informações, obtidas pelos grupos evidenciam relação com outra área do conhecimento, mas ainda não há formalização com o conteúdo Função Quadrática. Essas fazem parte do levantamento de dados obtidos na fase de Percepção e Apreensão, da Modelagem.

Para efeito de análise, as figuras 4 e 5 ilustram que o grupo 1 (G1 - basquete) encontrou uma conexão entre sua modalidade e a Física, no momento de percepção e apreensão, na primeira fase da Modelagem, em sala de aula, dos diversos dados e informações sobre o tema.

Observa-se, na Figura 4, que o grupo elenca alguns elementos da Física que interferem no percurso da bola até chegar na cesta. Essa constatação continua na Figura 5.

Figura 4 - Extrato 1 do G1 referente à modalidade basquete.

MOVIMENTO DESCRITO PELO LANÇAMENTO DA BOLA DE BASQUETE

O lançamento da bola de basquete é denominado arremesso e envolve fatores ligados a trajetória da bola: altura, velocidade, ângulo de soltura e resistência ao

Fonte: Dados da pesquisa.

O extrato da Figura 5 explica que o grupo 1 (G1 - basquete) compreendeu que a velocidade da bola, ao ser arremessada, combinada com o ângulo de seu lançamento, determina o que é denominado na Física como lançamento oblíquo, em que há um deslocamento do objeto tanto para cima quanto para frente. Nesse caso, a velocidade da bola é decomposta em duas: uma velocidade na vertical (para cima) e outra na horizontal (para frente).

As informações obtidas durante essa fase de familiarização com a temática, não tem um critério de escolha, ou seja, os alunos coletam todas as informações e destacam aquelas que acreditam ser as mais relevantes.



Nos casos dos extratos das Figuras 4 e 5, o Grupo 1 (G1 - basquete) resalta elementos da Física, os quais foram importantes para a construção de seus modelos na segunda fase da Modelagem, mesmo que ainda não estivessem conscientes disso.

Figura 5 - Extrato 2 do G1 referente à modalidade basquete (continuação).

ar. Dependendo da distância do cesto, o jogador deve combinar a velocidade e ângulo de lançamento, para fazer a cesta. A possibilidade de acertos também varia de acordo com o ângulo que a bola se aproxima da cesta. Dado esses fatos, podemos afirmar que o movimento descrito pelo arremesso é um tipo de Lançamento oblíquo. No lançamento oblíquo, o movimento dos objetos é composto por um deslocamento da vertical e outro horizontal. Assim, ao mesmo tempo em que o objeto vai para frente, ele sobe e desce. O vetor velocidade do corpo a ser lançado forma um determinado ângulo em relação à horizontal.

Fonte: Dados da pesquisa.

O conceito seres-humanos-com-mídias, apresentado por Borba (2001), desponta na primeira fase da Modelagem Matemática, Percepção e Apreensão, pela associação entre a Modelagem e a internet, sendo essa última uma mídia primordial na obtenção dos dados relativos a cada modalidade.

A internet possibilitou aos alunos acesso a informações essenciais sobre sua temática que, de outra forma, seria praticamente impossível, corroborando com Bassanezi (2015) que afirma ser, a internet, nos dias atuais, a primeira fonte de informações e que essas vão sendo complementadas, se houver necessidade. Acredita-se que esse fator tenha corroborado para que os alunos não se interessassem em buscar outras fontes de informação, confiando somente naquelas encontradas na internet.

5.2. CONSTRUÇÃO DOS MODELOS: COMPREENSÃO E EXPLICITAÇÃO

Na segunda fase, denominada Compreensão e Explicitação, dos seis grupos, quatro encontraram um modelo que representava a sua respectiva modalidade olímpica: basquete, futebol, salto ornamental e vôlei, possibilitando investigar o movimento do objeto/corpo.

Esses grupos encontraram uma equação em que o deslocamento do objeto/corpo na vertical (altura) era função do seu deslocamento na horizontal (espaço percorrido). Para análise, a Figura 6 explicita como o grupo 3 (G3 - salto ornamental) encontrou um modelo que representasse a sua modalidade olímpica.

O grupo 3 utilizou recursos da Física para obter seu modelo, ou seja, elaborou seus modelos tomando como base um modelo da Física, de movimento uniformemente variado. Isso é perfeitamente viável pois, conforme afirma Biembengut (2016, p.189),

De acordo com o conteúdo que objetivamos desenvolver, elaboramos um modelo ou tomamos um modelo pronto de alguma área do conhecimento que nos permite adaptá-lo para o ensino de alguma turma



de estudantes. Isto é, adaptamos o processo para que os estudantes aprendam o conteúdo do programa curricular e, ao mesmo tempo, a elaborar um modelo - modelagem.

Figura 6 - Processo de obtenção do modelo encontrado pelo G3.

$$\begin{array}{l}
 V_x = (V_0 \cdot \cos \theta) \\
 V_x = (10 \cdot \cos 60) \\
 V_x = (10 \cdot 0,5) \\
 V_x = 5 \\
 X = 0 + V_x \cdot t \\
 X = 5 \cdot t \Rightarrow t = \frac{X}{5}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 Y = V_0 t - g t^2 \\
 Y = V_0 + (10 \cdot \sin 60) \left(\frac{x}{5} \right) - \frac{10}{2} \left(\frac{x}{5} \right)^2 \\
 Y = 10 + (10 \cdot \sin 60) \left(\frac{x}{5} \right) - \frac{5}{25} x^2 \\
 Y = 10 + \left(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{x}{5} \right) - \frac{x^2}{5} \\
 Y = 10 + \sqrt{3}x - 0,2x^2 \\
 Y = 10 + 1,73x - 0,2x^2
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Os modelos criados foram a base para ensinar o conteúdo de Função Quadrática. No entanto, percebe-se, pela Figura 6 que foi necessário o conhecimento das relações trigonométricas do seno e do cosseno para encontrar os dois componentes da velocidade (V_x e V_y), conteúdo ainda desconhecido pela maioria dos alunos.

Sobre isso, Biembengut (2016) afirma que o professor precisa ensinar ao aluno a se inteirar sobre o conteúdo curricular que ainda desconhece, mas que se mostra relevante.

5.3. ESPIRAL DE APRENDIZAGEM: SIGNIFICAÇÃO E EXPRESSÃO

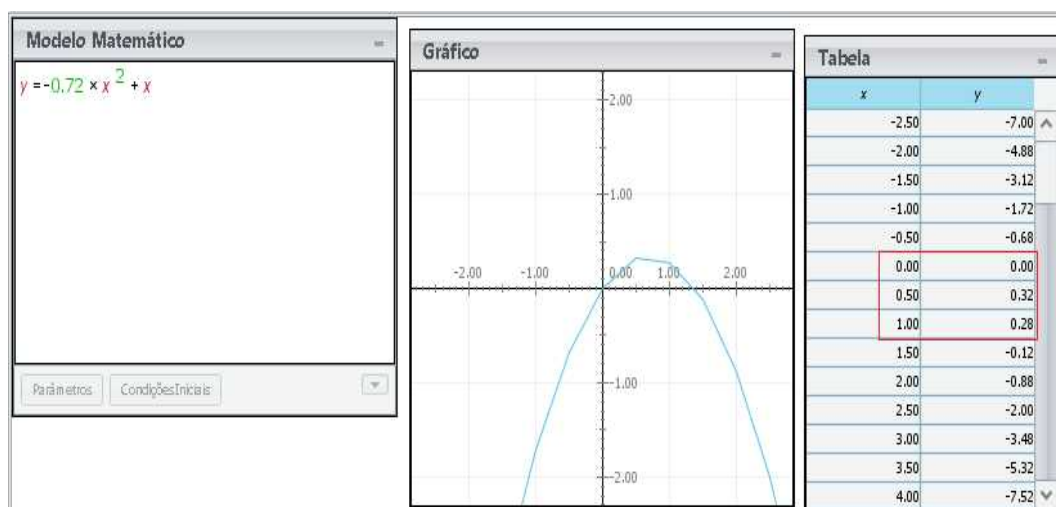
Na terceira fase de Modelagem, denominada Significação e Expressão, os grupos basquete, futebol, vôlei e salto ornamental foram instruídos a implementar os seus respectivos modelos construídos, no software Modellus, uma vez que foram esses que encontraram um modelo algébrico que representasse a modalidade olímpica investigada. Para efeito de análise, nesta seção serão analisados os dados do grupo 2, denominado G2, relativo à modalidade futebol, pois com esses observou-se a ocorrência da espiral de aprendizagem.

Para Bassanezi (2015, p.22), “a validação de um modelo é um processo de aceitação ou rejeição deste.” Como o objetivo é estudar o conteúdo matemático Função Quadrática por meio da Modelagem Matemática em sala de aula, nesse processo, o critério de análise é confrontar os dados reais com os resultados fornecidos pelo modelo, destacando características essenciais do fenômeno que respalde esse estudo, a fim de compreender o seu comportamento.

O grupo 2 (G2 - futebol) apresentou dois modelos, para a modalidade investigada e o primeiro está explícito na Figura 7.



Figura 7 – Modelo 1 e representações gráfica e numérica da trajetória da cobrança de pênalti apresentados no Modellus.



Fonte: Dados da pesquisa.

Para este modelo, o grupo 2 (G2 – futebol) utilizou o valor de 3,7 m/s para a velocidade, alcançando uma distância de um pouco menos do que 1,5 m em relação ao gol e um pouco mais do que 32 cm de altura. Ao observar que esse modelo não respondia à questão investigada, o grupo voltou à fase dois – compreensão e explicitação – e identificou que era preciso considerar a força empregada pelo jogador em uma cobrança de pênalti.

Nesse momento, destacam-se as fases de reflexão e depuração do ciclo de aprendizagem de Valente (2005), pois, partindo da impossibilidade de considerar o primeiro modelo como válido, mediante reflexão, os alunos depuraram o que foi produzido por eles, ou seja, analisaram o que foi feito e encontraram uma possível inconsistência.

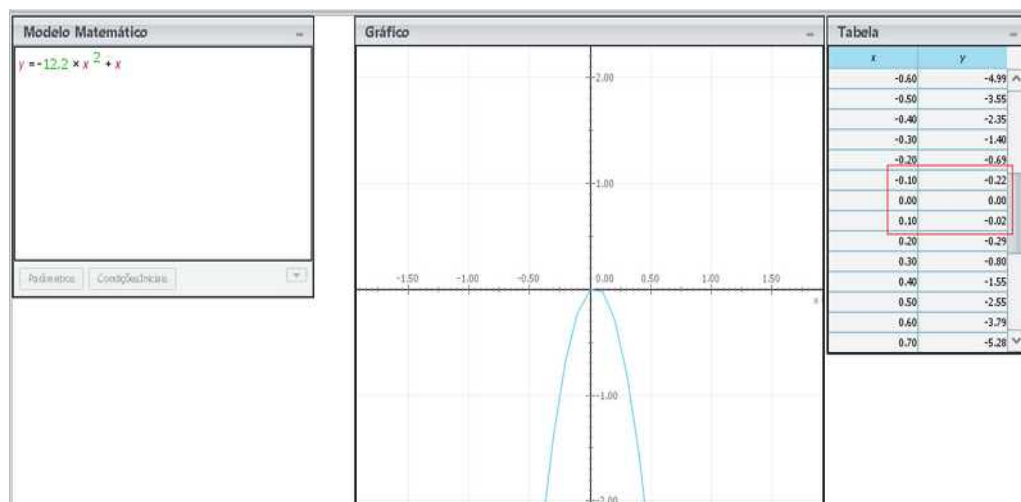
A depuração possibilitou aos alunos a busca de estratégias implicando uma nova representação do problema e, novamente, uma descrição. Nesse movimento foi possível identificar a espiral da Aprendizagem, proposta por Valente (2005), já que o grupo não recomeçou do mesmo ponto de partida, mas, sim, de um novo patamar, em que perceberam que era preciso inferir um novo dado.

Para a aquisição de um segundo modelo, o grupo 2 (G2 – futebol) considerou a força de 12N, encontrada nas pesquisas da primeira fase. A Figura 8 ilustra o novo modelo encontrado.

Apesar da nova tentativa, o grupo 2 (G2 – futebol) evidenciou que, como o primeiro modelo, este também não respondia ao questionamento investigado, haja vista que, nesse caso, a bola aparenta nem sair do chão.



Figura 8 – Modelo 2 e representações gráfica e numérica da trajetória da cobrança de pênalti apresentados no Modellus.



Fonte: Dados da pesquisa.

Mesmo não encontrando um modelo que traduzisse a trajetória da bola na modalidade olímpica em uma linguagem matemática, esse processo foi extremamente importante para estimar contribuições ao estudo da Função Quadrática, como, por exemplo, na conversa entre a professora e alguns alunos durante o seminário apresentado pelo grupo 2 (G2 – futebol).

A15 (integrante do grupo): No segundo modelo, a bola nem sobe.

P: Por que os modelos não responderam ao questionamento? Por que a gente não conseguiu validar os modelos?

A15: A gente observou que, no primeiro modelo, o valor que multiplica x^2 é menor que no segundo.

AX: (não identificado no áudio): A gente repara que, quanto maior a velocidade... a gente repara que vai ser menor o número que multiplica x^2 .

Foi sistematizado que, quanto maior a velocidade, menor o valor que multiplica x^2 (coeficiente a) e maior alcance o objeto terá. Graficamente, à medida que o valor do coeficiente a aumenta, mais comprimido será o gráfico.

O aluno A4 concluiu que seria necessário aumentar ainda mais a força, no intuito de responder ao questionamento do grupo 2 (G2 – futebol). Essa sugestão é evocada por Biembengut e Hein (2013) como precedente para a possível retomada da fase 2 e melhoria do modelo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo objetivou analisar as possibilidades existentes no software Modellus no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática no tocante a aprendizagem da Função Quadrática. Essas atividades foram desenvolvidas em concordância com as três fases da Modelagem Matemática proposta por Biembengut (2016).



Na fase de Significação e Expressão, a integração do software foi relevante pois possibilitou aos alunos a visualização da simulação dos modelos, a interpretação e verificação dos resultados proporcionados por eles, que seriam mais difícil com os recursos somente do papel e lápis, pois não tem o mesmo retorno que o software oferece.

Isso não significa que o recurso do papel e lápis impossibilite obter resultados satisfatórios, mas o software concede um feedback imediato e o usuário pode fazer inferências a respeito do modelo, assim que é executado, de maneira dinâmica, muito próximo da realidade. A facilidade desperta mais interesse e motivação nos alunos pelo aprendizado.

Houve contribuição na formulação de conjecturas, quando os alunos, no grupo G2 – futebol, sistematizaram que era preciso aumentar a força empregada pelo atleta para que a velocidade do corpo/objeto aumentasse; dessa forma aumenta também a altura máxima atingida e o alcance dele. Nesse sentido, houve um despertar para o senso crítico nos alunos, se não em todos, mas em boa parte, pois argumentaram sobre fatores que interferiam no processo investigativo.

No entanto, os alunos encontraram dificuldade no manuseio do software pois as possibilidades de investigar diversos casos nas janelas Modelo Matemático, Gráfico e Tabela foram complicadores pela falta de experiência deles com o Modellus.

Apesar dessa dificuldade, os alunos consideraram as diversas representações existentes no software como ponto positivo e ferramenta importante por dar condições de investigar o modelo em suas diferentes formas.

Considera-se que conhecer o software Modellus de antemão, tanto por parte dos alunos quanto do professor, é importante, se não em todo seu conjunto, pelo menos aqueles recursos essenciais para a sua exploração, pois assim podem ser minimizadas as dificuldades mencionadas.

Em se tratando da Modelagem Matemática, essa possibilitou aos alunos não somente aprender o conteúdo Função Quadrática, mas a se posicionar de maneira diferente nas situações investigativas, deixando de atuar em sala de aula como simples expectadores e tornando-se indivíduos ativos e pensantes.

7. REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.



BORBA, Marcelo de Carvalho. Coletivo seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2001, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2001.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

DAMIANI, Magda F. *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, n.45, p.57-67, mai./ago. 2013.

GODOY, Elenilton Vieira. **Currículo, cultura e educação matemática**. Campinas, SP: Papirus, 2015.

MALHEIROS, Ana Paula dos Santos; FRANCHI, Regina Helena de Oliveira. As tecnologias da informação e comunicação nas produções sobre modelagem no GPIMEM. In: BORBA, M. C; CHIARI, A. (Org.). **Tecnologias digitais e educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

SILVA, Flaviana dos Santos. **A formação de educadores em serviço no contexto escolar**: mídias digitais e projetos de trabalho. 2006. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Presidente Prudente, SP, 2006..

SILVA, Silvana Costa Silva. **O estudo da função quadrática na perspectiva da modelagem matemática no software modellus**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, 2018.

SOUTO, Daise Lago Pereira. Refletindo sobre o papel do software GeoGebra na produção de conhecimentos matemáticos construídos por um coletivo pensante formado por humanos e mídias. **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo**, v.1, n.1, p.22-36, 2012.

SOUTO, Daise Lago Pereira; ARAÚJO, Jussara de Loiola. Possibilidades expansivas do sistema seres-humanos-com-mídias: um encontro com a teoria da atividade. In: BORBA, M. C; CHIARI, A. (Org.). **Tecnologias digitais e educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

TEODORO, Vitor Duarte. **Modellus**: learning physics with mathematical modelling. 2002. 245 f. Dissertação (Doutorado em Ciências da Educação) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

VILLARREAL, Mónica E.; BORBA, Marcelo C. Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and ... notebooks throughout 100 years of ICMI. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, v.42, n.1, p.49-62, 2009.

Submetido em: **21/11/2018**

Aprovado em: **18/12/2019**